RHEIN.-WESTF.TECHN.HOCHSCHULE AACHEN
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Heinz Hanßmann

Aachen, den 27.4.2007

3. Übungsblatt zur Vorlesung Hamiltonsche Dynamische Systeme

6. Untersuchen Sie das drehende Pendel $\ddot{x} = M - \sin x$ in Abhängigkeit von M.

7. Definiere zu $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad .$$

Zeigen Sie, daß F eine Konstante der Bewegung ist. Finden Sie eine weitere Konstante der Bewegung. Was läßt sich über diejenigen Punkte aussagen, in welchen beide Funktionen linear abhängige Gradienten haben?

8. Die Poissonklammer auf $\mathbb{R}^{2k+\ell}$ sei auf den Koordinaten $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_k$, $z_1, \ldots, z_\ell$ durch

$$\begin{array}{llll} \{x_i, x_j\} \;=\; 0 \;, & \{y_i, y_j\} \;=\; 0 \;, & \{x_i, y_j\} \;=\; \delta_{ij} \;, \\ \{x_i, z_j\} \;=\; 0 \;, & \{y_i, z_j\} \;=\; 0 \;, & \{z_i, z_j\} \;=\; 0 \;. \end{array}$$

gegeben. Zeigen Sie

$$\bigwedge_{f,g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2k+\ell})} \{f, g\} \;=\; \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} \;-\; \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \quad .$$