Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B met gedeeltelijke uitwerking

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.

27 januari 2015, 08.30-11.30

Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Laat L een taal zijn, T een L-theorie, M een model van T en A een substructuur van M. We beschouwen ook de taal L_A, die een constante heeft voor elk element uit A.

Veronderstel, dat de theorie T kwantoreliminatie heeft.

a) (5) Laat zien dat er voor elke L_A-zin ϕ een L_A-zin ψ is zodat geldt:

$$M \models \phi \;\Leftrightarrow\; A \models \psi$$

b) (5) Stel nu, dat M_1 en M_2 modellen van T zijn, en A een substructuur van zowel M_1 als M_2. Laat zien dat M_1 en M_2 dezelfde L_A-zinnen waar maken.

Uitwerking: a) Stel ϕ een L_A-zin. Dan is er een L-formule $\phi'(x_1, \ldots, x_n)$ en er zijn constanten $a_1, \ldots, a_n$ uit A zodat ϕ gelijk is aan $\phi'(a_1, \ldots, a_n)$. Omdat T kwantoreliminatie heeft, is er een *kwantorvrije* L-formule $\phi''(x_1, \ldots, x_n)$ zodat $T \models \forall\vec{x}(\phi'(\vec{x}) \leftrightarrow \phi''(\vec{x}))$. Zij ψ de L_A-zin $\phi''(a_1, \ldots, a_n)$. Er geldt nu:

$$\begin{array}{lll} M \models \phi & \Leftrightarrow & \text{(per keuze van } \phi') \\ M \models \phi'(a_1, \ldots, a_n) & \Leftrightarrow & \text{(omdat } M \text{ een model is van } T) \\ M \models \phi''(a_1, \ldots, a_n) & \Leftrightarrow & \text{(omdat } \phi'' \text{ kwantorvrij is)} \\ A \models \phi''(a_1, \ldots, a_n) & \Leftrightarrow & \text{(per definitie van } \psi) \\ A \models \psi & & \end{array}$$

b) Merk op dat de constructie van ψ in deeltje a) afhing van A en van T, maar niet van M. Zij ϕ een willekeurige L_A-zin, dan geeft deeltje a) dus een L_A-zin ψ zodat voor elk model M' van T, waarvan A een substructuur is, de equivalentie

$$M' \models \phi \;\Leftrightarrow\; A \models \psi$$

Als dus M en M' twee modellen van T zijn die allebei A als substructuur bevatten, dan geldt voor elke L_A-zin ϕ:

$$M \models \phi \;\Leftrightarrow A \models \psi \;\Leftrightarrow\; M' \models \phi$$

Opgave 2. De theorie T_d van *dichte lineaire ordeningen zonder eindpunten* is geformuleerd in de taal $L_d = \{<\}$ en heeft de axioma's:

$$\begin{array}{ll} \forall x \neg(x < x) & \forall xyz(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z) \\ \forall xy(x < y \vee x = y \vee y < x) & \forall xy(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y)) \\ \forall x \exists zw(z < x \wedge x < w) & \end{array}$$

Ik herinner eraan, dat de theorie T_d *ω-kategorisch* is, d.w.z. elk tweetal aftelbaar oneindige modellen van T_d is isomorf.

a) (7) Laat nu T_d^2 de theorie zijn die dezelfde axioma's heeft als T_d, maar geformuleerd in de taal $L_d^2 = L_d \cup \{c, d\}$ waar c en d twee constanten zijn. Bewijs dat T_d^2 precies 3 niet-isomorfe aftelbare modellen heeft.

b) (3) Geef een voorbeeld van een theorie die precies 4 niet-isomorfe aftelbare modellen heeft.

Uitwerking: a) Stel M is een model van T_d^2. Dan is M een dichte lineaire ordening zonder eindpunten, en bovendien bevat M de elementen c^M en d^M. Er zijn precies drie mogelijkheden: $c^M < d^M$, $c^M = d^M$ en $c^M > d^M$. Omdat de theorie T_d^2 niets zegt over c en d, doen alledrie deze mogelijkheden zich ook echt voor en omdat elk isomorfisme de ordening $<$ moet respecteren en de constanten c en d moet behouden, zijn modellen waarin verschillende relaties gelden tussen c en d, niet isomorf. Er zijn dus minstens 3 niet-isomorfe aftelbare modellen.

