Tentamen Kansrekening 5 juli 2005

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Tammo Jan Dijkema of Yaroslav Kondratyuk).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Boek en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt. Je mag de volgende schattingen gebruiken:
  Stel $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \, \mathrm{d}\xi$.
  Dan $F(0.5) = 0.69, F(1) = 0.84, F(1.5) = 0.93, F(2) = 0.97, F(2.5) = 0.99$.
- *SUCCES!*

1. In een kansspel op televisie mogen elke dag 6 uit 12 (gesloten) enveloppen door een gelukkige beller worden gekozen. De helft van de 12 enveloppen zijn leeg, de andere 6 bevatten elk 100 euro.

   (*i*) Bereken de kans om precies 300 euro te winnen.

   (*ii*) Gegeven dat de eerste 5 geopende enveloppen niet leeg zijn, hoe groot is de kans dat de laatste envelop eveneens 100 euro bevat?

   Wie het maximum van 600 euro uit de enveloppen halt kraakt de 'jackpot'. Dan wordt met 2 dobbelstenen geworpen en krijgt de speler bovenop nog 10.000 euro keer het aantal geworpen ogen.

   (*iii*) Wat is de kans voor een beller om minstens 100.000 euro te winnen?

   Wie de 6 lege enveloppen gekozen heeft krijgt een 'troostprijs' van 10.000 euro. Definieer $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ als de (totale) winst van de speler.

   (*iv*) Laat zien dat de verwachtingswaarde $E(X) = \mu$ gelijk is aan $\mu = \frac{357200}{924} \approx 385$.

   Voor de variantie $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$ geldt $\sigma = \frac{100}{231}\sqrt{29086559} \approx 2335$.

   (*v*) Geef een ruwe schatting van de kans dat de televisieomroep binnen een jaar meer dan 300.000 euro aan prijzen moet uitkeren. (Neem aan dat 365 groot genoeg is om de centrale limietstelling toe te mogen passen.)

2. We hebben een aap getraind om een toetsenbord van een computer te bedienen, lezen of begrijpen wat hij schrijft kan de aap echter (nog) niet. Voor het gemak nemen we aan dat elke letter van het alfabet en de leestekens punt, komma, dubbele punt, vraagteken, uitroepteken en (spatie) met even grote kans wordt geraakt, cijfers en andere leestekens zoals de puntkomma laten we buiten beschouwing.

(z.o.z.)

(i) Stel een model op. Hoe groot is de kans dat een van de letters van het woord 'kans' wordt getypt?

(ii) Met welke kans duikt het hele woord 'kans' binnen een rij van 10 letters op?

We laten de aap oneindig lang doortypen.

(iii) Bereken de kans dat binnen deze oneindige rij een van de letters van het woord 'kans' wordt getypt. Geef precies aan hoe je redeneert.

(iv) Wat is de kans dat de aap de complete Van Dale (zonder spelfouten!) binnen zijn geschriften heeft?

3. Definieer een continue kansmaat op $\Omega = \mathbb{R}^2$ d.m.v. de kansdichtheid

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_W(x,y)$$

waar

$$W \quad = \quad \left\{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \ \right\}$$

('darts op een circelschijf'). Definieer tevens de toevalsvariabelen

$$\begin{array}{rccc} X : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x \end{array} \qquad \text{en} \qquad \begin{array}{rccc} Y : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & y \end{array}$$

(i) Laat zien dat $(X,Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ een continue toevalsvector is.

(ii) Bereken de marginale kansdichtheden f_X en f_Y.

(iii) Bewijs dat X en Y niet onafhankelijk zijn.

(iv) Bereken de covariantie $\mathrm{cov}(X,Y)$.

4. We staan aan een drukke snelweg die we willen oversteken, hiervoor hebben we tijd τ nodig. De langsrijdende auto's vormen een Poisson–proces met intensiteit λ, en we hebben voldoende overzicht om te zien als er binnen tijd τ een auto langs zal komen en we dus (nog) niet kunnen oversteken.

(i) Wat is de kans p dat we meteen kunnen oversteken?

(ii) Bereken de kans dat we precies een auto voorbij moeten laten rijden voordat we kunnen oversteken. Hoe groot is in dit geval de verwachtingswaarde μ_1 van de tijd tot we de snelweg hebben overgestoken?

(iii) Laat zien dat $(1-p)^n p$ de kans is om pas na n auto's over te kunnen steken (met p uit onderdeel (i)).

(iv) Wat is in geval (iii) de verwachte tijd μ_n? Geef precies aan hoe je redeneert.

(v) Bereken de gemiddelde tijd die nodig is om de snelweg (veilig) over te steken.