Primitiveren

Universiteit Utrecht

P. v. Mouche

Zomer 2002

Dit manuscriptje gaat over primitiveren. Het beoogt de lezer snel de kunst van het primitiveren bij te brengen.[1] Het maken van de daartoe gerichte opgaven is daarbij wel van belang. Fijne opmerkingen, die de minder theoretisch geïnteresseerde lezer over kan slaan, staan in de voetnoten.[2]

Kunnen differentiëren is onontbeerlijk om te kunnen primitiveren. Ik ga er gewoon vanuit dat de lezer deze vaardigheid beheerst. Maar zo dadelijk roepen we een en ander nog even in herinnering.

Uiteraard houd ik me ook aanbevolen voor op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot een verdere verbetering van het manuscript.[3]

[1] Het is goed te weten dat er uitgebreide tabellen bestaan met primitieven en dat computeralgebrapakketten zoals MAPLE en MATHEMATICA heel wat primitieven bepalen kunnen. Tot lezers die daarmee al gelukkig zijn, richt dit manuscript zich niet. Het richt zich wel tot lezers die PRIMITIVEERDERS willen worden die zich kunnen laten zien.

[2] Deze voetnoten zorgen er ook voor dat *au fond* dit manuscript mathematisch rigoureus is.

[3] Eventueel via het internet: `pvmouche@gmx.net` of `http://www.math.uu.nl/people/mouche` (indien die nog gelden).

TER HERINNERING:[4]

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x,\ \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ \operatorname{arccosh}(x) = \ln(|x + \sqrt{x^2-1}|).$$

$$\sin^2(\arctan x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

$$(a^x)' = \ln a\ a^x,\ (e^x)' = e^x.$$

$$(\ln x)' = 1/x.$$

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x.$$

$$(\sinh x)' = \cosh x,\ (\cosh)'x = \sinh x.$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\mathrm{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ (\mathrm{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

AFSPRAAK:

Alle functies in het manuscript zijn reëelwaardig.

[4] Misschien is “ter herinnering” ietsjes overdreven. Maar om een goede primitiveerder te worden loont het zich de moeite om al deze formules te kunnen dromen.

1 Notie

We vallen met de deur in huis:

Definitie 1 Gegeven een functie f gedefinieerd op een interval I van $\mathbb{R}$, heet een functie F op I een *primitieve* van f als $F' = f$, i.e. als F differentieerbaar is met afgeleide gelijk aan f.[5] De verzameling bestaande uit alle primitieven duiden we aan met $\int f(x)\,dx$. $\diamond$

In de analyse toont men aan dat als f continu is, f een primitieve heeft, en wel als a een willekeurig punt uit het domein van f is, is $F(x) := \int_a^x f(s)\,ds$ een primitieve. (Dit resultaat staat wel bekend als de "Hoofdstelling van de integraalrekening", en sommigen noemen dit zelfs de "Hoofdstelling van de analyse".)

Merken we op dat als F een primitieve van f is, dat dan $F + c$ (waar c een constante is) dat ook is. Dus als er een primitieve van f bestaat, dan bestaan er oneindig veel. Verder als zowel F_1 als F_2 primitieven van f zijn, dan verschillen deze een constante.[6] Dus als we een of andere primitieve van f bepaald hebben, dan hebben we ze allemaal te pakken. We gebruiken in dat verband ook wel de notatie $\int f(x)\,dx = F + C$.[7] Hier noemen we $f(x)$ nog de *integrand*.

2 Zwarte kunst

Primitiveren is veelal een ingewikkeldere bezigheid dan differentiëren. Immers, gegeven een functie kunnen we deze met de rekenregels voor afgeleiden differentiëren (alhoewel dat wel eens veel werk kan zijn). Zo kunnen we in principe ook altijd nagaan of een gegeven functie F wel de primitieve van f is. Maar om zo'n F te bepalen is een andere zaak, dat is juist de kunst en daar gaan we hieronder dus licht op laten schijnen.[8]

U zult zien dat het er straks vaak wild aan toe zal gaan: we gebruiken dingen zoals $df(x) = f'(x)\,dx$ die wel formeel zin hebben maar waarvan we het gebruik niet gerechtvaardigd hebben. Voor $\cos y$ schrijven we $\sqrt{1 - \sin^2 y}$ als ons dat uitkomt (zonder ons om een eventueel minteken te bekommeren), voor $\arctan \tan x$ schrijven we x, ... In principe is alles geoorloofd om een uitkomst te vinden. Vandaar dat we van "zwarte kunst" spreken. Eenmaal een antwoord hebbend, controlere men wel steeds of dat voldoet. Maar dan wel een controle volgens de regels van de (wis)kunst, want anders kan er nog van alles mis zijn.

