Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B met uitwerkingen

8 november 2012, 14:00–17:00

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Zij L een taal en laat $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ een rij L-structuren zijn, zo dat M_k een substructuur is van M_{k+1} voor alle k.

a) (5) Laat zien dat er een L-structuur is op $M_\omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$, die zo is dat elke M_k een substructuur is van M_ω.

b) (5) Bewijs dat als bovendien geldt dat M_k een *elementaire* substructuur is van M_{k+1} voor elke k, dan elke M_k een elementaire substructuur is van M_ω.

Uitwerking: a) Voor een n-plaatsig functiesymbool f van L en $a_1,\ldots,a_n \in \bigcup_k M_k$, kies l zodat $a_1,\ldots,a_n \in M_l$ en definieer $f^{M_\omega}(a_1,\ldots,a_n) = f^{M_l}(a_1,\ldots,a_n)$. Dit hangt niet van l af, omdat voor $l \leq l'$ M_l een substructuur is van $M_{l'}$.

Voor een constante c van L zet $c^{M_\omega} = c^{M_0}$.

Voor een n-plaatsig relatiesymbool R van L en $a_1,\ldots,a_n \in \bigcup_k M_k$, definieer: $(a_1,\ldots,a_n) \in R^{M_\omega}$ precies als er een l is met $a_1,\ldots,a_n \in M_l$ en $(a_1,\ldots,a_n) \in R^{M_\omega}$.

Elke M_k is een substructuur van M_ω: als c een constante van L is, dan is (omdat M_0 een substructuur is van M_k), $c^{M_0} = c^{M_k}$ en dus is $c^{M_\omega} = c^{M_k}$. Als f een n-plaatsig functiesymbool is van L, en $a_1,\ldots,a_n \in M_k$, dan is per definitie $f^{M_k}(a_1,\ldots,a_n) = f^{M_\omega}(a_1,\ldots,a_n)$. Tenslotte, als R een n-plaatsig relatiesymbool is van L, $a_1,\ldots,a_n \in M_k$ en $(a_1,\ldots,a_n) \in R^{M_k}$, dan

$(a_1,\ldots,a_n) \in R^{M_\omega}$ per definitie; omgekeerd, als $(a_1,\ldots,a_n) \in R^{M_\omega}$, dan is er een l zodat $a_1,\ldots,a_n \in M_l$ en $(a_1,\ldots,a_n) \in R^{M_l}$. Als $k \leq l$ dan is M_k een substructuur van M_l en als $l \leq k$ is M_l een substructuur van M_k; in beide gevallen volgt $(a_1,\ldots,a_n) \in R^{M_k}$, als verlangd.

b): We bewijzen met inductie naar L-formules $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ de volgende bewering: voor alle k, en voor alle $a_1,\ldots,a_n \in M_k$ geldt: $M_k \models \phi(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow M_\omega \models \phi(a_1,\ldots,a_n)$. Voor kwantorvrije formules volgt dit direct uit het feit dat M_k een substructuur is van M_ω, en de inductiestappen voor $\neg$, $\wedge$ etc zijn triviaal. Stel nu dat $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ van de vorm $\exists y\psi(y,x_1,\ldots,x_n)$ is (waarbij de bewering voor ψ de inductiehypothese is). Als $M_k \models \exists y\psi(y,a_1,\ldots,a_n)$, dus zeg $M_k \models \psi(b,a_1,\ldots,a_n)$ voor $b \in M_k$, dan geldt $M_\omega \models \psi(b,a_1,\ldots,a_n)$ per inductiehypothese, dus $M_\omega \models \exists y\psi(y,a_1,\ldots,a_n)$. Omgekeerd: als $M_\omega \models \exists y\psi(a_1,\ldots,a_n)$, zeg voor een $b \in M_l$ geldt $M_\omega \models \psi(b,a_1,\ldots,a_n)$, kies $m \geq \max(k,l)$. Uit de inductiehypothese volgt nu dat $M_m \models \psi(b,a_1,\ldots,a_n)$ dus $M_m \models \exists y\psi(y,a_1,\ldots,a_n)$ en omdat M_k een elementaire substructuur is van M_m volgt $M_k \models \exists y\psi(y,a_1,\ldots,a_n)$, als verlangd. De inductiestap voor $\forall$ gaat min of meer net zo.

