Proeftentamen

Je mag de volgende schattingen gebruiken: Stel $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\, \mathrm{d}\xi$.
Dan $F(0.5) = 0.69, F(1) = 0.84, F(1.5) = 0.93, F(2) = 0.97, F(2.5) = 0.993$, $F(3) = 0.998$.

1. We gooien n keer met een zuivere dobbelsteen. Noem de uitkomst van de i-de worp X_i.

   a. Laat zien dat $\mathrm{var}(X_i) = 2\frac{11}{12}$.

   b. Schat m.b.v. de centrale limietstelling de kans dat na 100 keer gooien de som van alle uitkomsten groter is dan 400. (Het mag best een grove schatting zijn als je de stappen in je redenering maar duidelijk aangeeft.)

2. De discrete stochastische variabele X_n neemt waarden aan tussen -1 en 1, namelijk breuken $k/2n$ met k een oneven getal. De kans op elk van deze breuken is even groot. Bijvoorbeeld: voor $n = 3$ neemt X_3 de breuken $-5/6, -3/6, -1/6, 1/6, 3/6, 5/6$ aan, elk met kans $\frac{1}{6}$.

   a. Teken de grafiek van de verdelingsfunctie van X_5.

   b. Geef een continue stochastische variabele X met $X_n \Rightarrow X$ als $n \to \infty$. (Je hoeft hier alleen een correcte en complete definitie van X te geven.)

   c. Laat zien dat $X_n \Rightarrow X$ voor de door jou gevonden X.

3. De stochastische vector (X, Y) heeft simultane kansdichtheid $f(x, y)$ gegeven door $f(x, y) = c(x + y)$ voor $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$, $f(x, y) = 0$ elders.

   a. Laat zien dat $c = 3$.

   b. Bepaal de marginale kansdichtheid van X en van Y.

   c. Stel $Z = X + Y$ en $W = X - Y$. Bepaal de simultane kansdichtheid van (Z, W).

   d. Zijn Z en W onafhankelijk? Waarom wel of waarom niet?

(z.o.z.)

4. De stochastische vector (X, Y) heeft simultane kansdichtheid $f(x, y) = ye^{(-y-xy)}$ voor $x, y > 0$ en $f(x, y) = 0$ elders.

   a. Bereken $f_{Y|X}(y|x)$ en $f_{X|Y}(x|y)$.

   b. Bereken $E(Y|X = x)$.

5. Stel X is een continue stochastische grootheid waarvan de dichtheid f vodoet aan $f(x) = 0 \ \forall_{x>0}$. De verdelingsfunctie noteren we met F. Bewijs dat
$$E(X) \quad = \quad -\int_{-\infty}^{0} F(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

6. George en Vladimir spelen 15 keer een kaartspelletje. De achtereenvolgende spelletjes zijn onafhankelijk, en de kans op winst of verlies is elke keer 1/2. Wie wint krijgt 1 punt, wie verliest 0 punten. George wint de eerste keer.

   a. Wat is de kans dat hij alle 14 keer daarna voor blijft staan op Vladimir?

   b. Geef ook een schatting van die kans met de formule van Stirling
   $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.