Bij het praktische rekenwerk om primitieven te bepalen maakt men gebruik van wat men al weet (de "kijkmethode" voor standaardprimitieven), van rekenregels en van speciale methoden voor bepaalde klassen van functies, zoals breuksplitsen voor rationale functies. De standaardprimitieven bekijken we in § 3, de rekenregels in § 4 en de speciale methoden in de daarop volgende paragrafen.

---

[5] De definitie blijft zinvol als het domein van F een verzameling is zodanig dat het zin kan hebben om over de afgeleide van F te spreken. De verzamelingen in kwestie betreffen verzamelingen J met de eigenschap dat voor elke $\xi \in J$ het punt ξ een afsluitpunt van $J \setminus \{\xi\}$ is. Een eindige vereniging van intervallen bijvoorbeeld heeft deze eigenschap.

[6] Dit resultaat maakt gebruik van het feit dat het domein van f een interval is. Inderdaad: dan is voor $h := F_2 - F_1$, $h' = 0$ waaruit, omdat het domein een interval is, volgt $h = c$ en dus $F_2 = F_1 + c$.

Als het domein van f geen interval zou zijn, is het resultaat niet waar: zowel de functie F_1 als F_2 gedefinieerd door $F_1(x) := \begin{cases} \ln|x| \ (x < 0) \\ \ln|x| + 5 \ (x > 0) \end{cases}$ als $F_2(x) := \begin{cases} \ln|x| + 3 \ (x < 0) \\ \ln|x| \ (x > 0) \end{cases}$ zijn primitieven van de functie $1/x$, maar $F_2 - F_1$ is niet constant.

[7] En bedoelen daarmee dus de verzameling functies $\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$.

[8] Een kanttekening. Met "een primitieve van f bepalen" bedoelen we hierboven het vinden van een F in termen van "elementaire" functies. "Elementaire functies" zijn in dit verband de bekende dingen als veeltermen, de wortelfunctie, de exponentiële functie, sin en ln. In die zin zal het u niet lukken om een primitieve van $f(x) = e^{x^2}$ te bepalen. Toch bestaat deze zoals we al gezien hebben.

3 Standaardprimitieven

Men doet er goed aan de hieronder staande tabel met standaardprimitieven van buiten te kennen.[9] Dat deze tabel correct is, controlere men dus door de functie in de tweede kolom te differentiëren.[10]

$\int x^p \, dx$	$\frac{1}{p+1} x^{p+1}$ (waar $p \neq -1$)
$\int x^{-1} \, dx$	$\ln(x)$
$\int e^x \, dx$	e^x
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$	$\arcsin x$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$	$\mathrm{arcsinh} x$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx$	$\mathrm{arccosh} x$
$\int \frac{1}{x^2+1} \, dx$	$\arctan x$
$\int \sin x \, dx$	$-\cos x$
$\int \cos x \, dx$	$\sin x$
$\int \sinh x \, dx$	$\cosh x$
$\int \cosh x \, dx$	$\sinh x$

Ietwat ingewikkeldere functies zoals e^{ax} staan niet in de tabel omdat deze, eenmaal deze tabel hebbend, gemakkelijk daarmee bepaald kunnen worden. Dat kan met een beetje gevoel voor wat men aan het doen is met de "kijkmethode" (i.e. men ziet de primitieve meteen zitten) of op een mechanischere manier met behulp van de dadelijk te behandelen substitutiemethode.

Voorbeeld 1 Bepaal $\int e^{ax} \, dx$.

Oplossing met de "kijkmethode" (zie ook Voorbeeld 5): wetende (uit de tabel) dat $(e^x)' = e^x$, probeert men e^{ax} en ziet dat $(e^{ax})' = ae^{ax}$ en daaruit dus dat $\frac{1}{a}e^{ax} + C$ als gezocht is.

De volgende tabel van primitieven bevat primitieven die we als wat minder standaard beschouwen (in de zin van dat men zich meer moge afvragen "hoe komen we eraan"), maar die wel handig zijn om bij de hand te hebben.