Opgave 2. We beschouwen de taal $L = \{f\}$ waar f een één-plaatsig functiesymbool is. Voor elke $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ is de L-theorie T_n gegeven door de volgende zinnen:

$$\begin{array}{ll}
\forall x(\neg(f(x) = x)) & \\
\forall xy(f(x) = f(y) \to x = y) & \\
\forall x(f^n(x) = x) & \\
\phi_k & \text{voor alle } k \geq 1
\end{array}$$

waar ϕ_k een zin is die uitdrukt "er zijn minstens k elementen", en $f^n(x)$ een afkorting is voor $\underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ keer}}(x)\ldots))$.

a) (2) Laat zien dat T_6 niet volledig is, door een L-zin ϕ te geven zodat $T_6 \not\models \phi$ en $T_6 \not\models \neg\phi$.

b) (3) Bewijs dat T_3 κ-categorisch is, voor elk oneindig kardinaalgetal κ.

c) (3) Concludeer uit deeltje b) dat T_3 volledig is.

d) (2) Voor welke $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ is T_n volledig? Motiveer je antwoord.

Uitwerking a) Neem bijvoorbeeld de zin $\forall x(f(f(x)) = x)$. Merk op dat de verzameling $M = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, met $f^M(\alpha)(n) = \alpha(n) + 1 \bmod 2$, een model is

van T_6.
b) Vanwege de zinnen ϕ_k is elk model M van T_3 oneindig; en bestaat uit disjuncte cykels van de vorm $\{a, b, c\}$ met $f^M(a) = b, f^M(b) = c, f^M(c) = a$. Omdat M oneindig is, zijn er precies $|M|$ veel van zulke cykels. Dus als M, N modellen van T_3 zijn met $|M| = |N|$, dan is er een bijectie tussen de cykels van M en de cykels van N. Die geeft dan aanleiding tot een isomorfisme β van L-structuren door voor elke cykel $\{a, b, c\}$ van M en bijbehorende cykel $\{d, e, f\}$ van N, een keuze voor $\beta(a)$ te doen (daardoor ligt de rest vast, omdat het een isomorfisme moet zijn).
c) Omdat T_3 alleen oneindige modellen heeft, volgt dit nu direct uit de Łos-Vaught test.
d) De redenering in b) gaat op voor elk priemgetal n. Als n geen priemgetal is, $n = kl$ met $k, l \geq 2$, dan geldt als in a), dat $T_n \not\models \forall x(f^k(x) = x)$ en $T_n \not\models \neg\forall x(f^k(x) = x)$.

Opgave 3. Laat met bewijsbomen zien:

a) (3) $\{\neg(\phi \wedge \psi) \vee \chi\} \vdash \phi \to (\psi \to \chi)$

b) (3) $\{\forall x(g(f(x)) = x),\ \forall x\forall y(g(x) = g(y) \to x = y)\} \vdash \forall x(f(g(x)) = x)$

c) (4) $\{\neg\forall x(R(x) \to S(x))\} \vdash \exists x(R(x) \wedge \neg S(x))$

Uitwerking:
a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\phi \wedge \psi) \vee \chi^5 \qquad \dfrac{\dfrac{\wedge\mathrm{I}\,\dfrac{\phi^1 \qquad \psi^2}{\phi \wedge \psi} \qquad \neg(\phi \wedge \psi)^3}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{\chi}\,\bot\mathrm{E} \qquad \chi^4}{\chi}\,\vee\mathrm{E},3,4}{\psi \to \chi}\,\to\mathrm{I},2}{\phi \to (\psi \to \chi)}\,\to\mathrm{I},1$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\forall\mathrm{E}\,\dfrac{\forall x(g(f(x)) = x)}{g(f(g(u))) = g(u)} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x\forall y(g(x) = g(y) \to x = y)}{\forall y(g(f(g(u))) = g(y) \to f(g(u)) = y)}\,\forall\mathrm{E}}{g(f(g(u))) = g(u) \to f(g(u)) = u}\,\forall\mathrm{E}}{f(g(u)) = u}\,\to\mathrm{E}}{\forall x(f(g(x)) = x)}\,\forall\mathrm{I}$$

c)

$$
\dfrac{\dfrac{\neg\forall x(R(x)\to S(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists x(R(x)\wedge\neg S(x))^3 \qquad \dfrac{\dfrac{R(a)^1 \qquad \neg S(a)^2}{R(a)\wedge\neg S(a)}\,\wedge\mathrm{I}}{\exists x(R(x)\wedge\neg S(x))}\,\exists\mathrm{I}}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{S(a)}\,\bot\mathrm{E},2}{R(a)\to S(a)}\,\to\mathrm{I},1}{\forall x(R(x)\to S(x))}\,\forall\mathrm{I}}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{\exists x(R(x)\wedge\neg S(x))}\,\bot\mathrm{E},3
$$

