Inhoudsopgave

Voorwoord

Het doel van dit college is de invoering van variëteiten, en daarbij de raakruimten, vectorvelden en differentiaalvormen. Dit zijn de basisbegrippen van de differentiaalmeetkunde en differentiaaltopologie. Ze komen ook voor in diverse onderdelen van de natuurkunde.

Veel aandacht zal besteed worden aan de coördinaatvrije, meetkundige definities én aan de berekeningen in locale coördinaten. Zowel in contrast met elkaar als elkaar ondersteunend. Als een toepassing hiervan zal de algemene stelling van Stokes, betreffende integratie over randen van variëteiten van willekeurige dimensie, een heel eenvoudig bewijs krijgen. Als de tijd het toelaat zal ook gekeken worden naar geodeten en kromming in de (pseudo-)Riemann'se meetkunde.

Er zijn talloze leerboeken over differentiaalmeetkunde, daarvan zijn Spivak [14, Vol. I] en Abraham, Marsden and Ratiu [1] bij vroegere versies van dit college gebruikt. Buitengewoon grondig is Kobayashi and Nomizu [11]. Vanwege hun voortreffelijke eigenschappen zijn deze boeken zeer aan te bevelen. Onder andere zijn ze door hun volledigheid beter bruikbaar als naslagwerk dan dit collegedictaat. Overigens zal zelfs uit deze tekst nog een keuze gemaakt moeten worden, in een cursus van twee uur per week gedurende één semester.

Bij het college is een werkcollege, waarbij iedere week een drietal opgaven wordt opgegeven, soms met aanwijzingen erbij. Men krijgt een week de tijd om ze zo goed mogelijk te maken. Op het werkcollege wordt aan een student (telkens een ander) gevraagd om voor het bord te komen vertellen wat daar uit kwam. Het is daarbij helemaal niet erg om te melden dat men onderweg ergens gestrand is; men wordt dan wel gevraagd om zo goed mogelijk te verwoorden wat het probleem was waar men op is blijven steken. Gezamenlijk zullen we dan op het werkcollege eruit proberen te komen. Aan de studenten wordt ook gevraagd om, op het college, in de pauze, of tijdens het werkcollege, te melden wat van het college niet goed overgekomen is. Dit is voor een docent de enige manier om erachter te komen wát in het college beter anders gedaan kan worden.

Het symbool $\square$ aan de rechterkant geeft het einde van een bewijs aan, terwijl $\oslash$ het einde van een definitie, opmerking, of voorbeeld markeert.

Hoofdstuk 1

Topologische en Analytische Begrippen

In dit hoofdstuk herhalen we een aantal basisbegrippen uit de Topologie en Analyse, die we in het vervolg geregeld zullen gebruiken. Dit dient ook om de notaties en de terminologie vast te leggen.

Lees het door en aarzel niet om vragen te stellen over onduidelijke punten. Anderzijds is het in dit stadium niet nodig om alle details volledig te beheersen; de mededelingen in dit hoofdstuk mogen ter kennisneming aangenomen worden.

Meestal zult U met de theorie geconfronteerd zijn geweest in toenemende mate van algemeenheid. Ter afwisseling beginnen we hier met zeer algemene topologische ruimten en eindigen met de analyse in $\mathbf{R}^n$.

1.1 Topologische Ruimten

Definitie 1.1.1 Zij V een verzameling. Een *topologie* in V is een collectie $\mathcal{O}$ van deelverzamelingen van V, de *open verzamelingen* genaamd, met de volgende eigenschappen.

i) $\emptyset \in \mathcal{O}$ en $V \in \mathcal{O}$.

ii) Als $A \in \mathcal{O}$ en $B \in \mathcal{O}$, dan is $A \cap B \in \mathcal{O}$.

iii) De vereniging van iedere collectie van open verzamelingen is open.

Een *topologische ruimte* is een paar $(V, \mathcal{O})$, bestaande uit een verzameling V en een topologie $\mathcal{O}$ in V. $\oslash$

Als $x \in V$ en $A \subset V$, dan heet A een *omgeving* van x in V (met betrekking tot de topologie $\mathcal{O}$, men zegt dit er niet steeds bij), als er een $U \in \mathcal{O}$ is met $x \in U$ en $U \subset A$.

Men noemt in dit geval x een *inwendig punt* van A. De verzameling van de inwendige punten van A heet het *inwendige* A^{int} van A. Deze verzameling is gelijk aan de vereniging van alle open verzamelingen die in A bevat zijn. Daarmee is A^{int} open; het is de grootste open verzameling die in A is bevat. A is zèlf open, dan en slechts dan als $A = A^{\text{int}}$.

Voor een willekeurige deelverzameling A van V is de *afsluiting* $\bar{A}$ van A in V gedefinieerd als de verzameling van alle punten $x \in V$ met de eigenschap dat $U \cap A \neq \emptyset$ voor iedere open omgeving U van x. Men zegt dat A een *gesloten deelverzameling* is van V als $A = \bar{A}$.

Uit de definitie volgt dat

$$V \setminus \bar{A} = (V \setminus A)^{\mathrm{int}}, \tag{1.1.1}$$

ofwel het complement van de afsluiting is gelijk aan het inwendige van het complement. Hieruit lezen we af dat A gesloten is, dan en slechts dan als het complement $V \setminus A$ van A open is. Verder, dat $\bar{A}$ gelijk is aan de doorsnede van alle gesloten B met $B \supset A$. Anders gezegd, $\bar{A}$ is de kleinste gesloten verzameling die A omvat.

Als $A \subset V$, dan is de *rand* van A in V gedefinieerd als

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^{\mathrm{int}}. \tag{1.1.2}$$

Gebruikmakend van (1.1.1), zien we dat ∂A bestaat uit de punten die zowel in de afsluiting van A als in de afsluiting van het complement $V \setminus A$ van A liggen. Het complement van ∂A is gelijk aan de vereniging van het inwendige van A en van het inwendige van $V \setminus A$.

Men noemt de topologische ruimte $(V, \mathcal{O})$ *discreet* als iedere $x \in V$ een omgeving U heeft die alleen het element x bevat. Dit betekent dat, voor iedere $x \in V$, de verzameling $\{x\}$ open is. Daarmee is iedere deelverzameling A van V open, als vereniging van de verzamelingen $\{x\}$ met $x \in A$.

Iedere verzameling V kan altijd worden voorzien van de *discrete topologie*, bestaande uit de collectie van alle deelverzamelingen van V. Het andere uiterste is $\mathcal{O} = \{\emptyset, V\}$, men spreekt in dit geval van de *triviale topologie*.

Men zegt dat een topologie $\mathcal{O}$ *Hausdorff's* is, als er voor iedere $x, y \in V$ met $x \neq y$ een omgeving A van x en een omgeving B van y is, waarvoor $A \cap B = \emptyset$. De discrete topologie is altijd Hausdorff's, de triviale alleen maar als V ten hoogste één element heeft.

1.2 Compactheid, Samenhang, Relatieve Topologie

Definitie 1.2.1 Zij $K \subset V$. Een *open overdekking* van K is een collectie van open deelverzamelingen U_i, $i \in I$ met

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i. \tag{1.2.1}$$

Hierin is I een willekeurige indexverzameling, eindig of oneindig. Men zegt dat K *compact* is, als iedere open overdekking U_i, $i \in I$ van K een eindige deeloverdekking van K bevat. Dat wil zeggen, er is een eindige deelverzameling E van I, waarvoor (1.2.1) geldt met I vervangen door E. $\oslash$

In een Hausdorff'se topologische ruimte is iedere compacte verzameling gesloten. Verder is iedere gesloten deelverzameling van een compacte verzameling compact. Daarmee zijn in een compacte Hausdorff'se topologische ruimte de begrippen "compact" en "gesloten" equivalent. Iedere eindige verzameling is compact. Omgekeerd, is V compact en discreet, dan is V eindig.

De topologische ruimte $(V, \mathcal{O})$ heet *lokaal compact*, als iedere $x \in V$ een compacte omgeving in V heeft.

Definitie 1.2.2 Een deelverzameling S van V heet *samenhangend* als het niet mogelijk is om twee open verzamelingen A en B te vinden, waarvoor $S \cap A \neq \emptyset$, $S \cap B \neq \emptyset$, $S \cap A \cap B = \emptyset$ en $S \subset (A \cup B)$. De verzameling V is samenhangend, dan en slechts dan als $A \subset V$, A is open én A is gesloten impliceert dat $A = \emptyset$ of $A = V$. $\oslash$

Zijn S en T samenhangend en is $S \cap T \neq \emptyset$, dan is $S \cup T$ samenhangend. Daarmee is voor iedere $x \in V$ de vereniging S_x, van alle samenhangende S met $x \in S$, een samenhangende deelverzameling van V. S_x is de grootste samenhangende deelverzameling van V die x bevat en heet de *samenhangscomponent* van x in V. Als $x, y \in V$ dan is òfwel $S_x = S_y$, òfwel $S_x \cap S_y = \emptyset$. De verzameling V valt daarmee in samenhangscomponenten uiteen.

Men noemt de topologische ruimte $(V, \mathcal{O})$ *lokaal samenhangend* als iedere $x \in V$ een samenhangende omgeving heeft. In zo'n ruimte zijn de samenhangscomponenten open deelverzamelingen. Omdat het complement van een samenhangscomponent S gelijk is aan de vereniging van de andere samenhangscomponenten, is $V \setminus S$ open, dus S is ook gesloten.

Definitie 1.2.3 Is W een willekeurige deelverzameling van V, dan definieert

$$\mathcal{O}_W = \{A \cap W \mid A \in \mathcal{O}\} \tag{1.2.2}$$

een topologie in W, de *relatieve topologie* genaamd. $\oslash$

Is $(V, \mathcal{O})$ Hausdorff's, dan is $(W, \mathcal{O}_W)$ Hausdorff's. W is een compacte ruimte ten aanzien van de relatieve topologie, dan en slechts dan als W compact is als deelverzameling van V. Hetzelfde met overal "compact" vervangen door "samenhangend". Maar $\mathcal{O}_W \subset \mathcal{O}$ geldt alleen maar als W open is in V.

Voor iedere gesloten deelverzameling A van V is $A \cap W$ gesloten in W ten aanzien van de relatieve topologie. Maar de omkering, dat iedere gesloten deelverzameling van $(W, \mathcal{O}_W)$ ook gesloten is in V, geldt alleen maar als W zelf een gesloten deelverzameling is van V.

1.3 Convergentie en Continuïteit

Definitie 1.3.1 Zij $(V, \mathcal{O})$ en $(W, \mathcal{P})$ topologische ruimten en zij f een afbeelding van V naar W. Als $a \in V$ en $b \in W$, dan zegt men dat $f(x)$ naar b convergeert als x naar a gaat, notatie

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \tag{1.3.1}$$

als er bij iedere omgeving B van b in W een omgeving A van a in V is, waarvoor geldt dat $f(x) \in B$, zodra $x \in A$.