$\int \ln x \, dx$	$x \ln x - x$
$\int \sqrt{1-x^2} \, dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$
$\int \sqrt{x^2 \pm 1} \, dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm 1} \pm \frac{1}{2} \begin{cases} \mathrm{arcsinh} x \\ \mathrm{arccosh} x \end{cases}$
$\int \frac{1}{x^2-1} \, dx$	$\frac{1}{2} \ln \lvert \frac{x-1}{x+1} \rvert$
$\int \tan x \, dx$	$-\ln(\lvert \cos x \rvert)$
$\int \cot x \, dx$	$\ln(\lvert \sin x \rvert)$
$\int \arcsin x \, dx$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\int \arctan x \, dx$	$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\int \frac{1}{\sin x} \, dx$	$\ln \lvert \tan \frac{x}{2} \rvert$
$\int \frac{1}{\cos x} \, dx$	$\frac{1}{b} \ln \lvert \tan(\frac{bx}{2} + \frac{\pi}{4}) \rvert$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$	$\tan x.$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx$	$-\cot x.$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx$	$\tanh x.$
$\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx$	$-\coth x.$

Zie Voorbeelden 2, 3, 7, 12 en 13 waar we enkele van deze primitieven op een constructieve manier afleiden.

[9] Over wat wel en wat niet in deze tabel hoort, valt te redetwisten. Met de gegeven tabel komt men een heel eind.

[10] Voor het gemak hebben we "$+C$" in de tweede kolom steeds weggelaten. Ook is het de bedoeling dat elke te primitiveren functie op een interval gedefinieerd is. Wat dat interval is, doet er niet toe, als het maar zin heeft. Zo kan x^p met $p = -1/2$ in de eerste regel van de tabel bijvoorbeeld gedefinieerd zijn op $(-\infty, 0)$.

4 Rekenregels

Met behulp van de rekenregels voor afgeleiden bewijst men (met λ een reëel getal aanduidend) de volgende rekenregels voor primitieven:[11]

1. $\int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx$.
2. $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x) dx + \int g(x)\, dx$.
3. $\int f(x) g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$. (Regel der partiële integratie.)
4. $\int f(\phi(x))\phi'(x)\, dx = F(\phi(x)) + C$. (Substitutieregel.)

(De regel der partiële integratie volgt uit de produktregel en de substitutieregel uit de kettingregel.) De regel der partiële integratie past men soms met succes toe, als de primitieve van een produktfunctie gezocht wordt en de primitieve van een der factoren bekend is en de afgeleide van de andere factor gemakkelijk is.

Voorbeeld 2 Bepaal $\int \ln x\, dx$.
Oplossing. Met de regel der partiële integratie volgt $\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int 1 \cdot dx = x \ln x - x + C$.

Voorbeeld 3 Bepaal $\int \arcsin x\, dx$.
Oplossing. Met de regel der partiële integratie volgt $\int \arcsin x\, dx = \int 1 \cdot \arcsin x\, dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

Partiële integratie stelt vaak in staat om recurrente betrekkingen te vinden, waardoor men alle primitieven in kwestie kan bepalen. Soms kan men zo'n betrekking nog expliciet oplossen ook.

Voorbeeld 4 Bepaal een recurrente betrekking voor $F_n := \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}\, dx$ $(n \geq 1)$ en bepaal daarmee F_2.
Oplossing. $F_n = \int 1 \cdot (x^2+1)^{-n}\, dx = x(x^2+1)^{-n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = x(x^2+1)^{-n} + 2n(\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}} - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}) = x(x^2+1)^{-n} + 2n(F_n - F_{n+1})$. Daaruit volgt de formule $F_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} F_n$. Omdat F_1 bekend is, namelijk $F_1 = \arctan x + C$, levert deze formule een manier om de primitieven in kwestie recursief te bepalen. Zo is bijvoorbeeld $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}\, dx = F_2 = \frac{1}{2} \frac{x}{(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C$.

In de praktijk gebruikt men de substitutieregel door zich te bedienen van de volgende notaties:

$$d(f+g) = df + dg,$$

$$d(\lambda f) = \lambda\, df,$$

$$df(x) = f'(x)\, dx$$

en door voor ingewikkeldere uitdrukkingen iets eenvoudiger zoals y te substitueren of door voor een eenvoudige uitdrukking iets ingewikkelders zoals $\sin(y)$ te substitueren. (voorbeelden komen eraan). Dat heet dan *substitutiemethode*. Bovenstaande notaties hebben niet zonder meer zin. Dat er iets zinvols zit aan bovenstaande notaties kan men inzien door ermee om te gaan als met getallen: $df(x) = f'(x)\, dx$ is dan $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ hetgeen wel zin heeft. We gaan hier maar niet proberen dit rigoureus te maken.

Voorbeeld 5 Bepaal $\int e^{ax}\, dx$.
Oplossing: zet $y = ax$. Dan $dy = a\, dx$ en daarmee $\int e^{ax}\, dx = \int e^y \frac{1}{a}\, dy = \frac{1}{a} \int e^y\, dy = \frac{1}{a} e^y + C = \frac{1}{a} e^{ax} + C$.