Om te laten zien dat er precies 3 niet-isomorfe aftelbare modellen zijn: stel M en N zijn aftelbare modellen met $c^M < d^M$ en $c^N < d^N$. Nu zijn $M_{<c} = \{x \in M \mid x < c^M\}$ en $N_{<c} = \{x \in N \mid x < c^N\}$ allebei aftelbare dichte lineaire ordeningen zonder eindpunt, dus aftelbare modellen van T_d, dus isomorf. Laat $f_{<c} : M_{<c} \rightarrow N_{<c}$ een isomorfisme. Op dezelfde manier zijn er isomorfismen f_{cd} van $M_{cd} = \{x \in M \mid c^M < x < d^M\}$ naar N_{cd}, en $f_{>d} : M_{>d} \rightarrow N_{>d}$. Definieer nu $f : M \rightarrow N$ door

$$\begin{array}{ll} f(x) = f_{<c}(x) & \text{als } x < c^M \\ f(c^M) = c^N & \\ f(x) = f_{cd}(x) & \text{als } c^M < x < d^M \\ f(d^M) = d^N & \\ f(x) = f_{>d}(x) & \text{als } d^M < x \end{array}$$

Dan is f een isomorfisme van M naar N. De behandeling van de andere twee mogelijkheden gaat net zo.
b) Neem bijvoorbeeld de taal $L_d \cup \{c, d, e\}$ en zij T de theorie $T_d \cup \{c < d, \neg(c = e)\}$. We hebben precies de 4 mogelijkheden: $e < c < d$, $c < e < d$, $c < d = e$ en $c < d < e$.
Opgave 3. Laat met bewijsbomen zien:

a) (3) $\exists x\phi(x) \to \psi \vdash \forall x(\phi(x) \to \psi)$

b) (3) $\exists x(\psi \to \phi(x)) \vdash \psi \to \exists x\phi(x)$

c) (4) $\phi \vee (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\phi \vee \chi)$

Hier veronderstellen we in a) en b), dat de variabele x niet voorkomt in ψ.

Opgave 4. Laat, in de lege taal, ϕ_n de zin zijn die uitdrukt: "er zijn hooguit n elementen" (hier is n een natuurlijk getal > 0). Stel dat T een theorie is die alleen eindige modellen heeft.

Laat zien dat er een $n > 0$ is zodat $T \vdash \phi_n$.
[Hint: beschouw de theorie $T' = T \cup \{\neg\phi_n \mid n > 0\}$. Gebruik de Compactheidsstelling en de Volledigheidsstelling]

Uitwerking: Stel voor alle $n > 0$ geldt $T \not\models \phi_n$. Dan is voor elke n, de theorie $T \cup \neg\phi_n$ consistent en omdat $\neg\phi_k \to \neg\phi_n$ altijd waar is voor $k > n$, volgt dat elke eindige deelverzameling van T' consistent is, waar T' de theorie uit de hint is. Met de Compactheidsstelling volgt: T' is consistent. Maar elk model van T' is in het bijzonder een oneindig model van T; tegenspraak met de aanname dat T alleen eindige modellen heeft.

We concluderen dat onze aanname niet kan kloppen: er is dus een $n > 0$ met $T \models \phi_n$. Met de Volledigheidsstelling volgt $T \vdash \phi_n$.

Opgave 5. Ik herinner eraan dat een verzameling x *transitief* heet als elk element van x een deelverzameling van x is; m.a.w., elk element van een element van x is weer een element van x.

Laat x een willekeurige verzameling. Met transfiniete recursie kunnen we een operatie F op het ordinaalgetal ω definiëren, die voldoet aan:

$$F(0) = x$$

$$F(\alpha + 1) = F(\alpha) \cup (\bigcup F(\alpha))$$

We definiëren: $\overline{x} = \bigcup_{\alpha \in \omega} F(\alpha)$.

a) (5) Laat zien dat $\overline{x}$ altijd transitief is.

b) (5) Laat zien: als $x \subseteq y$ en y is transitief, dan geldt $\overline{x} \subseteq y$ (Hint: gebruik inductie op ω om te laten zien dat $F(\alpha) \subseteq y$, voor alle $\alpha \in \omega$).

De verzameling $\overline{x}$ heet de *transitieve afsluiting* van x.

Uitwerking: a) Stel $y \in \overline{x}$. Te laten zien: $y \subset \overline{x}$. Er ia een $\alpha \in \omega$ waarvoor geldt $y \in F(\alpha)$; voor die α geldt dan dat $y \subset F(\alpha+1)$. We concluderen dat $y \subset \bigcup_{\alpha \in \omega} F(\alpha) = \overline{x}$, als verlangd. Dus $\overline{x}$ is transitief.
b) Stel $x \subseteq y$ en y is transitief. We laten met inductie op $\alpha \in \omega$ zien dat $F(\alpha) \subseteq y$. Voor $\alpha = 0$ is dit gegeven. Stel $F(\alpha) \subseteq y$. Dan is ook $F(\alpha+1) \subseteq y$: stel $z \in F(\alpha+1)$. Als $z \in F(\alpha)$ zijn we klaar; als $z \in \bigcup F(\alpha)$ dan is er een $w \in F(\alpha)$ met $z \in w$. Dan is $w \in y$ per aanname dat $F(\alpha) \subseteq y$. Er volgt dat $z \in y$ omdat y transitief is. Dus $F(\alpha+1) \subseteq y$.

Met inductie concluderen we dat voor alle $\alpha \in \omega$, $F(\alpha) \subseteq y$, dus $\overline{x} = \bigcup_{\alpha \in \omega} F(\alpha) \subseteq y$, als verlangd.