Als f slechts in een deelverzameling D van V gedefinieerd is, dan wordt deze definitie ook nog toegelaten, alleen met A vervangen door $A \cap D$. Men zegt dat f *continu in het punt* a is, als $a \in D$ en $f(x)$ naar $f(a)$ convergeert als x naar a gaat. De afbeelding f heet *continu* als voor iedere $a \in D$ geldt dat f continu is in het punt a. Dit is equivalent met de voorwaarde dat f continu is van D naar W, met in D de relatieve topologie als deelverzameling van V. In de rest van deze paragraaf nemen we aan dat $V = D$. $\oslash$

Voor $A \subset V$ noteert men

$$f(A) = \{f(x) \in W \mid x \in A\} \tag{1.3.2}$$

voor het *beeld* van A onder f. Is $B \subset W$ dan heet

$$f^{-1}(B) = \{x \in V \mid f(x) \in B\} \tag{1.3.3}$$

het *volledige origineel* van B in V, voor de afbeelding f.

Lemma 1.3.1 *De volgende uitspraken (a)-(c) zijn equivalent.*

(a) $f : V \to W$ *is continu.*

(b) Voor iedere open deelverzameling B *van* W *is* $f^{-1}(B)$ *een open deelverzameling van* V*.*

(c) Voor iedere gesloten deelverzameling B *van* W *is* $f^{-1}(B)$ *gesloten in* V*.*

De afbeelding f heet een *topologisch isomorfisme*, of een *homeomorfisme* van V naar W, als f bijectief is, f continu is en ook de inverse afbeelding f^{-1} continu is. In dit geval definieert $A \mapsto f(A)$ een bijectie van $\mathcal{O}$ naar $\mathcal{P}$, met inverse $B \mapsto f^{-1}(B) : \mathcal{P} \to \mathcal{O}$.

Is $f : V \to W$ continu en is K een compacte deelverzameling van V, dan is de beeldverzameling $f(K)$ compact in W.

Dit kan men ook gebruiken om het volgende te bewijzen. Zij V compact en W Hausdorff's. Zij f een continue en bijectieve afbeelding van V naar W. Dan is de inverse f^{-1} automatisch continu van W naar V. Anders gezegd, dan is f een topologisch isomorfisme.

Is $f : V \to W$ continu en is S een samenhangende deelverzameling van V, dan is de beeldverzameling $f(S)$ samenhangend in W.

Zij f een continue afbeelding van V naar W en g een continue afbeelding van W naar Z. Dan is de samenstelling $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ een continue afbeelding van V naar Z. Men zou dit de *kettingregel voor continue afbeeldingen* kunnen noemen. Met de karakterisering (b) van continuïteit wordt het bewijs heel kort.

In de topologie maakt men ook vaak gebruik van *convergente rijen.* Is $(V, \mathcal{O})$ een topologische ruimte en is $x(1), x(2), \dots$ een oneindige rij in V, dan zegt men dat de rij $x(j)$ convergeert naar $b \in V$ als j naar oneindig gaat, notatie

$$\lim_{j \to \infty} x(j) = b,$$

als er bij iedere omgeving B van b in V een rangnummer N is, met de eigenschap dat $x(j) \in B$ voor alle j met $j \geq N$. Als we de rij zien als afbeelding x van $\mathbf{Z}_{>0}$ naar V, dan zien we dat dit in de voorgaande definitie van convergentie past, als we de verzamelingen van de vorm

$$\{j \in \mathbf{Z} \mid j \geq N\}$$

als "omgevingen van ∞" opvatten.

Zij nu f continu van V naar W. Als de rij $x(j)$ in V convergeert naar a, dan convergeert de rij $f(x(j))$ in W naar $f(a)$. Men noemt f ook wel *rijtjescontinu* als de laatste eigenschap geldt voor alle rijtjes $x(j)$ in V. Dus: "f is continu" impliceert "f is rijtjescontinu". In metrische ruimten (zie hieronder) geldt ook de implicatie de andere kant op.

Definitie 1.3.2 Zij $(V, \mathcal{O})$ en $(W, \mathcal{P})$ topologische ruimten. Het Cartesisch product $V \times W$ is de verzameling van de geordende paren (v, w) met $v \in V$ en $w \in W$. Men noemt $C \subset V \times W$ open, als er bij iedere $(v, w) \in C$ een $A \in \mathcal{O}$ en een $B \in \mathcal{P}$ is, waarvoor $(A \times B) \subset C$. Deze open deelverzamelingen van $V \times W$ definiëren een topologie $\mathcal{R}$ in $V \times W$, die de *producttopologie* in $V \times W$ genoemd wordt. $\oslash$

Met betrekking tot deze topologie zijn de projecties

$$\pi_1 : (v, w) \mapsto v : V \times W \to V,$$

respectievelijk

$$\pi_2 : (v, w) \mapsto w : V \times W \to W,$$

op de eerste, respectievelijk de tweede factor, continue afbeeldingen. Men kan zelfs de producttopologie karakteriseren als de zwakste (= met zo min mogelijk open verzamelingen) topologie in $V \times W$, waarvoor beide projecties continu zijn.

1.4 Metrische Ruimten

Definitie 1.4.1 Zij V een wilekeurige verzameling. Een *metriek* of *afstandsfunctie* in V is een reëelwaardige functie d op $V \times V$, met de volgende eigenschappen.

i) Voor alle $x, y \in V$ is $d(x, y) \geq 0$.

ii) $d(x, y) = 0$, dan en slechts dan als $x = y$.

iii) Voor alle $x, y \in V$ geldt dat $d(x, y) = d(y, x)$.

iv) Voor alle $x, y, z \in V$ geldt dat $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Men noemt $d(x, y)$ de *afstand van x naar y*. Eigenschap iv) heet de *driehoeksongelijkheid*. Een *metrische ruimte* is een paar $(V,\, d)$, waarin V een verzameling is en d een metriek in V. $\oslash$

Voor iedere $a \in V$, $r > 0$ heet

$$B(a;\, r) := \{x \in V \mid d(x, a) < r\}, \tag{1.4.1}$$

de *bol om a in V met straal r*. In een metrische ruimte $(V,\, d)$ noemt men een deelverzameling A van V *open* als er voor iedere $a \in A$ een $r > 0$ is, met de eigenschap dat $B(a;\, r) \subset A$. Dit definieert een topologie in V, de "door de metriek d gedefinieerde topologie".

Zijn $(V,\, d_V)$ en $(W,\, d_W)$ metrische ruimten (met de bijbehorende topologieën) en is f een afbeelding van V naar W, dan is de uitspraak dat $f(x)$ naar b convergeert voor $x \to a$ equivalent met de volgende. Bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ met de eigenschap dat als $x \in V$ en $d_V(x, a) < \delta$, dan is $d_W(f(x), b) < \varepsilon$. We herkennen hier de ε, δ-definitie van convergentie.

De topologie van een metrische ruimte is altijd Hausdorff's. Ook is in metrische ruimten rijtjes-continuïteit equivalent met continuïteit.

Is $W \subset V$, dan is de beperking van d tot $W \times W$ een metriek in W. De bijbehorende topologie in W is gelijk aan de relatieve topologie in W, beschouwd als deelverzameling van de topologische ruimte V.

Zijn $(V,\, d_V)$ en $(W,\, d_W)$ metrische ruimten, dan kan men in het Cartesisch product $V \times W$ een metriek invoeren door middel van

$$d((v, w),\, (x, y)) = [d_V(v, x)^2 + d_W(w, y)^2]^{1/2}.$$

De bijbehorende topologie is dan de producttopologie. Men kan zich afvragen of men niet eenvoudiger in het rechterlid de som van $d_V(v, v')$ en $d_W(w, w')$ had kunnen nemen, of het maximum van deze twee getallen. Inderdaad leidt dit in beide gevallen opnieuw tot een metriek in $V \times W$, waarvan bovendien de topologie gelijk is aan de producttopologie. In feite is er een zeer grote vrijheid in de keuze van metrieken met dezelfde topologie.

1.5 Genormeerde Lineaire Ruimten

Definitie 1.5.1 Zij E een lineaire ruimte over $\mathbf{R}$. Een *norm* in E is een reëelwaardige functie $x \mapsto \|x\|$, met de volgende eigenschappen.

a) $\|x\| \geq 0$ voor alle $x \in E$.

b) Als $\|x\| = 0$, dan is $x = 0$.

c) Als $\lambda \in \mathbf{R}$ en $x \in E$, dan is $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$.

d) Voor alle $x, y \in E$ geldt dat $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Een *genormeerde lineaire ruimte* is een paar $(E, \|\cdot\|)$, bestaande uit een lineaire ruimte E en een norm $x \mapsto \|x\|$ in E. ⊘

Een belangrijk voorbeeld is de *Euclidische norm* in $\mathbf{R}^n$, gedefinieerd door

$$\|x\| = \|x\|_{\mathrm{Eucl}} = (\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2)^{1/2}. \tag{1.5.1}$$

Voor $n = 1$ is dit de absolute waarde $x \mapsto |x|$, $x \in \mathbf{R}$.

Een ander bekend voorbeeld is de ruimte C van de continue functies $x(t)$ op een segment $[a,\, b]$. Dit is een lineaire ruimte ten aanzien van de puntsgewijze optelling en scalairvermenigvuldiging van functies. Deze lineaire ruimte is oneindig-dimensionaal, zo vormen de functies t^j, $j = 0, 1, 2, \ldots$ een oneindige rij lineair onafhankelijke elementen van C. In C definieert

$$\|x\| = \sup_{t \in [a,\, b]} |x(t)| \tag{1.5.2}$$

een norm, de *uniforme norm* of *supremumnorm* geheten. Ook wordt wel eens de L^2-norm

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^2\, dt)^{1/2} \tag{1.5.3}$$

gebruikt, een variant op de Euclidische norm in $\mathbf{R}^n$.

In een genormeerde lineaire ruimte E wordt $\|x - y\|$ de *afstand* tussen x en y in E genoemd. Dit definieert een metriek in E, waarbij de driehoeksongelijkheid nauw samenhangt met d). Om deze reden heet d) ook wel de *driehoeksongelijkheid voor de norm.* Op zijn beurt leidt dit tot een topologie in E. Tenzij uitdrukkelijk anders vermeld, gebruikt men na invoering van een norm automatisch de bijbehorende metriek en topologie.

In $\mathbf{R}^n$ leidt zo de Euclidische norm tot het gebruikelijke Euclidische afstandsbegrip en de bijbehorende topologische begrippen.

Als $n = p + q$, dan is de topologie in $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ gelijk is aan de producttopologie van de topologieën in $\mathbf{R}^p$ en in $\mathbf{R}^q$. Anders gezegd, de topologie in $\mathbf{R}^n$ is de zwakste topologie in $\mathbf{R}^n$, waarvoor de coördinaatsfuncties

$$(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n) \mapsto x_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},$$

continu zijn, voor alle $1 \le j \le n$.

