Hertentamen Introductiecursus Wiskunde 19 januari 2007

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Boek, aantekeningen en eenvoudige rekenmachines mogen gebruikt worden.
- *SUCCES!*

1. Gegeven de differentiaalvergelijking

$$\dot{y} \quad = \quad t e^y \sin(t^2 + 1) \ ,$$

bepaal de oplossingen $y(t)$ met $y(0) = 1$ en met $y(\sqrt{\pi - 1}) = 0$.

2. Vind voor de lineaire differentiaalvergelijking

$$\dot{y} \quad = \quad y \sin(t) \cosh(t)$$

de oplossing $y(t)$ met $y(0) = 0$ en de oplossing $y(t)$ met $y(0) = 1$.

3. Vind de algemene oplossing voor het systeem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= 5y_1 + 4y_2 \end{aligned}$$

van differentiaalvergelijkingen.

4. Gegeven het systeem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1^2 - 4y_2 \\ \dot{y}_2 &= 4y_1 - y_1 y_2 \end{aligned}$$

van differentiaalvergelijkingen. Bepaal de evenwichtspunten en hun (stabiliteits)type.

5. Zij $V := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\}$ de vectorruimte van alle polynomen van graad $\deg(f) \leq 3$.

   (a) Laat zien dat $U := \{f \in V \mid f(1) = 0 = f(-1)\}$ een deelruimte van V is.

   (b) Controleer of de twee door $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ en $h(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ gedefinieerde elementen $g, h \in V$ lineair onafhankelijk zijn.

   (c) Ga na dat U door g en h wordt voortgebracht.

   (d) Concludeer dat $\dim U = 2$ is.