Inleiding Analyse 2009

Inleveropgaven

A). Stel
$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$
In $(0,0)$ is f niet gedefinieerd. We bestuderen $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

1. Bepaal de waarde van $f(x,y)$ op een willekeurige rechte lijn door $(0,0)$. Bepaal de limiet van $f(x,y)$ als (x,y) langs die rechte lijn naar $(0,0)$ nadert. N.B. Je moet alle mogelijke rechte lijnen door (0,0) onderzoeken.
2. Bepaal nu het gedrag van $f(x,y)$ op de kromme $x = y^2$ in de buurt van $(0,0)$.
3. Bewijs dat niet geldt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Hiervoor kun je bijvoorbeeld een geschikte negatie van de limietdefinitie opstellen en laten zien dat f aan deze negatie voldoet.
4. Bewijs dat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ niet bestaat. Is dit resultaat verrassend? Waarom wel of waarom niet? Plot eventueel de grafiek van de functie met Mathematica.

B). Stel $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zijn functies. We definiëren voor alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$k(x) = \max\,\{f(x), g(x)\}$, d.w.z. het maximum van $f(x)$ en $g(x)$

$h(x) = \min\,\{f(x), g(x)\}$, d.w.z. het minimum van $f(x)$ en $g(x)$.

Met $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat bedoelen we: er is een $p \in \mathbb{R}$ zodat $\lim_{x\to a} f(x) = p$.

a. Bewijs: als $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat en $\lim_{x\to a} g(x)$ bestaat ook, dan bestaan $\lim_{x\to a} h(x)$ en $\lim_{x\to a} k(x)$. Hint: onderscheid eventueel verschillende gevallen.

b. Geldt het omgekeerde ook? Dat wil zeggen: als $\lim_{x\to a} h(x)$ bestaat en $\lim_{x\to a} k(x)$ ook bestaat, en de limieten zijn ongelijk, volgt dan dat $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat en $\lim_{x\to a} g(x)$ bestaat? Zo ja, geef een bewijs, en zo nee, geef een tegenvoorbeeld. Laat in dit geval precies zien waarom je tegenvoorbeeld niet aan de limietdefinitie voldoet.

c. Als $\lim_{x\to a} h(x)$ bestaat en $\lim_{x\to a} k(x)$ ook bestaat, en de limieten gelijk zijn aan elkaar, onderzoek dan ook of $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat. Zo ja, geef een bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

C). Stel a, b, c, d zijn reële getallen met $a < b$ en $c < d$. Stel $f : [a,b] \to [c,d]$ is een reële functie die monotoon stijgend is (als $x < y$ dan $f(x) \leq f(y)$) en surjectief ($f([a,b]) = [c,d]$).

(i) Bewijs $f(a) = c$ en $f(b) = d$.

(ii) Bewijs dat f continu is.

Opmerking: later zullen we bewijzen dat uit (i) en (ii) volgt dat f surjectief is.

Veronderstel nu dat f ook monotoon strikt stijgend is (als $x < y$ dan $f(x) < f(y)$).

(iii) Laat zien dat de inverse functie f^{-1} bestaat en continu is op $[c, d]$.

(iv) Veronderstel dat de functie $f\colon$ [0,1] $\to$ [0,1] gegeven door $f(x) = x^n$ surjectief is. [We zullen later uit eigenschappen van de reële getallen bewijzen dat dit zo is.]

Laat zien dat de wortelfunctie $x \to \sqrt[n]{x}$ continu is op [0,1].

D). We schrijven $[x]$ voor het grootste gehele getal dat $\leq x$ is. Definieer voor $x > 0$ $f(x) = 1 - x[\frac{1}{x}]$ en $g(x) = x - x^2[\frac{1}{x}]$, en $f(0) = g(0) = 0$.

(a) Bewijs dat $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$ niet bestaat.

(b) Ga na of f continu is in 0. Bewijs je bewering.

(c) Ga na waar g differentieerbaar is. Bewijs je bewering. [Hint: onderscheid $x = 0, x = \frac{1}{n}$ met $n \in \mathbb{N}$ en de overige x.]