In een metrische ruimte V heet een deelverzameling A *begrensd* als er een constante C is met de eigenschap dat $d(x, y) \le C$ voor alle $x, y \in A$. In $\mathbf{R}^n$ is een deelverzameling K compact, dan en slechts dan als K begrensd is en gesloten. Daarmee is $\mathbf{R}^n$ een lokaal compacte topologische ruimte.

Ter contrast: in een oneindig-dimensionale genormeerde lineaire ruimte is het niet mogelijk om een bol te overdekken met een eindig aantal bollen met een kleinere straal.

In $\mathbf{R}$ zijn de intervallen precies de samenhangende deelverzamelingen. Hierbij is een *interval* gedefinieerd als een deelverzameling I van $\mathbf{R}$ met de eigenschap dat $a, b \in I$, $a < b$ impliceert dat $]a, b[\subset I$.

Het bewijs hiervan is een goede oefening in het hanteren van de definities. In het bewijs dat ieder interval samenhangend is, speelt de karakteristieke eigenschap van $\mathbf{R}$, dat iedere begrensed deelverzameling een kleinste bovengrens heeft, een essentiële rol. Ter contrast: in $\mathbf{Q}$ bevat iedere samenhangscomponent slechts één punt. Immers, bij ieder paar $a, b \in \mathbf{Q}$ met $a < b$ is er een $t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ met $a < t < b$. Q is gelijk aan de vereniging van de disjuncte open deelverzamelingen $A =]-\infty, t[\cap \mathbf{Q}$ en $B =]t, \infty[\cap \mathbf{Q}$. Omdat $a \in A$ en $b \in B$, liggen a en b niet in dezelfde samenhangscomponent van $\mathbf{Q}$.

Definitie 1.5.2 Is $(V, \mathcal{O})$ een topologische ruimte, dan is een *kromme in* V van x naar y een continue afbeelding γ van een interval $[a, b]$ in $\mathbf{R}$ naar V, met $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$. Omdat I samenhangend is en γ continu, is $\gamma(I)$ een samenhangende deelverzameling van V. Men noemt V *boogsamenhangend*, als er voor ieder paar $x, y \in V$ een kromme γ in V van x naar y bestaat. Een boogsamenhangende ruimte is samenhangend. $\oslash$

Men noemt V *lokaal boogsamenhangend* als iedere $x \in V$ een boogsamenhangende omgeving in V heeft. Neem aan dat dit het geval is. Definieer nu S_x als de collectie van $y \in V$, waarvoor er een kromme in V is die van x naar y loopt. Door krommen achter elkaar te doorlopen, ziet men dat S_x open is en boogsamenhangend. De conclusie is dat in een lokaal boogsamenhangende ruimte V de samenhangscomponenten boogsamenhangende, open en gesloten deelverzamelingen van V zijn.

In een genormeerde lineaire ruimte is iedere bol B boogsamenhangend: neem voor $x, y \in B$ de rechte lijn

$$\gamma(t) = x + t(y - x), \quad t \in [0,\, 1].$$

Daarmee is iedere open deelverzameling van E lokaal boogsamenhangend.

1.6 Continue Lineaire Afbeeldingen

Lemma 1.6.1 *Stel* $(E, \|\cdot\|_E)$ *en* $(F, \|\cdot\|_F)$ *zijn genormeerde lineaire ruimten en zij* A *een lineaire afbeelding van* E *naar* F*. Dan is* A *continu, dan en slechts dan als er een constante* $C \ge 0$ *is, met* *de eigenschap dat*

$$\|A(x)\|_F \leq C \, \|x\|_E \tag{1.6.1}$$

voor alle $x \in E$.

Als $E = \mathbf{R}^n$, dan is iedere lineaire afbeelding $A : E \to F$ continu. Maar als E niet eindig-dimensionaal is, dan is dit niet het geval. Zo is, voor $t \in [a, b]$, de afbeelding $x \mapsto x(t) : C \to \mathbf{R}$ niet continu, als C de ruimte van continue functies in $[a, b]$ is, voorzien van de L^2-norm.

Soms wordt men in een gegeven lineaire ruimte E met twee verschillende normen $\| \cdot \|_1$ en $\| \cdot \|_2$ geconfronteerd. In dit geval moet men bij convergentiekwesties erbij vermelden ten aanzien van welke norm men werkt. De uitspraak, dat de identiteit in E continu is van $(E, \|\cdot\|_1)$ naar $(E, \|\cdot\|_2)$, betekent dat iedere rij in E die convergeert ten aanzien van $\| \cdot \|_1$ ook convergeert ten aanzien van $\| \cdot \|_2$. Men zegt in dit geval dat de norm $\| \cdot \|_1$ *sterker* is dan de norm $\| \cdot \|_2$. Toepassing van (1.6.1) geeft nu dat dit equivalent is met de existentie van een constante $C \geq 0$, waarvoor

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \text{ voor alle } x \in E. \tag{1.6.2}$$

De normen $\| \cdot \|_1$ en $\| \cdot \|_2$ in E heten *equivalent* als $\| \cdot \|_1$ sterker is dan $\| \cdot \|_2$ en vice versa. Anders gezegd, als beide normen dezelfde topologie in E definiëren.

Als $E = \mathbf{R}^n$, dan is de Euclidische norm sterker dan iedere norm $\| \cdot \|$ in E. Maar dan laat

$$| \, \|x\| - \|y\| \, | \leq \|x - y\| \leq C \, \|x - y\|_{\text{Eucl}}$$

zien dat dat $x \mapsto \|x\|$ continu is ten aanzien van de Euclidische norm. De sfeer met straal 1 om de oorsprong is compact, het beeld B onder $x \mapsto \|x\|$ is daarmee compact in $\mathbf{R}$, dus gesloten. Dit geeft dat $c := \inf B \in B$, dus $c > 0$. Daarmee is $\|x\| \geq c$ zodra $\|x\|_{\text{Eucl}} = 1$, hetgeen impliceert dat

$$\|x\|_{\text{Eucl}} \leq \tfrac{1}{c}\|x\|$$

voor alle $x \in \mathbf{R}^n$. Conclusie:

Stelling 1.6.2 *In een eindig-dimensionale lineaire ruimte zijn alle normen equivalent.*

Zijn E en F genormeerde lineaire ruimten, dan noteren we met $\mathrm{L}(E, F)$ de verzameling van alle continue lineaire afbeeldingen van E naar F. Met de puntsgewijze optelling en scalairvermenigvuldiging is $\mathrm{L}(E, F)$ een lineaire ruimte. Voor iedere $A \in \mathrm{L}(E, F)$ schrijven we

$$\|A\| = \inf\{C \geq 0 \mid \|A(x)\|_F \leq C \, \|x\|_E \text{ voor alle } x \in E\}. \tag{1.6.3}$$

De functie $A \mapsto \|A\|$ definieert een norm in $\mathrm{L}(E, F)$, de *operatornorm* genaamd.

Er geldt dat

$$\|A(x)\|_F \leq \|A\| \cdot \|x\|_E$$

voor iedere $x \in E$, $A \in \mathrm{L}(E, F)$, een prettige schatting in het gebruik.

Als $E = \mathbf{R}^n$ en $F = \mathbf{R}^p$, dan is iedere lineaire afbeelding van E naar F continu. Een lineaire afbeelding A van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}^p$ worden gegeven door haar *matrix* A_{ij}:

$$A(x)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j, \quad x \in \mathbf{R}^n, \; 1 \leq i \leq p. \tag{1.6.4}$$

De matrix van A wordt gewoonlijk genoteerd als een rechthoek, met A_{ij} in de i-de rij en de j-de kolom. De j-de kolom is gelijk aan het beeld van de j-de basisvector.

De afbeelding die aan $A \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ zijn matrix toevoegt is een lineair isomorfisme van $\mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ naar $\mathbf{R}^{np}$. De eindig-dimensionaliteit van $\mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ geeft dat iedere norm in $\mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ equivalent is met de operatornorm.

Deze opmerkingen over equivalentie van normen dienen vooral om duidelijk te maken dat men zich er in de eindig-dimensionale situatie niet aan hoeft te storen als men met andere normen geconfronteerd wordt dan die waaraan men gewend was. Voor convergentiebeschouwingen en grootte-orde schattingen maakt dit dan geen verschil.

Het toelaten van oneindig-dimensionale lineaire ruimten in de discussie dient om het oog te openen voor de mogelijkheid om de theorie tot oneindig-dimensionale variëteiten te generaliseren. Hoewel hiervan interessante toepassingen bestaan, zullen we ons in dit college niet op dit terrein begeven.

1.7 Differentieerbare Afbeeldingen

Definitie 1.7.1 Zij E en F genormeerde lineaire ruimten, $x \in E$, U een omgeving van x in E en f een afbeelding van U naar F. Men noemt f *differentieerbaar* in het punt $x \in U$, indien er een $A \in \mathrm{L}(E, F)$ is, waarvoor

$$\lim_{h \to 0,\, h \in E,\, h \neq 0} \|f(x+h) - f(x) - A(h)\|_F / \|h\|_E = 0. \tag{1.7.1}$$

De $A \in \mathrm{L}(E, F)$ hierin is eenduidig bepaald en heet de *totale afgeleide* $\mathrm{D}\, f(x)$ van f in het punt x. $\oslash$

Als $E = \mathbf{R}$, dan is $A(h) = h\, A(1)$ en we noteren

$$f'(x) = \mathrm{D}\, f(x)(1) = \lim_{h \to 0,\, h \neq 0} \tfrac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] \in F \tag{1.7.2}$$

voor de *afgeleide* van f in het punt x. In deze situatie kunnen we f interpreteren als een kromme in F. Interpreteren we x als de tijdsvariabele en $f(x)$ als de positie, dan krijgt de vector $f'(x) \in F$ de interpretatie van de *snelheid* ten tijde x van de beweging f.

Als $E = \mathbf{R}^n$, dan is

$$A(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j\, A(e(j)),$$

als $e(j)$ de j-de basisvector in $\mathbf{R}^n$ voorstelt. Dat wil zeggen, $e(j)_j = 1$, $e(j)_k = 0$ als $k \neq j$. We zien nu dat $A(e(j))$ gelijk is aan de afgeleide in x_j van de functie

$$\xi_j \mapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, \xi_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \tag{1.7.3}$$

van één variabele. Deze afgeleide heet de *partiële afgeleide* in het punt x van f met betrekking tot de j-de variabele en wordt met

$$\partial_j f(x) = \tfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \mathrm{D}\, f(x)(e(j)) \tag{1.7.4}$$

genoteerd. Men noemt f partieel differentieerbaar met betrekking tot de j-de variabele, in het punt x, als (1.7.3) differentieerbaar is in het punt x_j. We hebben hiermee vastgesteld dat als f differentieerbaar is, dan is f partieel differentieerbaar met betrekking tot iedere variabele.