[11] Deze regels zijn waar als de functies in kwestie net genoeg zijn; bijvoorbeeld continue differentieerbare f, g voldoen aan de Regel der partiële integratie.

Met Opgave 1 (die misschien wat teveel van hetzelfde is) kunt u nog wat verder oefenen met het bepalen van standaardprimitieven die ietsjes minder standaard zijn.

Voorbeeld 6 Te bepalen: $\int \frac{e^x}{1+e^x}\ dx$.

Oplossing: substitueer $e^x = y$, dan $de^x = e^x\ dx$, dus $dy = y\ dx$ en daarmee $\int \frac{e^x}{1+e^x}\ dx = \int \frac{y}{1+y}\ \frac{1}{y}\ dy = \int \frac{1}{1+y}\ dy = \ln|1+y| + C = \ln(1+e^x) + C$.

Voorbeeld 7 Te bepalen: $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$.

Oplossing 1: Substitueer $x = \sin y$, dan $dx = d\sin y = \cos y\ dy = \sqrt{1-\sin^2 y}\ dy$ en daarmee $\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y}\ \sqrt{1-y^2}\ dy = \int (1-\sin^2 y)\ dy = \int \cos^2 y\ dy = \int \frac{1}{2}(1+\cos(2y))\ dy = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin(2y) + C == \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\sin y \cos y + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$.

Oplossing 2: $\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2}\ dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = x\sqrt{1-x^2} + \int (-\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\ dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\ dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Daaruit $\int 2\sqrt{1-x^2}\ ; dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ en dus $\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$.

5 Primitiveren van rationale functies

In bovenstaande twee tabellen hebben we al gezien hoe de eenvoudige rationale functies (dat wil zeggen quotiënten van veeltermen) x^n, $\frac{1}{x^2+1}$ en $\frac{1}{x^2-1}$ te primitiveren. De methode van "breuksplitsen", die we hier gaan bespreken, is te gebruiken als men een primitieve van een willekeurige rationale functie wil bepalen. Doel van die methode is een rationale functie te herschrijven als een som van rationale functies waarvan men de primitieve kent. Naast bovenstaande rationale functies (of daaraan direct verwante functies) hebben we daarbij nog $\frac{1}{(x^2+1)^n}$ op het oog (zie Voorbeeld 4). We gaan nu recepten geven hoe primitieven van rationale functies te geven met de methode van het breuksplitsen. Dat doen we in een paar stappen van steeds grotere algemeenheid. Dat die recepten inderdaad werken, daarover kan men een hele theorie opzetten; deze theorie kan men nalezen in boeken over algebra. Als $\frac{f}{g}$ een te primitiveren rationale functie is, mogen we ons beperken tot de rest van f gedeeld door g. Bijvoorbeeld $\frac{x^3+x}{x^2-1} = x + \frac{3x}{x^2-1}$ en slechts de primitieve van de rest $\frac{3x}{x^2-1}$ kan een probleem opleveren. We mogen dus veronderstellen, en dat zullen we nu ook doen, dat voor de graden van f en g geldt: $\deg(f) < \deg(g)$. Voor het vervolg zijn de nulpunten van g van belang. We zijn echter niet altijd in staat de nulpunten van g ook echt te berekenen. In dat geval zullen we dan meestal ook geen primitieve kunnen berekenen.

We bekijken eerst het geval waar $g(x)$ louter enkelvoudige reële nulpunten heeft, zeg $a_1, \ldots, a_m$. In dat geval kan men (zoals de theorie leert) als volgt breuksplitsen:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_m}{x-a_m}.$$

(We bedoelen hiermee dat er constanten $A_1, \ldots, A_m$ zijn zodanig dat bovenstaande identiteit voor alle x (eventueel afgezien voor x gelijk aan een der a_i) geldt.)

Voorbeeld 8 Te bepalen $\int \frac{x-6}{x^2+3x-4}\ dx$.

Oplossing: we ontbinden de noemer: $x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$. We stellen nu $\frac{x-6}{x^2+3x-4} = \frac{A_1}{x+4} + \frac{A_2}{x-1}$. Dat komt neer op $x-6 = A_1(x-1) + A_2(x+4)$ voor alle x. $x=1$ invullen levert $A_2 = -1$ en $x = -4$ invullen levert $A_1 = 2$. Daarmee $\int \frac{x-6}{x^2+3x-4}\ dx = \int \frac{2}{x+4}\ dx - \int \frac{1}{x-1} = \ln(x+4)^2 - \ln|x-1| + C$.

