Hertentamen analyse B op 26 augustus 2010

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en op het eerste vel ook de naam van je werkcollegeleider (Bart van den Dries, Jaap Eldering of Janne Kool).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Alle (deel)opgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Zij $f(x,y) = x^2y + y^3 - 12y$ voor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   (i) Bereken de stationaire punten van f.

   (ii) Bepaal $f^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ en schets een plaatje.

   (iii) Waar heeft de functie lokale minima en/of maxima? Zijn deze globaal? Bewijs je beweringen.

2. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 2x^3 + x}{x^5 - x^4 - x + 1}$,

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^4}}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}$,

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$.

   Geef daarbij precies aan welke rekenregels en standaardlimieten zijn gebruikt.

3. Definieer $I := \,]-1,1[$ en $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ door middel van

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \sin \dfrac{1}{x} & \text{als } 0 \neq x \in I \\ 0 & \phantom{\text{als }} x = 0 \end{cases} .$$

   (i) Laat zien dat f differentieerbaar is en bereken $f'(0)$.

   (ii) Bewijs dat f uniform continu is.

(*iii*) Zij $J \subseteq I$ een open interval waarvan 0 een van de eindpunten is. Verifieer dat f' op J niet begrensd is en concludeer dat f' in 0 niet continu is.

4. Definieer $f :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ door middel van
$$f(x) \quad = \quad -\frac{\cos x}{\sin x} \ .$$
   (*a*) Toon aan dat f strikt monotoon stijgend is.

   (*b*) Toon aan dat f een op heel $\mathbb{R}$ gedefinieerde inverse g heeft.

   (*c*) Toon aan dat g differentieerbaar is en bereken de afgeleide g'.

5. Voor elke $x \in [0,1]$ bestaat er een rijtje $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ met $\xi_k \in \{0,1,2\}$ voor alle $k \in \mathbb{N}^*$ waarvoor
$$x \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{3^k} \ .$$
Een dergelijk rijtje heet een *ontwikkeling van x in grondtal* 3. Voor gegeven x is de ontwikkeling niet altijd uniek (zoals ook de decimale ontwikkeling van een getal niet altijd uniek is). Echter, gebruik makend van de identiteit
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \quad = \quad 1$$
is het voor $x \neq 0$ mogelijk een ontwikkeling $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ zo te vinden, dat er voor alle $n \in \mathbb{N}^*$ een $k \geq n$ bestaat met $\xi_k \neq 0$. Deze is wel uniek, en dit is de ontwikkeling die we in het vervolg voor gegeven x kiezen.

Definieer nu $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ als volgt. Zij $x \in [0,1]$ willekeurig en $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de bijbehorende ontwikkeling in grondtal 3. Indien $\xi_k \neq 1$ voor alle $k \in \mathbb{N}^*$ stellen we
$$f(x) \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k/2}{2^k} \ ,$$
een ontwikkeling in grondtal 2 (dus ontstaan uit de ontwikkeling in grondtal 3 door de 2-en door 1-en te vervangen). Anders bestaat er een minimale $\ell \in \mathbb{N}^*$ met $\xi_\ell = 1$ en stellen we
$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{2^\ell} \ + \ \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{\xi_k/2}{2^k} \ .$$
   (*i*) Laat zien dat f integreerbaar is.

   (*ii*) Ga na dat $f(x) + f(1-x) = 1$ voor alle $x \in [0,1]$

   (*iii*) Bereken $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Hint: probeer een tekening te maken (waarschuwing: deze functie staat bekend als ‘de duivelstrap’).