Is $F = \mathbf{R}^p$, dan kunnen we $f(x)$ schrijven als

$$f(x) = (f_1(x),\, f_2(x), \ldots,\, f_p(x)),$$

waarin iedere f_i een reëelwaardige functie is op U, de i-de *coördinaatsfunctie* van f genaamd. De i-de coördinaat van $\mathrm{D}\, f(x)(h)$ is gelijk aan $\mathrm{D}\, f_i(x)(h)$, op deze manier kan de berekening van $\mathrm{D}\, f(x)$ teruggebracht worden tot de berekening van de afgeleiden van de reëelwaardige functies f_i.

Als $F = \mathbf{R}$, dan is $\mathrm{D}\, f(x) \in \mathrm{L}(E, \mathbf{R})$. In dit geval is het gebruikelijker dat de totale afgeleide met een kleine letter d genoteerd wordt, dus

$$\mathrm{D}\, f(x) = \mathrm{d}f(x) \;\text{ voor reëelwaardige functies }\; f. \tag{1.7.5}$$

De lineaire ruimte $\mathrm{L}(E, \mathbf{R})$ heet de *topologische duale* van E en wordt met E' genoteerd.

De ruimte van àlle lineaire functies : $E \to \mathbf{R}$ heet de *algebraïsche duale* E^* van E. Als E eindig-dimensionaal is, dan is $E' = E^*$. Bovendien heeft in dit geval E^* dezelfde dimensie als E. In concreto, als $E = \mathbf{R}^n$ dan wordt $A \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ geïdentificeerd met zijn matrix, een rijvector ter lengte n.

Als $E = \mathbf{R}^n$ en $F = \mathbf{R}^p$, dan heeft $\mathrm{D}\, f(x) \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ de matrix $\partial_j f_i(x)$, ook wel de *Jacobi-matrix* van de afbeelding f genoemd. De betekenis van deze matrix is dat, voor $h \to 0$, de lineaire benadering van $f_i(x + h) - f_i(x)$ gegeven wordt door

$$\sum_{j=1}^{n} \tfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\, h_j. \tag{1.7.6}$$

Als $p = n$, dan kan f opgevat worden als een transformatie in $\mathbf{R}^n$. In dit geval is $\mathrm{D}\, f(x)$ een lineaire transformatie in $\mathbf{R}^n$, waarvan de determinant gevormd kan worden. Dit getal heet de *Jacobi-determinant* van f in het punt x, deze treedt op als factor bij de substitutie van van variabelen $y = f(x)$ in een n-dimenionale integraal.

Een belangrijke rekenregel is de *kettingregel* voor differentieerbare afbeeldingen.

Stel E, F en G zijn genormeerde lineaire ruimten. Zij f een afbeelding van een omgeving U van a in E, naar F. Verder g een afbeelding van een omgeving V van $f(a)$ in F, naar G. De samenstelling $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ is een afbeelding van $D = U \cap f^{-1}(V)$ naar G. De kettingregel zegt nu:

Stelling 1.7.1 *Neem aan dat f differentieerbaar is in het punt a en g differentieerbaar is in het punt $f(a)$. Dan is $g \circ f : D \to G$ differentieerbaar is in het punt a en*

$$\mathrm{D}(g \circ f)(a) = \mathrm{D}\, g(f(a)) \;\circ\; \mathrm{D}\, f(a). \tag{1.7.7}$$

Merk op dat de continuïteit van $f(x)$ in $x = a$ geeft dat D een omgeving is van a in E.

Het idee achter de kettingregel is dat $f(a+h) - f(a)$, voor kleine $\|h\|_E$, lineair benaderd wordt door $\mathrm{D}\, f(a)(h)$. Op zijn beurt wordt $g(b+k)-g(b)$ voor kleine $\|k\|_F$ lineair benaderd door $\mathrm{D}\, g(b)(k)$.

Hierin $b = f(a)$ en $k = \mathrm{D}\, f(a)(h)$ substituerend, krijgen we het vermoeden dat $g(f(a+h)) - g(f(a))$ lineair benaderd wordt door $\mathrm{D}\, g(f(a))(\mathrm{D}\, f(a)(h))$.

Als $A \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n,\, \mathbf{R}^p)$, $B \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^p,\, \mathbf{R}^q)$, dan is de matrix van $B \circ A \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n,\, \mathbf{R}^q)$ gelijk aan het (matrix-)product van de matrices van B en van A. Hiermee krijgt, als $E = \mathbf{R}^n$, $F = \mathbf{R}^p$, $G = \mathbf{R}^q$, de kettingregel (1.7.7) de gedaante

$$(\partial_i (g_r \circ f))\,(a) = \sum_{j=1}^{p} (\partial_j g_r)\,(f(a))\;(\partial_i f_j)\,(a). \tag{1.7.8}$$

Soms ziet men dit in een vereenvoudigde notatie:

$$\frac{\partial z_r}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial z_r}{\partial y_j}\,\frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

Hierbij heeft men $y = f(x)$, $z = g(y) = (g \circ f)(x)$ gebruikt om de letter f te vervangen door y, terwijl z zowel staat voor de functie $z = g(y)$ van y als voor de functie $z = (g \circ f)(x)$ van x. In de notatie is bovendien de bedoeling vervat dat de afgeleide van z_r naar x_j berekend moet worden in het punt x, terwijl de afgeleide van z_r naar y_i berekend moet worden in het punt $y = f(x)$. Dit is best handig in het gebruik, als je goed in de gaten houdt wat er bedoeld wordt.

Als f en g twee differentieerbare reëelwaardige functies zijn van de reële variabele x, dan is het product $f\,g : x \mapsto f(x)\,g(x)$ differentieerbaar en

$$(f\,g)'(x) = g(x)\,f'(x) + f(x)\,g'(x). \tag{1.7.9}$$

Dit kan gezien worden als een toepassing van de kettingregel, door $f\,g$ te zien als de samenstelling van de afbeelding $h : x \mapsto (f(x),\, g(x)) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ met de productafbeelding $\mu : (u,\, v) \mapsto u\,v : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Dit lijkt misschien wat gekunsteld, maar als men naar de termen kijkt die in het bewijs van (1.7.9) verschijnen, dan zijn dat dezelfde als in het bewijs van de kettingregel voor $\mu \circ h$.

1.8 Hogere Orde Afgeleiden

Zij nu f een afbeelding van een open deelverzameling U van een genormeerde lineaire ruimte E, naar een genormeerde lineare ruimte F. Men zegt dat f *differentieerbaar* is, als f differentieerbaar is in ieder punt x van U. In dit geval wordt

$$\mathrm{D}\, f : x \mapsto \mathrm{D}\, f(x)$$

een afbeelding van U naar $\mathrm{L}(E,\, F)$. Nu is $\mathrm{L}(E,\, F)$ een genormeerde lineaire ruimte (met de operatornorm), dus kunnen we van $\mathrm{D}\, f$ de continuïteit en differentieerbaarheid onderzoeken. Men zegt dat f *continu differentieerbaar* is, als $f : U \to F$ differentieerbaar is en $\mathrm{D}\, f : U \to \mathrm{L}(E,\, F)$ continu. De ruimte van continu differentieerbare afbeeldingen van U naar F wordt met $\mathrm{C}^1(U,\, F)$ aangeduid.

Als $E = \mathbf{R}^n$, dan is $f \in \mathrm{C}^1(U,\, F)$, dan en slechts dan als voor iedere $1 \le j \le n$ de afbeelding f partieel differentieerbaar is naar de j-de variabele en $\partial_j f$ een continue afbeelding is van U naar F. Indien ook nog $F = \mathbf{R}^p$, dan luidt de voorwaarde dat voor iedere $1 \le i \le p$ en $1 \le j \le n$ de functie

f_i partieel differentieerbaar is naar de j-variabele en $\partial_j f_i$ een continue reëelwaardige functie is op U.

Opgemerkt kan worden dat partieel differentiëren een begrip is dat afhangt van de keuze van lineaire coördinaten, terwijl differentieerbaarheid volgens (1.7.1) daar niet van afhangt. Differentieerbaarheid volgens (1.7.1) is een eerste voorbeeld van een "coördinaatonafhankelijk begrip".

Hogere orde differentieerbaarheid kan nu met inductie naar de orde worden ingevoerd. We definiëren, met inductie over k:

$$\mathrm{L}^0(E,\,F) = F,\ \ \mathrm{L}^k(E,\,F) = \mathrm{L}(E,\,\mathrm{L}^{k-1}(E,\,F)) \text{ als } \ k > 0. \tag{1.8.1}$$

De afbeelding $f : U \to F$ is *k keer differentieerbaar*, als $\mathrm{D}^{k-1} f : U \to \mathrm{L}^{k-1}(E,\,F)$ differentieerbaar is. Daarbij is de k-de totale afgeleide $\mathrm{D}^k f(x)$ van f in het punt $x \in U$ gedefinieerd als

$$\mathrm{D}^k f(x) = \mathrm{D}(\mathrm{D}^{k-1} f)(x) \in \mathrm{L}^k(E,\,F). \tag{1.8.2}$$

Men zegt dat f *k keer continu differentieerbaar* is, als bovendien $\mathrm{D}^k f$ een continue afbeelding is van U naar $\mathrm{L}^k(E,\,F)$. De ruimte van k keer continu differentieerbare afbeeldingen van U naar F wordt met $\mathrm{C}^k(U,\,F)$ aangeduid. Als $F = \mathbf{R}$ dan schrijft men vaak $\mathrm{C}^k(U)$ in plaats van $\mathrm{C}^k(U,\,\mathbf{R})$.

De notatie wordt verder aangevuld met $\mathrm{C}^0(U,\,F)$ voor de de ruimte van continue afbeeldingen van U naar F. Men noemt de afbeelding $f : U \to F$ *willekeurig vaak differentieerbaar* of *glad* als $f \in \mathrm{C}^k(U,\,F)$ voor iedere k. De ruimte van gladde afbeeldingen van U naar F wordt met $\mathrm{C}^\infty(U,\,F)$ genoteerd. Het voordeel van deze ruimte is, dat bij differentiatie geen boekhouding bijgehouden hoeft te worden van de differentieerbarheidsgraad. Als $f \in \mathrm{C}^\infty$ dan is $\mathrm{D} f \in \mathrm{C}^\infty$, terwijl voor eindige k slechts geldt dat $\mathrm{D} f \in \mathrm{C}^{k-1}$ als $f \in \mathrm{C}^k$. Vaak ziet men stellingen geformuleerd in de categorie van gladde functies, terwijl het bewijs laat zien dat ze in een grotere ruimte C^k, met eindige, kleine k, geldig zijn. De auteur heeft dan geen zin gehad om de differentieerbaarheidsgraad bij te houden; wij zullen dit ook wel eens doen.