Ietsjes ingewikkelder is het geval waar $g(x)$ louter reële (dus geen echt complexe) nulpunten heeft die niet per sé enkelvoudig zijn. Zeg $a_1, \ldots, a_m$ zijn de nulpunten en $r_1, \ldots, r_m$ zijn respectievelijk hun multipliciteiten. In dat geval kan men als volgt breuksplitsen:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} + \cdots +$$

$$\cdots + \frac{A_{m1}}{(x-a_m)^1} + \frac{A_{m2}}{(x-a_m)^2} + \cdots + \frac{A_{mr_m}}{(x-a_m)^{r_m}}.$$

Voorbeeld 9 Te bepalen $\int \frac{x}{(1-x^2)(1+x)}\,dx$.

Oplossing: breuksplitsen levert op: $\frac{x}{(1-x^2)(1+x)} = \frac{x}{(1+x)^2(1-x)} = \frac{-\frac{1}{2}}{(1+x)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{1+x} + \frac{\frac{1}{4}}{1-x}$. Daaruit $\int \frac{x}{(1-x^2)(1+x)}\,dx = \frac{1}{2}(1+x)^{-1} + \frac{1}{4}\ln|1+x| - \frac{1}{4}\ln|1-x| + C$.

Bekijken we tenslotte het algemene geval waar we ook complexe nulpunten toelaten. Merken we even op dat als z een nulpunt van de noemer van p is, het complex geconjugeerde getal $\overline{z}$ dat ook is en wel met dezelfde multipliciteit als die van z. $p(x)$ is als volgt te schrijven:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{r_i} \frac{A_{ir}}{(x-a_i)^r} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=1}^{t_j} \frac{u_{jr}x + v_{jr}}{((x-b_j)(x-\overline{b_j}))^r},$$

waar $a_1, \ldots, a_m$ de reële nulpunten van de noemer van p zijn met multipliciteiten respectievelijk $r_1, \ldots, r_m$, $b_1, \ldots, b_s$ de complex geconjugeerde nulpunten met positief imaginair gedeelte zijn van de noemer van p met multipliciteiten respectievelijk $t_1, \ldots, t_s$ zijn. De primitieve van elk der $\frac{A_{ir}}{(x-a_i)^r}$ levert geen enkel probleem en die der $\frac{u_{jr}x+v_{jr}}{((x-b_j)(x-\overline{b}_j))^r} = \frac{u_{jr}x+v_{jr}}{x^2-2(\Re b_j)x+|b_j|^2}$ zijn ook wel te behapstukken door te bedenken dat $\frac{ax+d}{(x^2+bx+c)^n}$ met b^2-4ac gelijk is aan

$\frac{a}{2}\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n} + (d-\frac{ab}{2})\frac{1}{(x^2+bx+c)^n} = \frac{a}{2}\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n} + (d-\frac{ab}{2})\frac{1}{((x+\frac{b}{2})^2+\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}^2)^n}$

en te bedenken dat we Voorbeeld 4 hebben.

Voorbeeld 10 Te bepalen $\int \frac{x^3+x-4}{(x+1)^2(x^2+2)}\,dx$.

Oplossing. We stellen $\frac{x^3+x-4}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+2}$.

Dat komt neer op $x^3+x-4 = a(x^2+2) + b(x+1)(x^2+2) + (cx+d)((x+1)^2)$. $x=-1$ invullen geeft $a=-2$. Daaruit $x^3+x-4+2(x^2+2) = b(x+1)(x^2+2) + (cx+d)((x+1)^2)$, i.e. $x(x+1)^2 = b(x+1)(x^2+2) + (cx+d)((x+1)^2)$. Weer $x=-1$ invullen geeft $b=0$. Daaruit $x = cx+d$, waaruit $c=1,\ d=0$.

Dus $\int \frac{x^3+x-4}{(x+1)^2(x^2+2)}\,dx = \int (\frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{x}{x^2+2})\,dx = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$.

6 Primitiveren van rationale functies in sin en cos

We zullen hier wat beknopter uiteenzetten dan voorheen.

Bekijken we eerst het geval van $\int \sin^m x\ \cos^n x\ dx$ met gehele m en n. Als m of n even is, kunnen we de integrand herschrijven tot een rationale functie: als m dat is, dan geldt, met $y=\cos x$, $\int \sin^m x\ \cos^n x\ dx = \int (\sin^2 x)^{(m-1)/2}\ \cos^n x \sin x\ dx = \int -(1-y^2)^{(m-1)/2} y^n dy$. En als n het is, levert $y=\sin x$ het gewenste. Als m en n beide even zijn, dan leidt bovenstaande methode tot wortels in de integrand en is daarom meestal niet bruikbaar. Wel tot een resultaat voert nu de substitutie $x=\arctan y$. Wegens de formules $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ en $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ vinden we $\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x\ dx = \int \frac{y^{2k}}{(1+y^2)^{k+l+1}}$.[12] Maar soms kan het makkelijker:

Voorbeeld 11 $\int \sin^2 x\ dx = \int \frac{(1-\cos 2x)}{2}\ dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\ dx + C$.