Opgave 4. Ter herinnering: als $L \subset L'$ twee talen zijn, T een L-theorie en T' een L'-theorie met $T \subset T'$, dan heet T' *conservatief* over T, als voor elke L-zin ϕ met $T' \models \phi$, reeds geldt dat $T \models \phi$.

Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

i) T' is conservatief over T

ii) Voor elk model M van T is er een model M' van T', zo dat M en M' dezelfde L-zinnen waar maken

Uitwerking: i)⇒ii). Stel T' conservatief over T, en M een model van T. Beschouw de L-theorie

$$T'' \;=\; T' \cup \{\phi \,|\, \phi \text{ een } L\text{-zin en } M \models \phi\}$$

Als T'' inconsistent is, zijn er met de Compactheidsstelling L-zinnen $\phi_1, \ldots, \phi_k$ die waar zijn in M, zodat $T' \cup \{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ inconsistent is. Maar in dat geval geldt $T' \models \neg(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)$ terwijl $T \not\models \neg(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)$ omdat $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k$ waar is in M en M een model van T is. Omdat $\neg(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)$ een L-zin is, is dit in strijd met de conservativiteit van T' over T.

Dus T'' is consistent en heeft een model M'; ga zelf na dat M en M' dezelfde L-zinnen waar maken.

ii)⇒i). Stel ϕ een L-zin en stel $T' \models \phi$. Stel, $T \not\models \phi$. Dan is er een model M van T zodat $M \models \neg\phi$. Zij M' een model als in ii). Dan moet gelden $M' \models \neg\phi$ omdat M en M' dezelfde L-zinnen waar maken, maar dit is in strijd met de aanname dat $T' \models \phi$ (omdat M' een model is van T'). Dus $T \models \phi$, als verlangd.

Opgave 5. Zoals bekend noemen we een verzameling x *transitief* als voor alle $y \epsilon x$ en $z \epsilon y$, $z \epsilon x$ geldt. We noemen in deze opgave x *dubbel transitief* als x transitief is en elk element van x ook transitief is.

Verder is gegeven dat in de verzamelingenleer het *principe van ϵ-inductie* geldig is:

$$\forall x(\forall y \epsilon x \phi(y) \rightarrow \phi(x)) \rightarrow \forall x \phi(x)$$

a) (5) Bewijs dat als x dubbel transitief is, elk element van x het ook is.

b) (5) Bewijs met behulp van het principe van ϵ-inductie dat als x dubbel transitief is, x een ordinaalgetal is [Hint: je mag zonder verder bewijs het resultaat (uit een opgave in het dictaat) gebruiken, dat elke transitieve verzameling van ordinaalgetallen een ordinaalgetal is].

Uitwerking: a). Stel x is dubbel transitief, $y \epsilon x$. We moeten laten zien: y is dubbel transitief. Uit x dubbel transitief weten we, dat y transitief is; we moeten aantonen dat elk element van y transitief is. Dus, stel $z \epsilon y$. Uit de transitiviteit van x volgt nu dat $z \epsilon x$, en uit de dubbele transitiviteit van x volgt nu dat z transitief is, als verlangd.

b). Laat $\phi(x)$ de bewering zijn: x dubbel transitief $\rightarrow x$ is een ordinaalgetal. Stel, dat $\phi(y)$ waar is voor alle $y \epsilon x$ (de inductiehypothese), en stel dat x dubbel transitief is. Uit deeltje a) weten we dan dat elke $y \epsilon x$ dubbel transitief is, dus de inductiehypothese geeft ons dat elke $y \epsilon x$ een ordinaalgetal is. We concluderen dat x een transitieve verzameling van ordinaalgetallen is; met het resultaat uit de Hint concluderen we, dat x een ordinaalgetal is.