Zij $A \in \mathrm{L}^k(E,\,F)$. Voor iedere $h_1 \in E$ is $A(h_1) \in \mathrm{L}^{k-1}(E,\,F)$. Voor iedere $h_2 \in E$ is $(A(h_1))(h_2) \in \mathrm{L}^{k-2}(E,\,F)$. Zo doorgaand hebben we tenslotte aan een k-tal vectoren $h_1, \ldots,\, h_k \in E$ een element van F toegevoegd. Om een oerwoud van haakjes te vermijden, noteren we dit element als $A(h_1, \ldots,\, h_k)$. Beschouwd als functie van $(h_1, \ldots,\, h_k) \in E^k$, het k-voudige Cartesisch product van E met zichzelf, wordt hiermee A een afbeelding van E^k naar F. Deze afbeelding is *k-lineair* in de zin dat, voor iedere j, de afbeelding

$$h_j \mapsto A(h_1, \ldots,\, h_{j-1},\, h_j,\, h_{j+1}, \ldots,\, h_k) \tag{1.8.3}$$

lineair is van E naar F. In het bijzonder krijgen we dat

$$A(t\,h_1, \ldots,\, t\,h_k) = t^k\,A(h_1, \ldots,\, h_k)$$

voor iedere $t \in \mathbf{R}$. Daarmee is A geen lineaire afbeelding van E^k naar F zodra $k > 1$ en $A \neq 0$, maar gedraagt zich op iedere rechte lijn door de oorsprong als een homogene functie van de graad k.

Zij $f \in \mathrm{C}^k(U,\,F)$ en $x \in U$. Voor iedere $h \in E$ definieert $g(t) = f(x + th)$ dan een C^k-functie van één reële variabele t, voor t in een omgeving I van 0 in $\mathbf{R}$. Daarbij is $[0,\,1] \subset I$ als $\|h\| < \delta$ en $B(x;\,\delta) \subset U$. Met inductie naar k krijgen we voor de k-de orde afgeleide van g de formule

$$g^{(k)}(t) = \mathrm{D}^k f(x + th)(h,\,h, \ldots,\,h).$$

De Taylorontwikkeling voor een functie van één variabele geeft:

$$g(1) = \sum_{j=0}^{k-1} \tfrac{1}{j!} g^{(j)}(0) + \int_0^1 \tfrac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\, g^{(k)}(t)\, dt.$$

Dit leidt meteen tot de volgende Taylorontwikkeling voor f:

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{k} \tfrac{1}{j!}\, \mathrm{D}^j f(x)(h,\, h, \dots h) + R_k(x,h), \text{ met}$$

$$R_k(x,h) = \int_0^1 \tfrac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\, [g^{(k)}(t) - g^{(k)}(0)]\, dt. \tag{1.8.4}$$

Is $\|\,\mathrm{D}^k f(y) - \mathrm{D}^k f(x)\| \le \varepsilon$ zodra $\|y - x\| < \delta$, dan lezen we hieruit de volgende schatting af voor de restterm $R_k(x,h)$:

$$\|R_k(x,h)\| \le \tfrac{1}{k!}\varepsilon\, \|h\|^k \;\text{ als }\; \|h\| < \delta. \tag{1.8.5}$$

Als $E = \mathbf{R}^n$, dan zijn de herhaalde partiële afgeleiden van f gelijk aan

$$\tfrac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \mathrm{D}^k f(x)(e(i_1), \dots,\, e(i_k)), \tag{1.8.6}$$

als de $e(j) \in \mathbf{R}^n$ de standaardbasis in $\mathbf{R}^n$ voorstellen. Het is bekend dat voor C^2-functies f geldt dat

$$\tfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\, \partial x_j} = \tfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\, \partial x_i} \tag{1.8.7}$$

voor alle i en j. Zie bijvoorbeeld Analyse B. Dit berust op het volgende

Lemma 1.8.1 *Zij S en T intervallen in $\mathbf{R}$, f een continue functie in $S \times T$. Veronderstel dat $f(s,\, t)$ differentieerbaar is naar beide variabelen, dat $s \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(s,\, t)$ differentieerbaar is en dat de functies*

$$\begin{aligned} (s,\, t) &\mapsto \tfrac{\partial f(s,t)}{\partial t}, \\ (s,\, t) &\mapsto \tfrac{\partial f(s,t)}{\partial s} \;\text{ en} \\ (s,\, t) &\mapsto \tfrac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s\, \partial t} \end{aligned}$$

continu zijn in $S \times T$. Dan is $t \mapsto \frac{\partial f(s,t)}{\partial s}$ differentieerbaar en

$$\tfrac{\partial^2 f(s,t)}{\partial t\, \partial s} = \tfrac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s\, \partial t} \tag{1.8.8}$$

voor alle $(s,\, t) \in S \times T$.

Bewijs Kies $s_0 \in S$, $t_0 \in T$. Uit de aannamen volgt dat

$$\begin{aligned} f(s,\, t) &= f(s,\, t_0) + \int_{t_0}^{t} \tfrac{\partial f(s,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau \\ &= f(s,\, t_0) + \int_{t_0}^{t} \tfrac{\partial f(s_0,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \int_{s_0}^{s} \tfrac{\partial^2 f(\sigma,\tau)}{\partial\sigma\partial\tau}\, d\sigma\, d\tau. \end{aligned}$$

Omdat de integrand in de dubbelintegraal een continue functie van beide variabelen is, mogen we daarin de integratievolgorde verwisselen. Daarna geeft differentiatie naar s dat

$$\frac{\partial f(s,t)}{\partial s} = \frac{\partial f(s,t_0)}{\partial s} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^2 f(s,\tau)}{\partial s \partial \tau}\, d\tau,$$

Dit is differentieerbaar met betrekking tot t en de afgeleide naar t is gegeven door (1.8.8). $\square$

Met inductie naar k geeft (1.8.7) dat iedere permutatie van de rangnummers $i_1, \ldots, i_k$ in (1.8.6) dezelfde grootheid oplevert. Dit geeft ook dat de k-lineaire afbeelding $\mathrm{D}^k f(x) : E^k \to F$ symmetrisch is onder verwisseling van de argumenten.

De symmetrie van de hogere orde partiële afgeleiden laat het toe om deze allemaal in de gedaante

$$\partial^\alpha f(x) = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f(x) \tag{1.8.9}$$

te schrijven. Hierin is $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, met $\alpha_j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ een zogenaamde *multi-index.* Men noemt

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \tag{1.8.10}$$

de *orde* van α. Met de notaties

$$h^\alpha = \prod_{j=1}^{n} h_j^{\alpha_j}, \quad \alpha! = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j! \tag{1.8.11}$$

krijgen we dat

$$\tfrac{1}{k!}\, \mathrm{D}^k f(x)(h, \ldots, h) = \sum_{|\alpha|=k} \tfrac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x). \tag{1.8.12}$$

Dit substituerend in (1.8.4) krijgen we de Taylorformule voor functies van n variabelen in termen van de partiële afgeleiden tot en met de orde k:

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \tfrac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) + R_k(x,h). \tag{1.8.13}$$

Met inductie over k geeft de kettingregel dat $g \circ f \in \mathrm{C}^k$ als $f \in \mathrm{C}^k$ en $g \in \mathrm{C}^k$ en men krijgt een recursieve formule voor $\mathrm{D}^k(g \circ f)(x)$ in termen van de afgeleiden van f en van g tot en met de orde k. De uitwerking van deze formule wordt in een hoog tempo zeer gecompliceerd bij toenemende k. Voor $E = \mathbf{R}^n$ worden deze formules in termen van de hogere orde partiële afgeleiden net zo gigantisch.

1.9 Analytische Afbeeldingen

Wanneer $f \in \mathrm{C}^\infty(U, F)$ en we hebben een lokaal uniforme schatting van de vorm

$$\| \mathrm{D}^k f(x) \| \leq C\, k!/\delta^k \text{ voor alle } k,$$

dan geven (1.8.4) en (1.8.5) dat

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{1}{j!} \, \mathrm{D}^j f(a)(h, \dots, h) \tag{1.9.1}$$

als $x = a + h$ en $\|h\| < \delta$. Anders gezegd, de Taylorreeks van f convergeert en $f(x)$ wordt, voor x dichtbij a gegeven door de Taylorreeks in het punt a. Is dit het geval voor iedere $a \in U$, dan noemt men f een *reëel-analytische afbeelding* van U naar F.

De verzameling van alle reëel-analytische afbeeldingen van U naar F wordt met $\mathrm{C}^\omega(U, F)$ aangeduid. Hierbij is de conventie dat $\infty < \omega$, zodat altijd $\mathrm{C}^k \supset \mathrm{C}^l$ correspondeert met $k \le l$.

Als functie van h is het rechterlid in (1.9.1) een machtreeks. Net als voor functies van één reële variabele, definieert iedere convergente machtreeks een reëel-analytische functie. Dat wil zeggen, de machtreeks is willekeurig vaak differentieerbaar en de coefficienten corresponderen met de afgeleiden. Er geldt een kettingregel voor reëel-analytische afbeeldingen: $g \circ f \in \mathrm{C}^\omega$ als $f \in \mathrm{C}^\omega$ en $g \in \mathrm{C}^\omega$. Dit is equivalent met de uitspraak dat substitutie van een een convergente machtreeks in een convergente machtreeks opnieuw een convergente machtreeks oplevert. Ook is de afgeleide van een reëel-analytische functie weer reëel-analytisch.

We beschouwen nu $\mathbf{R}^n$ als deelverzameling van $\mathbf{C}^n \simeq \mathbf{R}^{2n}$, een complex-lineaire ruimte van dimensie n, maar van dimensie $2n$ als we $\mathbf{C}^n$ als lineaire ruimte over $\mathbf{R}$ opvatten.

Als een $\mathbf{R}^p$-waardige machtreeks in $h \in \mathbf{R}^n$ convergeert voor $\|h\| < \delta$, dan convergeert deze meteen ook voor $h \in \mathbf{C}^n$ met $\|h\| < \delta$. De $\mathbf{C}^p$-waardige functie f van $h \in \mathbf{C}^n$ die dit oplevert, heeft de eigenschap dat $\mathrm{D} f(x)$ een complex-lineaire afbeelding is van $\mathbf{C}^n$ naar $\mathbf{C}^p$. We herinneren hier aan het feit dat als E en F complex-lineaire ruimten zijn, dan is een afbeelding $A : E \to F$ complex-lineair, dan en slechts dan als $A : E \to F$ reëel lineair is en bovendien voldoet aan $A(ih) = iA(h)$ voor alle $h \in E$.

Zij nu Ω open in $\mathbf{C}^n$. Een afbeelding $f : \Omega \to \mathbf{C}^p$ heet *complex-analytisch* of *holomorf*, als $f \in \mathrm{C}^1(\Omega, \mathbf{C}^p)$ en $\mathrm{D} f(x)$ een complex-lineaire afbeelding is van $\mathbf{C}^n$ naar $\mathbf{C}^p$, voor iedere $x \in \Omega$. De ruimte van holomorfe afbeeldingen van Ω naar $\mathbf{C}^p$ wordt met $\mathcal{O}(\Omega, \mathbf{C}^p)$ aangeduid.