En volgens bovenstaande methode, met behulp van Voorbeeld 4:

$\int \sin^2 x\ dx = \int \frac{y^2}{(1+y^2)^2}\ dy = \int (\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{(1+y^2)^2})\ dy = \arctan y - \frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1} - \frac{1}{2}\arctan y + C = \frac{1}{2}\arctan(\tan x) - \frac{1}{2}\frac{\tan x}{\tan^2 x+1} + C = \frac{1}{2}x - f12 \sin x\cos x + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$ (en controleren van deze oplossing leert dat hij voldoet).

[12] We moeten hier oppassen: de te primitiveren functie heeft domein $(-\infty,\infty)$. De substitutiefunctie $x=\arctan y$ heeft als bereik echter $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Dus de gevonden primitieve is in orde op dat interval. Zie ook Opgave 4.

Rationele functies in sin en cos die in feite rationale functies zijn in $\sin^2$ en $\cos^2$, zoals $\frac{3\sin^4 x+\cos^2 x+7}{\cos^4 x-2}$, kunnen met bovengenoemde substitutie $x = \arctan y$ altijd in een rationale functie in y worden overgevoerd en zijn daardoor in principe (maar meestal wel ten koste van veel rekenwerk) te primitiveren.

Nog meer rekenwerk vergen willekeurige rationale functies in cos en sin. Ook deze kunnen door een geschikte substitutie, namelijk $x = 2\arctan y$, in gewone rationale functies worden overgevoerd. Bedenk immers dat $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ en $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$.

De substitutie $x = \arctan y$ werkt ook wel eens voor totaal andere gevallen:

Voorbeeld 12 Te bepalen $\int \sqrt{x^2+1}\, dx$.

Oplossing (met behulp van de substitutiemethode en breuksplitsen). Denkend aan de formule $1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, substitueren we $x = \tan t$. Dan $dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt$ en daarmee $\int \sqrt{x^2+1}\, dx = \int \frac{1}{\cos^3 t}\, dt = \int \frac{dt}{(1-\sin^2 t)\cos t}$. Substitueren we nu $z = \sin t$, dan is $dz = \cos t\; dt$ en krijgen we $\int \frac{1}{(1-z^2)^2}\, dz$.

Omdat $\frac{1}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}\frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1/4}{(1-z)^2} + \frac{1/4}{1-z} + \frac{1/4}{(1+z)^2} + \frac{1/4}{1+z}$, vinden we na een korte berekening $\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{4}(\frac{2z}{1-z^2} + |\ln\frac{1+z}{1-z}|)$. Hierin moet nog $z = \sin t = \sin(\arctan x)$ gesubstitueerd worden. Met $\sin t = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$ is $z = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Na wat rekenwerk vinden we $\frac{2z}{1-z^2} = 2x\sqrt{1+x^2}$ en $\frac{1+z}{1-z} = (x+\sqrt{1+x^2})^2$. Daaruit tenslotte $\int \sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$. (Oef!)

Voorbeeld 13 Te bepalen $\int \sqrt{x^2-1}\, dx$.

Oplossing. Dat gaat analoog aan Voorbeeld 12. Men vindt
$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$.

7 Opgaven

Opgave 1 *Bepaal de volgende primitieven (waar $b \neq 0$ en $a, c > 0$ is):*

a. $\int (bx+r)^p\, dx$ *(waar $p \neq -1$).*

b. $\int \frac{1}{bx+d}\, dx$.

c. $\int e^{ax}\, dx$.

d. $\int a^x\, dx$.

e. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$.

f. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx$.

g. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-c^2x^2}}\, dx$.

h. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx$.

i. $\int \frac{1}{a^2+c^2x^2}\, dx$.

j. $\int \frac{1}{x^2-a^2}\, dx$.

k. $\int \sin(bx)\, dx$.

l. $\int \cos(bx)\, dx$.

m. $\int \tan(bx)\, dx$.

n. $\int \cot(bx)\, dx$.

o. $\int \sinh(bx)\, dx$.

p. $\int \cosh(bx)\, dx$.

q. $\int \frac{1}{\sin(bx)}\, dx$.

r. $\int \frac{1}{\cos(bx)}\, dx$

s. $\int \frac{1}{\cos^2(bx)}\, dx$.

t. $\int \frac{1}{\sin^2(bx)}\, dx$.

u. $\int \frac{1}{\cosh^2(bx)}\, dx$.

v. $\int \frac{1}{\sinh^2(bx)}\, dx$.

