Inleiding Analyse 2010

Opgaven uit het (her)tentamen vorig jaar

Opgave A

Bereken

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{1 - \sin^2 x}$;

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n}$.

Opgave B

Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|} \ .$$

Ga na of f differentieerbaar is in $x = 0$.

Opgave C

Zij $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 2\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Met deze V definiëren we $W \subseteq \mathbb{R}^2$ door

$$W = \{(x, y) \in V \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \ .$$

(a) Schets V en W.

(b) Is W gesloten in $\mathbb{R}^2$? Waarom wel of waarom niet?

(c) Is W gesloten in V? Waarom wel of waarom niet?

Opgave D

De functie $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door $f(x) = 0$ indien $x \notin \mathbb{Q}$ en $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ waar p en q geen gemeenschappelijke delers hebben.

(a) Ga na dat f in geen enkel punt van $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ continu is.

(b) Bepaal de verzameling D van punten waarin f wél continu is.

(c) Is de restrictie $f_{|_D} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ een continue functie?

(*bonus*) Leg uit waarom je (c) onafhankelijk van het antwoord nooit zou kunnen gebruiken om (b) op te lossen.

Opgave E

Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ een rij in $\mathbb{R}$ zodanig dat $a_0 = 3$ en

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$$

voor $n \geq 0$.

(a) Bewijs dat $a_n \geq 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Hint: Laat eerst zien dat

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \geq 2$$

voor alle $x \geq 2$. Pas dan de inductie naar n toe.

(b) Bewijs dat $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Hint: Gebruik (a).

(c) Bewijs dat (a_n) convergent is en bereken $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.