Uit het voorgaande blijkt dat iedere reëel-analytische afbeelding $f : U \to \mathbf{R}^p$, met U open in $\mathbf{R}^n$, een uitbreiding heeft tot een complex-analytische afbeelding φ van Ω naar $\mathbf{C}^p$, waarbij Ω een open deelverzameling is van $\mathbf{C}^n$, $U \subset \Omega$.

Omgekeerd heeft iedere complex-analytische functie $f : \Omega \to \mathbf{C}^p$ een convergente machtreeksontwikkeling. Zij γ_j, voor $1 \le j \le n$, kringen in $\mathbf{C}$ met de eigenschap dat $x \in \Omega$ zodra voor iedere j de j-de coördinaat x_j van x op of binnen γ_j ligt. De *integraalformule van Cauchy*, toegepast op ieder van de variabelen, geeft dan dat

$$f(\zeta) = (\tfrac{1}{2\pi i})^n \int_{\gamma_n} \dots \int_{\gamma_1} \prod_{j=1}^{n} \tfrac{1}{z_j - \zeta_j} \, f(z) \, dz_1 \dots dz_n$$

zodra ζ_j binnen γ_j ligt voor iedere j. In de integrand

$$\tfrac{1}{z_j - \zeta_j} = \sum_{k=0}^{\infty} (z_j - a_j)^{-k-1} \, (\zeta_j - a_j)^k$$

substituerend, krijgen we de gewenste machtreeksontwikkeling in het punt a (met a_j binnen γ_j voor iedere j).

Daarmee is de uitspraak, dat een afbeelding f reëel-analytisch is, equivalent met de uitspraak dat f een uitbreiding heeft tot een complex-analytische afbeelding φ, gedefinieerd op een complexe omgeving van het definitiegebied van f.

Deze identificatie leidt bijvoorbeeld tot het volgende eenvoudige bewijs voor de kettingregel voor reëel-analytische afbeeldingen. Als f, respectievelijk g reëel-analytisch zijn, dan hebben ze complex-analytische uitbreidingen φ, respectievelijk ψ. Vanwege de kettingregel voor C^1-afbeeldingen, is $\psi \circ \phi \in \mathrm{C}^1$ en geldt dat

$$\mathrm{D}(\psi \circ \varphi)(x) = \mathrm{D}\,\psi(\phi(x)) \circ \mathrm{D}\,\varphi(x).$$

Maar het rechterlid is, als samenstelling van twee complex-lineaire afbeeldingen, een complex-lineaire afbeelding en de conclusie is daarom dat $\psi \circ \varphi$ complex-analytisch is. Daarmee is $g \circ f$, de beperking van $\psi \circ \varphi$ tot het reële domein, een reëel-analytische afbeelding.

Voorbeeld 1.9.1 Niet iedere C^∞-afbeelding is reëel-analytisch. Zo is de functie $\chi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, gedefinieerd door $\chi(x) = e^{-1/x}$ als $x > 0$ en $\chi(x) = 0$ als $x \leq 0$ willekeurig vaak differentieerbaar. De Taylorreeks in de oorsprong heeft alle termen gelijk aan 0, dus $\chi(x)$ is niet gelijk aan deze Taylorreeks als $x > 0$. Hiermee is $\chi(x)$ in geen enkele omgeving van $x = 0$ reëel-analytisch. $\oslash$

1.10 De Impliciete-functiestelling

In veel situaties wordt men geconfronteerd met een stelsel van n vergelijkingen

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1, \dots, x_n;\, y_1, \dots, y_p) & = & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n;\, y_1, \dots, y_p) & = & 0, \end{array} \tag{1.10.1}$$

voor n reële onbekenden $x_1, \dots, x_n$, met p reële parameters $y_1, \dots, y_p$. Soms heeft men zelf de vrijheid welke van de variabelen men als onbekenden en welke als parameters wil opvatten, in andere gevallen is de rolverdeling door het probleem vastgelegd.

In de nu volgende stelling noteren we de totale afgeleide van $x \mapsto f(x,\, b)$ in het punt $x = a$ met $\frac{\partial f}{\partial x}(a,\, b)$. Dit is een lineaire afbeelding van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}^n$, met

$$\text{matrix van } \frac{\partial f}{\partial x}(a,\, b) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a,\, b)|_{1 \leq i,j \leq n}. \tag{1.10.2}$$

Voor een lineaire afbeelding A van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}^n$ gelden de volgende equivalenties: A is inverteerbaar (bijectief) $\Longleftrightarrow$ A is injectief $\Longleftrightarrow$ de rijen van de matrix van A zijn lineair onafhankelijk $\Longleftrightarrow$ A is surjectief $\Longleftrightarrow$ de kolommen van de matrix van A zijn lineair onafhankelijk.

Stelling 1.10.1 *Veronderstel dat W een open deelverzameling is van $\mathbf{R}^{n+p} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ en zij $f \in \mathrm{C}^k(W, \mathbf{R}^n)$, $k \geq 1$. Verder nemen we aan dat $(a, b) \in W$, $f(a, b) = 0$ en dat $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ een inverteerbare lineaire afbeelding is. Dan is er een open omgeving A van a in $\mathbf{R}^n$ en een open omgeving B van b in $\mathbf{R}^p$, met de eigenschap dat er bij iedere $y \in B$ precies één $x = \psi(y) \in A$ is, die voldoet aan (1.10.1). Verder is $\psi \in \mathrm{C}^k(B, \mathbf{R}^n)$.*

De eenduidigheid geeft dat $\psi(b) = a$. De functie ψ is "impliciet gedefinieerd" door middel van de vergelijking $f(\psi(y),\, y) \equiv 0$, vandaar dat de bovenstaande stelling de "impliciete-functiestelling" genoemd wordt. Een bewijs en uitgebreide bespreking kan in het Analyse C dictaat gevonden worden.

Voor iedere $1 \leq i \leq n$ en $1 \leq k \leq p$ levert differentiatie van $f_i(\psi(y),\, y) \equiv 0$ naar y_k dat

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x,y)}{\partial y_j} \frac{\partial \psi_j(y)}{\partial y_k} = -\frac{\partial f_i(x,y)}{\partial y_k}, \quad x = \psi(y), \tag{1.10.3}$$

de *variatievergelijkingen* genoemd. Vergeet hierbij niet dat de afgeleiden genomen worden in de punten $(x,\, y)$ waarvoor $x = \psi(y)$.

De continuïteit van $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\psi(y),\, y)$ combinerend met de inverteerbaarheid hiervan in $y = b$, krijgen we dat $\frac{\partial f}{\partial x}(\psi(y),\, y)$ inverteerbaar is voor alle y in een open omgeving B van b. Hiermee kan $\mathrm{D}\,\psi(y)$ uit de variatievergelijkingen (1.10.3) opgelost worden:

$$\mathrm{D}\,\psi(y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(\psi(y),\, y)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial y}(\psi(y),\, y), \;\; y \in B. \tag{1.10.4}$$

Hierin is

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,\, b)$$

een notatie voor de totale afgeleide van $y \mapsto f(a,\, y)$ in het punt $y = b$; dit is een lineaire afbeelding van $\mathbf{R}^p$ naar $\mathbf{R}^n$. In (1.10.4) is deze afgeleide genomen in $b = y$ en $a = \psi(y)$ genomen, alles bij elkaar is dit een enigszins rammelende notatie. Uit (1.10.4) lezen we met inductie naar k af, dat $\psi \in \mathrm{C}^k$ als $f \in \mathrm{C}^k$. Daarmee volgt Stelling 1.10.1 voor $k > 1$ uit Stelling 1.10.1 voor $k = 1$.

De impliciete-functiestelling geldt ook voor reëel-analytische functies. Dat wil zeggen, met overal C^k vervangen door C^ω. Een bewijs hiervan kan gegeven worden door overgang op de complex-analytische uitbreiding $\tilde{f}$ van f naar een open omgeving $\tilde{W}$ van W in $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p$. Er geldt dat $\tilde{f} \in \mathrm{C}^1(\tilde{W},\, \mathbf{C}^n)$. Verder is

$$\tilde{L} := \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(a, b) : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$$

gelijk aan de complex-lineaire uitbreiding van

$$L := \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n.$$

$\tilde{L}$ is inverteerbaar, zij heeft namelijk als inverse de complex-lineaire uitbreiding van L^{-1}.

De impliciete-functiestelling geeft een omgeving $\tilde{B}$ van b in $\mathbf{C}^p$ en een $\tilde{\psi} \in \mathrm{C}^1(\tilde{B},\, \mathbf{C}^n)$, waarvoor $\tilde{\psi}(b) = a$ en $\tilde{f}(\tilde{\psi}(y),\, y) = 0$ voor alle $y \in \tilde{B}$. Verder kunnen we $\tilde{B}$ zó klein kiezen, dat (1.10.4) geldt, met f, ψ en B vervangen door $\tilde{f}$, $\tilde{\psi}$ en $\tilde{B}$. Maar hieruit lezen we af dat, voor iedere $y \in \tilde{B}$, de afbeelding $\mathrm{D}\,\tilde{\psi}(y)$ complex-lineair is, hetgeen betekent dat $\tilde{\psi}$ een complex-analytische afbeelding is.

Voor $y \in B \cap \tilde{B}$ hebben we nu

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(\psi(y),\, y) = f(\psi(y),\, y) = 0 \;\text{ en} \\ &\tilde{f}(\tilde{\psi}(y),\, y) = 0. \end{aligned}$$

Vanwege de lokale eenduidigheid van de oplossingen x van de vergelijking $\tilde{f}(x, y) = 0$ concluderen we hieruit dat $\psi(y) = \tilde{\psi}(y)$ voor alle y in een omgeving van b in $\mathbf{R}^n$. Dit laat zien dat ψ reëel-analytisch is.

Zij U en V open deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$. Een C^k*-diffeomorfisme* van U naar V is een bijectieve afbeelding φ van U naar V, met de eigenschap dat $\varphi \in \mathrm{C}^k(U, \mathbf{R}^n)$ en $\psi := \varphi^{-1} \in \mathrm{C}^k(V, \mathbf{R}^n)$. Een dergelijke afbeelding kan gebruikt worden als *substitutie van variabelen*; vanwege de kettingregel geldt voor een reëelwaardige functie f dat $f \circ \varphi \in \mathrm{C}^k$, dan en slechts dan als $f \in \mathrm{C}^k$.

De kettingregel toepassend op $\psi \circ \varphi(x) = x$, $x \in U$ en op $\varphi \circ \psi(y) = y$, $y \in V$, zien we dat $\mathrm{D}\,\psi(y)$ een links- en rechtsinverse is van $\mathrm{D}\,\varphi(x)$ als $y = \varphi(x)$. Dit laat zien dat $\mathrm{D}\,\varphi(x)$ inverteerbaar is voor iedere $x \in U$, als φ een C^1-diffeomorfisme is.

