Hertentamen Wiskunde voor a.i. 20 maart 2006

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Rinke Colen, Anske van Luijtelaar, Bouke van der Spoel of Wilco Moerman).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Ter herinnering: met de kettingregel kun je de afgeleide van een samengestelde functie $h(x) = f(g(x))$ berekenen, deze luidt

$$h'(x) \quad = \quad f'(g(x)) \cdot g'(x) \; .$$

- Boek en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

1. Definieer op $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ een relatie "m deelt n" d.m.v.

$$m \mid n \quad :\Leftrightarrow \quad \text{er is een } k \in \mathbb{N}_+ \text{ met } n = k \cdot m$$

   (i) Laat zien dat deze relatie een (partiële) ordening is.

   (ii) Bewijs d.m.v. een tegenvoorbeeld dat de ordening niet boom-achtig (tree-like) is.

   (iii) Geef alle minimale elementen in $\mathbb{N}_+$ t.o.v. de ordening aan. Hoeveel minimale elementen heeft de deelverzameling $\mathbb{N}_{++} := \mathbb{N}_+ \backslash \{1\}$?

2. Voor het samenstellen van een functie f met zichzelf definieert men recursief $f^0(x) := x$ en $f^n(x) := f(f^{n-1}(x))$.

   (i) Ga voor $f(x) := 1 + x^2$ (dus $f^1(x) = 1 + x^2$) na dat dit de samengestelde functies $f^2(x) = 2 + 2x^2 + x^4$ en $f^3(x) = 5 + 8x^2 + 8x^4 + 4x^6 + x^8$ oplevert en controleer

$$(f^3)'(x) \quad = \quad f'(f^2(x)) \cdot f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

   door de uitdrukkingen aan beide kanten expliciet te berekenen.

   (ii) Bewijs dat voor alle $n \geq 1$ voor de afgeleide van f^n de formule

$$(f^n)'(x) \quad = \quad \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x))$$

   geldt.

3. Definieer een stochast X als volgt. Gooi tegelijk een (eerlijke) munt en een (eerlijke) dobbelsteen. Indien de waarde van de dobbelsteen $d = 6$ is stellen we de waarde van X gelijk aan nul. Indien de waarde van de dobbelsteen $d \neq 6$ is bekijken we de uitkomst van de muntworp en stellen de waarde van X gelijk aan d als kop boven ligt en gelijk aan $-d$ als munt boven ligt.

   (i) Stel een model op.

   (ii) Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

   (iii) Zijn de gebeurtenissen $A = \{\text{de waarde van } X \text{ is niet negatief}\}$ en $B = \{\text{de waarde van } X \text{ is 5 of } -5\}$ onafhankelijk?

   (iv) Wij herhalen dit experiment 3 keer. Wat is de kans dat minstens twee keer achter elkaar de uitkomst 0 is?

4. Op $\mathbb{R}$ definiëren we de functie

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{als } x \geq 1 \\ 0 & \text{als } x < 1 \end{cases} .$$

   (i) Ga na dat f een kansdichtheid op $\mathbb{R}$ is.

   Beschouw op de uitkomstenruimte $\mathbb{R}$ de stochast $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ met $X(x) = x$.

   (ii) Kun je de verwachtingswaarde $E(X)$ berekenen? Zo ja, doe dat dan, zo nee geef aan waarom niet.

   Definieer voor gebeurtenissen $A \subseteq \mathbb{R}$ de voorwaardelijke kans

$$P(A|B) \quad = \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

   waar $B = [-b, b]$ met $b > 1$. Dit definieert voor vaste b een kansmaat op $\mathbb{R}$.

   (iii) Bepaal de bijbehorende kansdichtheid en verdelingsfunctie.

   Ook voor deze verdeling beschouwen we de stochast $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ met $X(x) = x$.

   (iv) Kun je hiervoor de verwachtingswaarde $E(X)$ berekenen? Wat gebeurt als $b \to \infty$?