Keuze-Axioma
en filosofische vragen over de Wiskunde

Jaap van Oosten

Department of Mathematics, Utrecht University

Caleidsocoop 1, 3 april 2012

In de wiskunde bewijzen we stellingen (uitspraken).
In het bewijs van een stelling gebruiken we andere stellingen, die al eerder bewezen zijn.
Die andere stellingen hebben dus ook een bewijs, uit wéér andere stellingen...
Houdt dit ergens op?

Ja: de wiskunde gaat uit van *axioma's*. Dat zijn uitspraken die zonder bewijs geaccepteerd worden.
(Gr.) $\alpha\xi\iota\omega\mu\alpha$: eis van een aanklager
Voorbeelden van zulke axioma's:

Als X en Y verzamelingen zijn en X en Y hebben dezelfde elementen, dan geldt $X = Y$

Als X een verzameling is, dan is er een verzameling $\mathcal{P}(X)$ (de *machtsverzameling* van X), waarvan de elementen precies de deelverzamelingen van X zijn.

In de 19e eeuw liet Cantor zien dat de hele wiskunde opgebouwd kan worden uit verzamelingen.
De axioma's van de wiskunde zijn dus axioma's over verzamelingen. Deze werden opgeschreven door Zermelo in 1908.
Er was één 'vreemd' axioma bij: het *Keuze-axioma* (Auswahlaxiom, Axiom of Choice)

Het Keuze-axioma zegt: als $f : X \to Y$ een surjectieve functie is (dus voor elke $y \in Y$ is er een $x \in X$ zodat $f(x) = y$), dan is er een functie $g : Y \to X$ zodat $f(g(y)) = y$ vor alle $y \in Y$.
Zo'n functie g 'kiest' dus voor elke y een x (nl. $g(y)$) waarvoor $f(x) = y$.
Een equivalente formulering is de volgende: als R een equivalentierelatie is op een verzameling X, dan is er een functie $p : X \to X$ zodat: 1. als xRy dan is $p(x) = p(y)$ en 2. altijd geldt $xRp(x)$
De functie p 'kiest' dus uit elke equivalentieklasse $[x]$ een element (nl. $p(x)$).

Belangrijke stellingen die je kunt bewijzen met behulp van het Keuze-axioma:

1) Als X en Y verzamelingen zijn, dan is er òf een injectieve functie $X \to Y$, òf er is een injectieve functie $Y \to X$. Je kunt verzamelingen rangschikken naar grootte.
2) De vereniging van aftelbaar veel aftelbare verzamelingen is aftelbaar.
3) Als $A \subset [0, 1]$ een oneindige verzameling is dan bevat A een convergent rijtje $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zodat $x_n \neq \lim_{n\to\infty} x_n$ (Bolzano-Weierstraß)

Maar...het Keuze-axioma heeft ook ‘rare’ gevolgen:
Een volle eenheidsbol kan in eindig veel stukken worden verdeeld, en die stukken vervolgens weer zó aan elkaar gelijmd, dat je een volle bol met straat 2 krijgt.
Dit heet de *Banach-Tarski paradox*
We gaan nu een ander raar gevolg bespreken.

Een oneindige rij smurfen (genummerd $s_1, s_2, \ldots$) staat zó opgesteld dat iedere smurf alleen die smurfen kan zien die een hoger rangnummer hebben dan hijzelf.
Ieder van de smurfen heeft een witte of een blauwe muts op, maar weet niet, welke kleur hij heeft.
Elke smurf weet, wat zijn eigen rangnummer is.
Elke smurf (met rangnummer k) 'ziet' een functie:
$\{k+1, k+2, \ldots\} \to \{W, B\}$

De bedoeling is natuurlijk, dat elke smurf de kleur van zijn eigen muts raadt.
Kunnen ze dit zó doen, dat maar ‘weinig’ smurfen fout raden?
Uit het Keuze-axioma volgt, dat ze het zó kunnen aanleggen, dat maar *eindig veel* smurfen fout raden!

