Rheinisch–Westfälische Technische Hochschule
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Störungstheorie dynamischer Systeme

Heinz Hanßmann

4. Übungsblatt Aachen, den 8.5.2014

Sommersemester 2014

7. Zeige $(\mathcal{L}_X Y)(x_0) = [X, Y](x_0)$ in einem Gleichgewichtspunkt x_0 des Vektorfeldes X.

8. Wir nennen einen Fluß

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ & & (t, x, y) & \mapsto & \varphi_t(x, y) \end{array}$$

reversibel bzgl. der Spiegelung

$$\begin{array}{rcccc} \rho & : & \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ & & (x, y) & \mapsto & (x, -y) \end{array}$$

wenn $\varphi_{-t}(x, -y) = \rho(\varphi_t(x, y))$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$.

(i) Kontrolliere, daß das System

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -x \end{array}$$

von Differentialgleichungen auf $\mathbb{R}^2$ einen reversiblen Fluß hat.

(ii) Sei $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = \varphi_t(\alpha(0))$ Lösung eines reversiblen Systems mit Bahn $\operatorname{im}\alpha$, welche

$$\operatorname{Fix}\rho \;=\; \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; y = 0 \right\}$$

nicht schneidet. Zeige, daß $\rho(\operatorname{im}\alpha)$ ebenfalls eine Bahn ist. In welche Richtung wird diese durchlaufen, etwa wenn α (unter Zeitänderung) sich $\operatorname{Fix}\rho$ nähert ? *Hinweis:* nehme $n = 1$ und skizziere $\operatorname{Fix}\rho$, $\operatorname{im}\alpha$, $\rho(\operatorname{im}\alpha)$ sowie die Zeitrichtung.

(iii) Sei $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ eine Lösung, welche $\operatorname{Fix}\rho$ schneidet. In welche Lösung wird α transformiert, wenn wir mit ρ spiegeln und die Zeit umkehren ?

(iv) Erläutere, warum jede Bahn, welche $\operatorname{Fix}\rho$ zwei Mal schneidet, eine periodische Bahn ist.