Zij U open in $\mathbf{R}^n$, $\varphi \in \mathrm{C}^k(U, \mathbf{R}^n)$, $1 \le k \le \omega$. Dan definieert

$$f(x, y) := \varphi(x) - y$$

een C^k-afbeelding van $U \times \mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}^n$ en $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \mathrm{D}\,\varphi(x)$. Als $a \in U$, $b = \varphi(a)$, dan is aan de voorwaarde voor de impliciete-functiestelling voldaan, wanneer $\mathrm{D}\,\varphi(a) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ inverteerbaar is. De conclusie is in dit geval dat er een open omgeving A van a is en een open omgeving B van B, met de eigenschap dat er bij iedere $y \in B$ precies één $x = \psi(y) \in A$ is, waarvoor $\varphi(x) = y$. Bovendien is $\psi \in \mathrm{C}^k(B, \mathbf{R}^n)$. Zelfs is de beperking van φ tot $A' := A \cap \varphi^{-1}(B)$ een bijectieve afbeelding van de open verzameling A' naar B, met inverse gelijk aan ψ.

Veronderstel nu dat $\mathrm{D}\,\varphi(x)$ bijectief is voor iedere $x \in U$. Dan is $V := \varphi(U)$ een open deelverzameling van $\mathbf{R}^n$. Sterker nog, $\varphi(A)$ is open in $\mathbf{R}^n$ voor iedere open deelverzameling A van U. Vanwege het voorgaande is er bij iedere $a \in U$ een open omgeving A van a in U, met de eigenschap dat $\varphi|_A$ een C^k-diffeomorfisme is van A naar een open deelverzameling van $\mathbf{R}^n$. Een afbeelding φ met deze eigenschappen wordt ook wel een *lokaal* C^k*-diffeomorfisme* genoemd. Voor een lokaal diffeomorfisme φ is het volledig origineel $\varphi^{-1}(\{y\})$ van ieder punt y een discrete deelverzameling van U.

De volgende stelling wordt ook wel de *globale inverse-functiestelling* genoemd.

Stelling 1.10.2 *Zij U open in $\mathbf{R}^n$ en $\varphi \in \mathrm{C}^k(U, \mathbf{R}^n)$. Dan is φ een C^k-diffeomorfisme van U naar een open deelverzameling V van $\mathbf{R}^n$, dan en slechts dan als φ injectief is en $\mathrm{D}\,\varphi(x)$ inverteerbaar is voor iedere $x \in U$.*

Bewijs Dat de voorwaarden noodzakelijk zijn is evident. Neem nu aan dat φ een injectief lokaal diffeomorfisme is. Uit de beschrijving van een lokaal diffeomorfisme volgt dat $V := \varphi(U)$ een open deelverzameling is van $\mathbf{R}^n$. φ is bijectief van U naar V, noem de inverse ψ. Uit de beschrijving van het lokale diffeomorfisme φ volgt ook, dat iedere $y \in V$ een open omgeving B in V heeft, met de eigenschap dat $\psi|_B \in \mathrm{C}^k(B, \mathbf{R}^n)$. Maar dit impliceert dat $\psi \in \mathrm{C}^k(V, \mathbf{R}^n)$: het C^k zijn van een afbeelding is een lokale eigenschap. $\square$

Voorbeeld 1.10.1 Voor de bekende *substitutie van poolcoördinaten*

$$\varphi : (r,\, \theta) \mapsto (r\cos\theta,\, r\sin\theta),$$

moet nog enige zorg besteed worden aan de keuze van het definitiegebied, opdat dit inderdaad een (reëel-analytisch) diffeomorfisme is. Zo is $\mathrm{D}\,\varphi(r, \theta)$ alleen maar inverteerbaar als $r \neq 0$. Ook moet nog een open verzameling $U \subset \mathbf{R}^2$ geselecteerd worden, waarop φ injectief is. $\oslash$

1.11 Opgaven

1.11.1 Zij B de deelverzameling van het vlak $\mathbf{R}^2$ die gelijk is aan de vereniging van twee verschillende cirkels. (Dat wil zeggen, de middelpunten of de stralen zijn verschillend.) Onderscheid daarbij de gevallen dat de cirkels disjunct zijn of niet. Bewijs dat B compact is. Wanneer is B samenhangend? Onderzoek voor welke $b \in B$ er een open omgeving U van b in B is, die homeomorf is met een interval in $\mathbf{R}$.

1.11.2 Beschouw de verzameling C van alle "code's" c, de oneindige rijtjes $c = (c_1, c_2, \ldots)$ met $c_j = 0$ of $c_j = 1$ voor iedere $j \in \mathbf{Z}_{>0}$. Noem een deelverzameling U van C open, als er bij iedere $c \in U$ een $N \in \mathbf{Z}_{>0}$ is, met de eigenschap dat $x \in U$, zodra $x \in C$ en $x_j = c_j$ voor alle j met $1 \leq j \leq N$. Bewijs dat de open deelverzamelingen van C een topologie in C vormen. Bewijs dat C Hausdorff's is en compact. Is C discreet? Bepaal de samenhangscomponenten in C.

Hint voor de compactheid: Stel $\mathcal{U}$ is een open overdekking van C zonder eindige deeloverdekking. Noem $G \subset C$ "groot" als G niet door een eindige deelcollectie van $\mathcal{U}$ overdekt wordt. Bewijs dat als

$$C(c_1, \ldots, c_n) := \{x \in C \mid x_j = c_j \text{ voor } 1 \leq j \leq n\}$$

groot is, dan is er een $c_{n+1} \in \{0, 1\}$, waarvoor $C(c_1, \ldots, c_{n+1}\}$ groot is. Leidt hieruit een tegenspraak af. (Degenen die Topologie gevolgd hebben, kunnen de compactheid van C bewijzen door een beroep te doen op de stelling van Tychonov.)

1.11.3 In deze opgave wordt de coderuimte uit Opgave 1.11.2 geïdentificeerd met een deelverzameling van de reële as.

We beginnen met het segment (= gesloten interval) $I_0 = [0, 1]$. Als I_{k-1} gelijk is aan de vereniging van de disjuncte segmenten $[a_j, b_j]$, dan wordt I_k hieruit verkregen door het open middelste derde deel van ieder segment weg te laten. Dat wil zeggen I_k is de vereniging over j van de segmenten $[a_j, \frac{2}{3}a_j + \frac{1}{3}b_j]$ en $[\frac{1}{3}a_j + \frac{2}{3}b_j, b_j]$. Hiermee zijn de verzamelingen I_k met inductie over k voor alle $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ gedefinieerd. De *Cantorverzameling* is nu gedefinieerd als

$$C_{\mathbf{R}} := \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k.$$

Bewijs dat $C_{\mathbf{R}}$ compact is en bepaal de samenhangscomponenten in $C_{\mathbf{R}}$.

Voeg aan iedere $c \in C$ het reële getal

$$f(c) := \sum_{j=1}^{\infty} 2c_j \, 3^{-j}$$

toe. Bewijs dat f een homeomorfisme is van C naar $C_{\mathbf{R}}$.

1.11.4 Zij U de verzameling van de inverteerbare lineaire afbeeldingen $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Bewijs dat U een open deelverzameling is van $\mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) \simeq \mathbf{R}^{n^2}$ en dat $L \mapsto L^{-1}$ een reëel-analytisch diffeomorfisme definieert van U naar U. Bewijs dat de afsluiting van U gelijk is aan $\mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Doe in ieder geval het geval $n = 2$ expliciet. Zij S de drie-dimensionale lineaire ruimte van de 2×2-matrices met spoor gelijk aan 0. Maak een plaatje daarin van het complement van U in S.

Hoofdstuk 2

Variëteiten

Een n-dimensionale variëteit is een ruimte, die er lokaal als een open deel van $\mathbf{R}^n$ uitziet. Het geheel hoeft echter niet van die vorm te zijn. In het engels spreekt men van *manifold*, in het duits van *Mannigfaltigkeit* en in het frans van *variété différentiable*. Voor $n = 1$ heeft men het ook over een *kromme*, en voor $n = 2$ over een *oppervlak*.

Een voorbeeld van een één-dimensionale variëteit is de cirkel C met straal 1 om de oorsprong in het (x, y)-vlak. De bovenhelft $y > 0$ kan door middel van de projectie op de x-as met het open interval $]-1, 1[$ in $\mathbf{R}$ geïdentificeerd worden, analoog voor de benedenhelft $y < 0$. We missen dan nog omgevingen van de punten $(-1, 0)$ en $(1, 0)$ op de cirkel; daarvoor kunnen we de projectie op de y-as gebruiken. De hele cirkel kan echter niet met een open deelverzameling van $\mathbf{R}$ geïdentificeerd worden. Immers, de cirkel is compact en de enige deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ die zowel open als gesloten zijn, zijn $\emptyset$ en $\mathbf{R}$ zelf; de laatste is niet compact.

Een andere bekende voorstelling van de cirkel C is om de punten $(x, y) \in C$ te schrijven als $x = \cos t$, $y = \sin t$, waarin $t \in [0, 2\pi[$ de *hoek* voorstelt, gedefinieerd als de booglengte langs C, van het punt $(1, 0) \in C$ naar (x, y). Het nadeel van deze beschrijving is dat na één keer rondlopen op de cirkel, bij terugkomst in het uitgangspunt $(1, 0)$, de hoek discontinu van 2π naar 0 terugspringt. Daarmee is deze hoek t geen goede coördinaat voor de punten van C in een omgeving van het punt $(1, 0)$. Anderzijds kan opgemerkt worden dat de afbeelding

$$\phi : t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

een analytische afbeelding is van $\mathbf{R}$ naar $\mathbf{R}^2$, met C als beeld. De afbeelding ϕ is echter niet injectief: ieder punt van C heeft een nevenklasse van de vorm

$$\{t + 2\pi\, k \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

als volledig origineel. Een poging om toch een inverse te definiëren leidt noodzakelijkerwijze tot een discontinuïteit zoals bij de bovengenoemde hoekfunctie. De afbeelding ϕ leidt tot een identificatie $\tilde{\phi}$ van "$\mathbf{R}$ modulo $2\pi\mathbf{Z}$" met C. We hebben geen globale inverse van ϕ, maar lokale continue inversen van ϕ bestaan wel, deze zouden we graag als lokale coördinaatsfuncties voor C toe willen laten.

De hier gegeven definitie van een variëteit, als een ruimte die er lokaal als een open deel van $\mathbf{R}^n$, is nog te vaag om als beginpunt van een wiskundige theorie te dienen. De nu volgende, meer technische definities verwoorden echter hetzelfde basisidee.