Laat X de verzameling van alle functies $\mathbb{N} \to \{W, B\}$ zijn.
We definiëren een equivalentierelatie R op X:
R bestat uit die paren (f, g) van functies $\mathbb{N} \to \{W, B\}$, waarvoor f en g maar in eindig veel natuurlijke getallen een verschillende waarde hebben.
Ga na: R is reflexief, symmetrisch en transitief.
Volgens het Keuze-axioma is er een functie $p : X \to X$ zodat geldt: als fRg dan $p(f) = p(g)$, en altijd geldt $fRp(f)$.
De smurfen hebben zo'n functie p afgesproken, en hebben die in hun hoofd.

Laat g de volgende functie zijn:

$$g(k) = \begin{cases} W & \text{als smurf } s_k \text{ een witte muts opheeft} \\ B & \text{als smurf } s_k \text{ een blauwe muts opheeft} \end{cases}$$

Elke smurf s_k ziet het rijtje $g(k+1), g(k+2), \ldots$. Hij maakt nu een functie $h_k : \mathbb{N} \to \{W, B\}$ door te definiëren:

$$h_k(n) = \begin{cases} W & \text{als } n \leq k \\ g(n) & \text{als } n > k \end{cases}$$

Merk op, dat $h_k R g$. Er volgt, dat $p(h_k) = p(g)$. Bovendien is $p(g)$ een functie $\mathbb{N} \to \{W, B\}$ die maar in eindig veel natuurlijke getallen van g verschilt.
Elke smurf s_k raadt $p(h_k)(k) = p(g)(k)$. Dan raadt hij fout, als $p(g)(k) \neq g(k)$. Maar dat is maar voor eindig veel k zo. Dus maar eindig veel smurfen zitten fout.

Een beetje filosofie van de wiskunde

Is het Keuze-axioma waar?

Wat is de werkelijkheid waar wiskundige uitspraken over gaan?

Bestaan reële getallen in het echt?

Als we een nieuwe wiskundige stelling hebben bewezen, hebben we dan iets nieuws *ontdekt*, of hebben we iets nieuws *gemaakt*? Was de stelling ook al waar, voordat we een bewijs ervoor hadden?

Hier hebben grote wiskundigen over nagedacht. Een bekende uitspraak van L. Kronecker is: *God heeft de natuurlijke getallen gemaakt; de rest is mensenwerk*
Er zijn een paar stromingen in de filosofie van de wiskunde.

1. Het Platonisme

Het filosofisch Platonisme gaat ervan uit dat er 'ergens' een ideale wereld is, waar alle wiskundige vragen zijn opgelost.
Wiskundigen proberen die ideale wereld te benaderen.
Veel normale wiskundigen zijn (stiekem) aanhangers van deze filosofie. Maar: als die ideale wereld bestaat, waar is-ie dan? En was hij altijd hetzelfde? Waren er in die wereld al antwoorden op vragen over bijvoorbeeld complexe getallen, toen de complexe getallen nog moesten worden uitgevonden?

2. Het Logicisme

Het logicisme, geformuleerd door B. Russell, stelt dat wiskunde niets anders is dan een spel met symbolen en bewijzen volgens stricte logische regels.

3. Het Intuïtionisme

Het intuïtionisme poneert dat een wiskundige stelling pas waar is als ik een *constructie* heb die die waarheid aantoont.

Het intuïtionisme is afkomstig van de Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer.

Een belangrijke vraag is: als wiskunde alleen maar een product is van de menselijke geest, los van elke waarneming of experiment, waarom is wiskunde dan zo nuttig in andere wetenschappen?

Opdrachtje

Lees het artikel "The unreasonable effectiveness of Mathematics" van R.W. Hamming

American Mathematical Monthly 87, vol 2 (February 1980), of op de web-pagina

http://www.lecb.ncifcrf.gov/~toms/Hamming.unreasonable.html

Vorm jezelf een opinie en schrijf een kort betoog waarin je je argumenten uiteenzet.