E). We definieren als in opgave 2.5 de maximumnorm $\|x\|_m := \max(|x_1|, |x_2|)$ op $\mathbb{R}^2$ en we kiezen ook een willekeurige norm $\|\cdot\|_w$ op $\mathbb{R}^2$. Hiervan veronderstellen we alleen de eigenschappen in lemma 1.3 in het dictaat.

(a) Kies $x = (x_1, x_2)$ willekeurig in $\mathbb{R}^2$, en toon aan dat er een constante $q > 0$ bestaat zodat $\|x\|_w \leq q\|x\|_m$. Hint: schrijf $x = x_1(1,0) + x_2(0,1)$.

De bij $\|\cdot\|_i$ behorende afstand noteren we met d_i, en de door de metriek d_i gedefinieerde bol met middelpunt $a \in \mathbb{R}^2$ en straal $r > 0$ noteren we met $B_i(a; r)$, voor $i = w$ en $i = m$.

(b) Bewijs dat voor iedere $a \in \mathbb{R}^2$ en iedere $\epsilon > 0$ de bol $B_w(a; \epsilon)$ open is ten aanzien van de metriek d_m.

(c) Bewijs dat voor elke deelverzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ geldt: als A open is in d_w, dan is A open in d_m (en dus ook in de Euclidische metriek volgens opgave 2.5).

(d) Kun je voor $\mathbb{R}^n$ iets soortgelijks bewijzen, en zo ja, hoe?

F). We noteren met $\mathbb{R}_{\geq 0}$ de verzameling $\{x \in \mathbb{R} \;\; x \geq 0\}$. We kiezen een element ω dat niet in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zit en we definiëren $V = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\omega\}$. We gaan V van een metriek voorzien.

(a) Definieer $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Laat zien dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt $0 \leq f(x) < 1$ en $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$. Maak een plaatje van de grafiek van f (Hint: $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$). We breiden f uit tot een functie $V \to \mathbb{R}$ door te definiëren $f(\omega) = 1$.

(b) Nu definiëren we voor $x, y \in V \quad d_2(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Laat zien dat d_2 een metriek is op V.

(c) Laat zien dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt $d_2(x, y) \leq |x-y|$. Kies een vaste $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en laat $\delta > 0$ zodanig dat $\delta \leq 1$. Laat zien dat voor alle $x \in V$ met $|x - a| \leq \delta$ geldt $d_2(x, a) \geq \frac{1}{(a+2)^2} \cdot |x - a|$.

(d) We definieren nu de functie $g : V \to V$ door $g(0) = \omega$, $g(\omega) = 0$, en $g(x) = \frac{1}{x}$ voor alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ met $x > 0$. Laat zien dat voor $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ met $a > 0$ geldt $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ ook ten opzichte van de metriek d_2!

(e) Bewijs dat g continu is op V met metriek d_2.

G). Stel $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ is een continue functie met de volgende eigenschappen:

(1) f is strikt monotoon stijgend,

(2) Er is een $x_0 > 0$ zodat $f(x_0) = x_0$,

(3) Voor alle x met $0 \leq x < x_0$ geldt $f(x) > x$,

(4) Voor alle x met $x > x_0$ geldt $f(x) < x$.

Kies nu $c \geq 0$. We definieren de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ door $a_1 = c$ en $a_{n+1} = f(a_n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Stel eerst $c < x_0$.

(i) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ strikt monotoon stijgend is.

(ii) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ begrensd is.

(iii) Laat zien dat $\lim_{n \to \infty} a_n$ bestaat, en bepaal deze limiet.

(iv) Behandel nu het geval $c \geq x_0$.

(v) Ga na in hoeverre som 3.3, 3.5 (en eventueel 3.6) met opgave G behandeld kunnen worden. Bedenk nu zelf een som zoals 3.3, 3.5 of 3.6, waarbij van $(a_n)_{n \geq 1}$ de relatie tussen a_n en a_{n+1} concreet gegeven is.

H). Zij V een metrische ruimte. We noemen V samenhangend indien $\emptyset$ en V de enige deelverzamelingen van V zijn die tegelijk open en gesloten zijn.

