Herkansingstentamen Grondslagen van de Wiskunde, 5 juli 2017, 09.00-12.00

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Een *inbedding* van welordeningen $f : X \to Y$ is, zoals bekend, een injectieve, ordebewarende functie die X afbeeldt op een beginsegment van Y. Laten X en Y welordeningen zijn; neem aan dat X geen grootste element heeft. Voor $x \in X$ schrijven we $X_{<x}$ voor de verzameling $\{y \in X \mid y < x\}$.

a) (5) Bewijs: als er voor elke $x \in X$ een inbedding van welordeningen $X_{<x} \to Y$ is, dan is er ook een inbedding $X \to Y$.

b) (3) Laat door een tegenvoorbeeld zien, dat de voorwaarde dat X geen grootste element heeft, in a) niet gemist kan worden.

c) (2) Geldt de bewering in a) ook nog, als we "inbedding van welordeningen" vervangen door "injectieve functie"? Motiveer je antwoord.

Opgave 2. De taal van posets, L_{pos}, heeft één, tweeplaatsig, relatiesymbool $\leq$. Laat $(X, \leq)$ een poset zijn, beschouwd als L_{pos}-structuur. Een *keten* in X is een deelverzameling waarop de relatie $\leq$ een lineaire ordening is.
Stel, dat er voor elke $n > 0$ een keten $I \subset X$ is zodat $|I| = n$. Bewijs, dat er een poset $(X', \leq')$ bestaat met de volgende eigenschappen:

i) $(X, \leq)$ en $(X', \leq')$ maken dezelfde L_{pos}-zinnen waar.

ii) X' bevat een oneindige keten.

[Hint: gebruik de compactheidsstelling]

Opgave 3. Geef voor de volgende uitspraken hetzij een bewijs (d.m.v. een bewijsboom), of een tegenvoorbeeld (d.m.v. een model):

a) (3) $\forall x(\phi(x) \vee \psi(x)) \vdash (\forall x\phi(x)) \vee (\forall x\psi(x))$

b) (4) $\exists x\forall yR(x, y) \vdash \forall y\exists xR(x, y)$

c) (3) $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y) \vdash \forall y \exists x (f(x) = y)$

Opgave 4. Laat L de taal zijn met een tweeplaatsig relatiesymbool R.

a) (4) Laat zien dat er een L-theorie T is waarvan de modellen precies die L-structuren M zijn waarvoor geldt: R^M is een equivalentierelatie met precies twee equivalentieklassen, en beide equivalentieklassen zijn oneindig.

b) (3) Zij T de theorie uit a). Bewijs dat T ω-kategorisch is.

c) (3) Zij T de theorie uit a). Bewijs dat T volledig is.

Opgave 5. Ter herinnering: een verzameling X heet *transitief* als voor alle $y \in X$ en $x \in y$ geldt, dat $x \in X$. Oftewel: elk element van X is een deelverzameling van X.
Het *regulariteitsaxioma* van de verzamelingenleer zegt, dat elke niet-lege verzameling Y een element bevat dat disjunct is met Y.

a) (5) Bewijs: als X transitief is en niet-leeg, dan geldt $\emptyset \in X$.

b) (5) Stel, X is transitief, Y een verzameling. Bewijs: als $X \not\subseteq Y$ dan is er een element w van X waarvoor geldt: $w \subseteq Y$ en $w \notin Y$.