WAT IS WISKUNDE (English version on the other side)
Maandag 5 november 2012, 13.30 – 16.30 uur

- Gebruik voor iedere opgave een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Alle opgaven tellen even zwaar, 10 punten per opgave.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen. Je mag wel gebruik maken van een aantal basisprincipes, zoals de driehoeksongelijkheid. Het is niet toegestaan computers, rekenmachines, dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.

SUCCES!

1. (**nieuw vel papier**) Deze vraag bestaat uit twee losse onderdelen waartussen geen verband is.

   (a) (5 punten) Geef de waarheidstabel van de volgende bewering:

   $(P \Leftrightarrow (P \wedge R)) \vee ((P \vee Q) \wedge \sim(R \Leftrightarrow \sim Q))$.

   (b) (5 punten) Laat $x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs de ongelijkheid $|x| - |y| \leq |x - y|$.

2. (**nieuw vel papier**) Geef een collectie verzamelingen $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ met de volgende drie eigenschappen: (1) $A_i \neq A_j$ als $i \neq j$; (2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Z}$; (3) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$. Bewijs ieder van deze beweringen voor de door jouw gekozen collectie.

3. (**nieuw vel papier**) Bewijs met volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal n geldt:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$

4. (**nieuw vel papier**) (a) (4 punten) Bewijs dat

$$R = \{((w, x), (y, z)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \max(|w|, |x|) = \max(|y|, |z|)\}$$

   een equivalentierelatie is op $\mathbb{R}^2$. N.B. max staat voor het maximum,

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{als} \quad a \geq b, \\ b & \text{als} \quad b > a. \end{cases}$$

   (b) (2 punten) Teken in het vlak $\mathbb{R}^2$ de equivalentieklasse van $(2, 0)$.

   (c) (4 punten) Beschrijf alle verschillende equivalentieklassen van R.

5. (**nieuw vel papier**) Bewijs dat de functie $f : \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ gedefinieerd door $f(x) = \frac{2x}{x-4}$ bijectief is.

6. (**nieuw vel papier**) Toon m.b.v. de ϵ-δ definitie aan dat de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = 3x^2 + 6x + (x+1)^2 x^2$ continu is in $x = -1$. (N.B. Je mag hier geen rekenregels voor limieten gebruiken.)

WAT IS WISKUNDE (Nederlandse versie zie ommezijde)
Monday November 5, 2012, 13.30 – 16.30 uur

- Write the solution to each problem on a separate sheet of paper. On each (separate) sheet you should write your name and student number.
- The marks or grade points are equally distributed among the exercises. 10 points for each exercise.
- Do not just state the answers, but prove all your claims. You may refer to the usual basic principles, like e.g. the triangular inequality. It is not permitted to use computers, calculators, books or (lecture) notes.

GOOD LUCK!

1. (**new sheet of paper**) There is no relation between the two parts (a) and (b) of this exercise.

   (a) (5 points) Give a truth table for the following statement:

   $(P \Leftrightarrow (P \wedge R)) \vee ((P \vee Q) \wedge \sim (R \Leftrightarrow \sim Q))$.

   (b) (5 points) Let $x, y \in \mathbb{R}$. Prove the inequality $|x| - |y| \leq |x - y|$.

2. (**new sheet of paper**) Find an indexed collection of sets $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ that satisfies the following 3 properties: (1) $A_i \neq A_j$ if $i \neq j$; (2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Z}$; (3) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$. Proof each of these statements for your collection.

3. (**new sheet of paper**) Prove using the principle of mathematical induction that for every $n \in \mathbb{N}$,
$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$

4. (**new sheet of paper**) (a) (4 points) Prove that the relation
$$R = \{((w,x),(y,z)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \max(|w|,|x|) = \max(|y|,|z|)\}$$
   on $\mathbb{R}^2$ is an equivalence relation. N.B. max means the maximum,
$$\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{if} \quad a \geq b, \\ b & \text{if} \quad b > a. \end{cases}$$

   (b) (2 points) Draw in the plane $\mathbb{R}^2$ the equivalence class of $(2,0)$.

   (c) (4 points) Describe all distinct equivalence classes of R.

5. (**new sheet of paper**) Prove that the function $f : \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ defined by $f(x) = \frac{2x}{x-4}$ is bijective.

6. (**new sheet of paper**) Give an ϵ-δ proof that the function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $g(x) = 3x^2 + 6x + (x+1)^2x^2$ is continuous in $x = -1$. (N.B. You are not allowed to use fundamental properties of limits.)