(i) Laat zien dat V dan en slechts dan onsamenhangend (d.w.z. niet samenhangend) is als $V = O \dot{\cup} U$ disjuncte vereniging van twee niet lege open verzamelingen $O, U \subseteq V$ is.

(ii) Zij V samenhangend en $f : V \longrightarrow W$ continu. Ga na dat $f(V) \subseteq W$ dan eveneens samenhangend is; een deelverzameling van een metrische ruimte is samenhangend indien deze als metrische ruimte (voorzien met de geïnduceerde metriek) een samenhangende metrische ruimte is.

Voor $a < b \in \mathbb{R}$ heet een continue afbeelding $c : [a, b] \longrightarrow V$ een kromme in V, met beginpunt $c(a)$ en eindpunt $c(b)$. We noemen V boogsamenhangend indien er voor ieder tweetal punten $p, q \in V$ een kromme in V bestaat met beginpunt p en eindpunt q.

(iii) Toon aan dat elke boogsamenhangende metrische ruimte samenhangend is.

(*iv*) Geldt ook andersom dat elke samenhangende metrische ruimte boogsamenhangend is?

(*v*) Laat zien dat elke samenhangende deelverzameling van $\mathbb{R}$ boogsamenhangend is.

I). Zij D een rij-compacte metrische ruimte. Laat zien dat er voor elke $\varepsilon > 0$ eindig veel punten $x_1, \ldots, x_n \in D$ zijn met

$$D \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k; \varepsilon) \ .$$

Een metrische ruimte met deze eigenschap noemt men pre-compact (in het engels ook *totally bounded*, een sterke vorm van begrensdheid). Toon aan dat (omgekeerd) elke metrische ruimte die volledig en pre-compact is ook rij-compact is. Concludeer dat in een volledige metrische ruimte V een deelverzameling $A \subseteq V$ rij-compact is dan en slechts dan als A gesloten en pre-compact.

J). Zij $f : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ een strikt monotone functie.

(*i*) Laat zien dat f inverteerbaar is. *Opmerking:* dit werd al eerder in een inleveropgave gevraagd, hier zal bij de correctie rekening mee worden gehouden.

(*ii*) Wat kun je over $f(\mathrm{Dom}(f))$ zeggen? Beschrijf i.h.b. het geval dat $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ een interval is.

(*iii*) Toon aan dat $f^{-1} : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ continu is indien $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ een interval is en geef in het geval van onsamenhangend $\mathrm{Dom}(f)$ een tegenvoorbeeld. *Hint:* herlees de preciese definitie van continuïteit.

K). Deze opgave behandelt de vraag of een functie goed wordt benaderd door zijn Taylorpolynoom. We gebruiken de verkorte notatie $p_n(x)$ voor het n–de orde Taylorpolynoom van een functie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ rond het punt $a \in D$.

i) Zij $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ en $a = 0$. Gebruik lemma 6.38 om aan te tonen dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\sin x \quad = \quad \lim_{n\to\infty} p_n(x) \ .$$

Een willekeurig vaak differentieerbare functie waarvoor $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x)$ bestaat en gelijk is aan $f(x)$ heet *reëel analytisch.* Niet alle functies die willekeurig vaak differentieerbaar zijn, zijn reëel analytisch. Zij $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$g(x) \quad = \quad \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \ .$$

ii) Gebruik inductie om te bewijzen dat voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ er een polynoom $r_n(y)$ bestaat zodat voor alle $x \neq 0$

$$g^{(n)}(x) \quad = \quad r_n(\frac{1}{x})\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

(waarin $y = \frac{1}{x}$ een voor de hand liggende substitutie is). Laat zien dat $\lim\limits_{x\to 0} g^{(n)}(x) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

iii) Gebruik inductie om te bewijzen dat $g(x)$ willekeurig vaak differentieerbaar is in $x = 0$ en dat $g^{(n)}(0) = 0$. *Hint:* Gebruik de definitie

$$g^{(n+1)}(0) \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{g^{(n)}(x) \, - \, g^{(n)}(0)}{x \, - \, 0} \ ,$$

substitueer $y = \frac{1}{x}$ en gebruik herhaaldelijk de regel van l'Hôpital uit opgave 6.12.

iv) Toon aan dat g niet reëel analytisch is.