Opgave 2 *Bepaal de volgende primitieven met behulp van de Regel der partiële integratie:*

a. $\int x^n \ln x\, dx$.

b. $\int x^2 e^x\, dx$.

c. $\int x \sinh x\, dx$.

d. $\int x^2 \cos(ax)\, dx$ *(waar* $a \neq 0$ *is).*

e. $\int e^{ax} \cos(bx)\, dx$ *(waar* $a^2 + b^2 \neq 0$ *is).*

Bepaal de volgende primitieven met behulp van de substitutiemethode:

f. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

g. $\int x e^{x^2}\, dx$.

h. $\int \sqrt{2x-3}\, dx$.

i. $\int \sin x \cos^6 x\, dx$.

Bepaal de volgende primitieven met behulp van breuksplitsen:

j. $\int \frac{4}{(x-1)^2(x+1)}\, dx$

k. $\int \frac{1}{2x^2-4x+2}\, dx$.

l. $\int \frac{7x^4-5x^3+5x^2+12x-13}{(x-3)(x^2+1)^2}$.

m. $\int \frac{x^3+1}{x^2+1}\, dx$.

Opgave 3 *Bepaal een recurrente betrekking voor* $F_n := \int x^n e^x\, dx$ *en los deze expliciet op.*

Opgave 4 *Bepaal de volgende primitieven:*

a. $\int \sin^2 x\, dx$.

b. $\int \frac{1}{2x^2+x+1}\, dx$.

c. $\int \frac{x}{1+5x^2}\, dx$.

d. $\int \frac{1}{1+5x^2}\, dx$.

e. $\int \frac{x+1}{2x^2+2x+3}\, dx$.

f. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+8}}\, dx.$

g. $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+6x+8}}\, dx.$

h. $\int \frac{4x+3}{x^2+2x+2}\, dx.$

i. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}.$

j. $\int \cos(\ln x)\, dx.$

k. $\int \frac{1}{x\ln x}\, dx.$

l. $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\, dx.$

m. $\int \ln(a^2+x^2)\ (a \neq 0).$

n. $\int \sqrt{4-\sqrt{x}}\, dx.$

o. $\int \frac{x^{1/3}}{1-x}\, dx.$

8 Oplossingen

Oplossing 1 a. $\frac{1}{b(p+1)}(bx+r)^{p+1}+C$.
b. $\frac{1}{b}\ln|bx+d|+C$.
c. $\frac{1}{a}e^{ax}+C$.
d. $\frac{1}{\ln a}a^x+C$.
e. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$.
f. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\left\{\begin{array}{l}\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}\\ \operatorname{arccosh}\frac{x}{a}\end{array}\right.+C$.
g. $\frac{1}{c}\arcsin(\frac{c}{a}x)+C$.
h. $\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}+C$.
i. $\frac{1}{ac}\arctan(\frac{c}{a}x)+C$.
j. $\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$.
k. $\frac{1}{b}\cos(bx)+C$.
l. $\frac{1}{b}\sin(bx)+C$.
m. $-\frac{1}{b}\ln|\cos(bx)|+C$.
n. $\frac{1}{b}\ln|\sin(bx)|+C$.
o. $\frac{1}{b}\cosh(bx)+C$.
p. $\frac{1}{b}\sinh(bx)+C$.
q. $\frac{1}{b}\ln|\tan(\frac{bx}{2})|+C$.
r. $\frac{1}{b}\ln|\tan(\frac{bx}{2}+\frac{\pi}{4})+C$.
s. $\frac{1}{b}\tan(bx)+C$.
t. $-\frac{1}{b}\cot(bx)+C$.
u. $\frac{1}{b}\tanh(bx)+C$.
v. $-\frac{1}{b}\coth(bx)+C$.

Oplossing 2 a. $\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C$.
b. $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$.
c. $x\cosh x-\sinh x+C$.
d. $\frac{x^2}{a}\sin ax+\frac{2x}{a^2}\cos ax-\frac{2}{a^3}\sin ax+C$.
e. $\frac{ae^{ax}\cos bx+be^{ax}\sin bx}{a^2+b^2}+C$.
f. $-\sqrt{1-x^2}+C$.
g. $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$.
h. $\frac{1}{3}(2x-3)^{3/2}+C$.
i. $-\frac{1}{7}\cos^7 x+C$.
j. $\frac{2}{1-x}+\ln|\frac{x+1}{x-1}|+C$.
k. $-\frac{1}{2}(x-1)^{-1}+C$.
l. $\frac{7x^4-5x^3+5x^2+12x-13}{(x-3)(x^2+1)^2}=\frac{5}{x-3}+\frac{2x+1}{x^2+1}+\frac{-4x+5}{(x^2+1)^2}=\frac{5}{x-3}+\frac{2x+1}{x^2+1}-2\frac{2x}{(x^2+1)^2}+\frac{5}{(x^2+1)^2}$.
Daaruit halen we
$5\ln|x-3|+\ln x^2+1-2(x^2+1)^{-1}+5(\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x)+C$.
m. $\frac{1}{2}x^2+\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

Oplossing 3 $F_n=x^ne^x-\int nx^{n-1}e^x\,dx=x^ne^x-nP_{n-1}$. Uit $P_0=e^x$ volgt uit die betrekking dat $P_1=(x-1)e^x,\ P_2=(x^2-2x+2)e^x$ en zo doorgaand zien we dat $P_n=(x^n-nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}-\cdots+(-1)^nn$

Oplossing 4 a. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$.
b. $=\int\frac{dx}{2(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2})}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}}=\frac{8}{7}\int\frac{dx}{(\frac{4}{\sqrt{7}})^2(x+\frac{1}{4})^2+1}\,dx=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{4}{\sqrt{7}(x+\frac{1}{4})})+C$.
c. $\frac{1}{10}\ln(1+5x^2)+C$.
d. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan(\sqrt{5}x)+C$.
e. $=\int\frac{x+\frac{1}{2}}{2x^2+2x+3}+\int\frac{\frac{1}{2}}{2x^2+2x+3}\,dx=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+3)+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}}=\cdots=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+3)+\frac{1}{2\sqrt{5}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{5}}(x+\frac{1}{2})+C$.
f. $=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-1}}=\operatorname{arccosh}(x+3)+C$.
g. Met f hierboven vinden we $=\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+8}}\,dx+\int\frac{2}{\sqrt{x^2+6x+8}}\,dx=\sqrt{x^2+6x+8}+2\operatorname{arccosh}(x+3)+C$.

h. $\int \frac{4x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{4x+3}{(x+1)^2+1}\,dx$. De substitutie $u = x+1$ leidt uiteindelijk tot het resultaat $2\ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + C$.

i. Door de substitutie $x = \arctan y$ vindt men $\frac{1}{2}\arctan(2\tan x) + C$.[13]

j. $\frac{1}{2}x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$.

k. $\ln(\ln x) + C$.

l . $-\frac{1}{x}\ln(1+x^2) - 2\arctan x + C$.

m. $x\ln(a^2+x^2) - 2x + 2a\arctan\frac{x}{a} + C$.

n. $-\frac{16}{3}(4-\sqrt{x})\sqrt{4-\sqrt{x}} + \frac{4}{5}(4-\sqrt{x})^2\sqrt{4-\sqrt{x}} + C$.

o. $-3\sqrt[3]{x} - \ln|1-\sqrt[3]{x}| + \frac{1}{2}\ln|\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1| + \sqrt{3}\arctan(\frac{\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}) + C$.

[13]We moeten hier, zoals we ook al eerder vermeldden, oppassen: de te primitiveren functie $\frac{1}{1+3\sin^2 x}$ heeft domein $(-\infty,\infty)$. De substitutiefunctie $x = \arctan y$ heeft als bereik echter $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Dus de gevonden primitieve is in orde op dat interval, maar is niet een primitieve zoals gezocht. Interessant verder is het volgende (details laten we aan de lezer over): het is nu eenvoudig te controleren dat de gevonden primitieve ook op de intervallen $((-\frac{1}{2}+k)\pi, (\frac{1}{2}+k)\pi)$ een primitieve is. Als we nu ook de natuurlijke $-\infty, \infty$ waarden voor de tangensfunctie in de punten $(\frac{1}{2}+k)\pi$ toelaten en de arctangensfunctie ook in $-\infty,\infty$ definiëren, dan is de gevonden primitieve zelfs op de hele $\mathbb{R}$ geldig. Maar in de punten $(\frac{1}{2}+k)\pi$ is deze niet continu: de "sprong" van $\frac{1}{2}\arctan(2\tan x)$ in zo'n punt is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$. Om dit te verhelpen kiezen we constanten c_k zodat de functie f gedefinieerd door $f(x) = \frac{1}{2}\arctan(2\tan x) + c_k$ voor $x \in ((-\frac{1}{2}+k)\pi, (\frac{1}{2}+k)\pi)$ in de punten $(\frac{1}{2}+k)\pi$ continu wordt: $c_k = \frac{k\pi}{2}$ voldoet. Nu is f niet alleen continu, maar zelfs differentieerbaar en daarmee een primitieve zoals gezocht.