2.1 Kaarten

Definitie 2.1.1 Zij X een verzameling. Een *n-dimensionale kaart* voor X is een bijectieve afbeelding κ, van een deelverzameling X_κ van X, naar een open deelverzameling V_κ van $\mathbf{R}^n$. Uitgeschreven:

$$\kappa(x) = (\kappa_1(x), \ldots, \kappa_n(x)), \quad x \in X_\kappa, \tag{2.1.1}$$

waarin κ_1 tot en met κ_n reëelwaardige functies op X_κ zijn. $\oslash$

In plaats van kaart spreekt men ook over een n-dimensionale *lokale coördinatisering* κ; het definitiegebied X_κ heet dan de *coördinaatomgeving* in X van κ. De functies κ_j zijn de bijbehorende *coördinaatsfuncties*, of kortweg de *coördinaten* van κ.

Als de $x \in X$ de *toestanden van een fysisch systeem* voorstellen, dan kan men de κ_j als *metingen* interpreteren. De eis dat κ injectief is, betekent dan dat een toestand in X_κ door de n meetresultaten $\kappa_1(x)$ tot en met $\kappa_n(x)$ eenduidig is vastgelegd. Dat V_κ open is, betekent dat iedere kleine storing van de meetresultaten weer de meetresultaten van een toestand van het systeem zijn. Dat X_κ niet de gehele X hoeft te zijn, correspondeert met de situatie dat meetinstrumenten niet altijd voor alle toestanden van het systeem bruikbaar zijn, ze hebben vaak een bepaald natuurlijk bereik.

De naam "kaart" is uit de aardrijkskunde afkomstig, waarbij gedeelten van het aardoppervlak afgebeeld worden op gewoonlijk een rechthoek in het vlak. Zulke kaarten werden ook gemaakt en gebruikt door mensen die (nog) geen voorstelling van het totale aardoppervlak als een boloppervlak hadden.

Het idee van lokale coördinatiseringen wordt echter ook in de wiskunde in talloze situaties toegepast, de cirkel met zijn projecties naar het interval $]-1,\, 1[$ is daarvan alleen maar een allereerste voorbeeld.

Een voorbeeld van een globale coördinatisering is de lineaire coördinatisering van een eindig-dimensionale lineaire ruimte E. De elementen $e_1, \ldots, e_n \in E$ vormen een *basis* van E dan en slechts dan als de lineaire afbeelding

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j$$

bijectief is van $\mathbf{R}^n$ naar E. De inverse hiervan is een afbeelding $\kappa_{e_1,\ldots,e_n}$ van E naar $\mathbf{R}^n$ en heet de *coördinatisering van E ten aanzien van de basis* $e_1, \ldots, e_n$.

Opmerking 2.1.1 In Definitie 2.1.1 zijn de coördinaten $\kappa_j = \kappa_j(x)$ van het element x opgevat als reëelwaardige functies van x. Het onderscheid tussen het element $x \in X$ (in de fysica de toestand van het systeem) en zijn coördinatenrij $\kappa(x) \in \mathbf{R}^n$ wordt niet altijd in de notatie aangebracht. In plaats daarvan werkt men met het punt $\kappa \in \mathbf{R}^n$, zonder in de notatie tot uitdrukking te brengen dat het als functie van $x \in X$ gezien wordt. Als er maar één kaart ter sprake komt dan doet iedereen dit; dan *identificeert* men X met een deelverzameling van $\mathbf{R}^n$.

Verder treden in de fysica coördinaten vaak op als fysische grootheden die een vaste naam hebben, zoals de temperatuur T, het volume V, of de energie E. In dit geval is het ook ongebruikelijk om deze te schrijven als functie van de "abstracte" toestand $x \in X$. Wel ziet men soms een formule waarmee de fysische grootheid A uitgedrukt wordt in termen van andere fysische grootheden B, C, ... Zo'n "natuurwet" kan gelezen worden als "A is een functie van x", wanneer de andere grootheden B, C, ... de toestand van het systeem vastleggen.

Zijn er meer coördinatiseringen in het spel, omdat die handig zijn, of zelfs noodzakelijk, dan wordt het van belang om het onderscheid tussen x en $\kappa(x)$ wèl te maken en κ op te vatten als een afbeelding van X_κ naar $\mathbf{R}^n$. Consequente doorvoering hiervan heeft de prijs van een zwaardere notatie. In Paragraaf 2.2 kijken we naar de situatie dat er een collectie van kaarten is, in plaats van maar één kaart.

$\oslash$

2.2 Atlassen

Definitie 2.2.1 Een n-dimensionale C^r-*atlas* voor X is een collectie $\mathcal{A}$ van n-dimensionale kaarten κ voor X, met de volgende eigenschappen. Ten eerste eisen we dat ieder punt x van X tot een kaartomgeving X_κ van een kaart $\kappa \in \mathcal{A}$ behoort. In formule:

$$X = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{A}} X_\kappa. \tag{2.2.1}$$

Voor de tweede eis beginnen we met de opmerking, dat als $\kappa, \lambda \in \mathcal{A}$, dan is $\lambda \circ \kappa^{-1}$ een afbeelding van de deelverzameling $\kappa(X_\kappa \cap X_\lambda)$ van $\mathbf{R}^n$, naar $\mathbf{R}^n$. De eis is nu dat, voor iedere $\kappa, \lambda \in \mathcal{A}$:

$$V_{\kappa,\lambda} := \kappa(X_\kappa \cap X_\lambda) \text{ is open in } \mathbf{R}^n \tag{2.2.2}$$

en dat

$$\lambda \circ \kappa^{-1} \in \mathrm{C}^r(V_{\kappa,\lambda},\, \mathbf{R}^n). \tag{2.2.3}$$

Men noemt $\lambda \circ \kappa^{-1}$ ook wel de *verkaarting* of de *coördinatentransformatie* van de kaart κ naar de kaart λ. $\oslash$

Merk op dat

$$(\lambda \circ \kappa^{-1})^{-1} = \kappa \circ \lambda^{-1}.$$

Verwisselen van de rol van λ en κ geeft daarom dat $\lambda \circ \kappa^{-1}$ een C^r-diffeomorfisme is van $V_{\kappa,\lambda}$ naar $V_{\lambda,\kappa}$, beiden open deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$.

Voorbeeld 2.2.1 In het voorbeeld van de cirkel vormen de vier kaarten naar het interval $]-1,\, 1[$ een ééndimensionale, reëel-analytische atlas. Eén van de niet-triviale coördinatentransformaties is

$$x \mapsto (x,\, \sqrt{1-x^2}) \mapsto \sqrt{1-x^2} \ :]0,\, 1[\to \mathbf{R},$$

de andere zijn soortgelijk.

De coördinatentransformatie

$$\kappa_{\tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_n} \circ \kappa_{e_1,\ldots,e_n}{}^{-1},$$

bij overgang van de basis $e_1, \ldots, e_n$ in E naar de basis $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$, is een lineaire afbeelding van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}^n$. In de i-de kolom van de matrix hiervan, het beeld van de i-de standaardbasisvector in $\mathbf{R}^n$, staan de coördinaten van e_i ten aanzien van de basis $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$. $\oslash$

2.3 De Atlastopologie

Definitie 2.3.1 Zij $\mathcal{A}$ een n-dimensionale C^r-atlas voor X. We noemen de deelverzameling U van X *open met betrekking tot* $\mathcal{A}$, als $\kappa(U \cap X_\kappa)$ een open deelverzameling is van $\mathbf{R}^n$, voor iedere $\kappa \in \mathcal{A}$. Men gaat direct na dat deze open deelverzamelingen een topologie in X vormen, deze heet de *door de atlas* $\mathcal{A}$ *in* X *gedefinieerde topologie.* $\oslash$

Opmerking 2.3.1 Voor $n = 0$ is $\mathbf{R}^n = \{0\}$, de lineaire ruimte met 0 als enige element. In dit geval is de atlastopologie gelijk aan de discrete topologie in X. $\oslash$

Met betrekking tot de atlastopologie zijn alle kaartomgevingen X_κ open deelverzamelingen van X en is iedere kaart $\kappa \in \mathcal{A}$ een homeomorfisme van X_κ naar de open deelverzameling V_κ van $\mathbf{R}^n$. Dit volgt uit (2.2.2), de karakterisering b) van continuïteit in Lemma 1.3.1, en (2.2.3) voor $r = 0$. Als gevolg hiervan heeft iedere $x \in X$ een open omgeving die homeomorf is met een open bol in $\mathbf{R}^n$. Daarmee is X lokaal boogsamenhangend en de samenhangscomponenten in X zijn open, gesloten en boogsamenhangende deelverzamelingen van X.

Een schrik is echter, dat *de atlastopologie niet Hausdorff's hoeft te zijn.* Als voorbeeld nemen we de deelverzameling

$$X := (]-\infty,\, 0[\times\{0\}) \cup ([0,\, \infty[\times\{-1\}) \cup ([0,\, \infty[) \times \{1\}$$

van $\mathbf{R}^2$. Als kaarten nemen we $\kappa_\pm$ gelijk aan de projectie naar de eerste variabele, gedefinieerd in

$$X_\pm := (]-\infty,\, 0[\times\{0\}) \cup ([0,\, \infty[\times\{\pm 1\}).$$

De doorsnede van de beide kaartomgevingen is gelijk aan $]-\infty,\, 0[\times\{0\}$ en $\kappa_- \circ \kappa_+^{-1}$ is gelijk aan de identiteit in $]-\infty,\, 0[$. Daarmee vormen deze kaarten een reëel-analytische atlas voor X. Maar iedere open omgeving van $(0,\, -1)$ heeft met iedere open omgeving van $(0,\, 1)$ een niet-lege verzameling van de vorm $]-\epsilon,\, 0[\times\{0\}$ gemeen, voor zekere $\epsilon > 0$.

Dit soort "vertakkingen" wordt uitgesloten, wanneer we eisen dat voor alle $\kappa, \lambda \in \mathcal{A}$ geldt dat er géén rij $x(j) \in X_\kappa \cap X_\lambda$ is, waarvoor $\kappa(x(j))$ voor $j \to \infty$ convergeert naar een punt van $V_\kappa \setminus V_{\kappa,\lambda}$, terwijl $\lambda(x(j))$ voor $j \to \infty$ convergeert naar een punt van $V_\lambda \setminus V_{\lambda,\kappa}$. Dit is precies de voorwaarde waaronder de $\mathcal{A}$-topologie Hausdorff's is, we noemen de atlas $\mathcal{A}$ daarom *Hausdorff's*, als ze hieraan voldoet.

Definitie 2.3.2 Zij $0 \le r \le \omega$. Een *n-dimensionale C^r-variëteit* is een paar $(X,\, \mathcal{A})$, waarin X een verzameling is en $\mathcal{A}$ een Hausdorff'se n-dimensionale C^r-atlas voor X. $\oslash$

De definitie zal later nog wat gewijzigd worden, omdat we variëteiten met equivalente atlassen met elkaar zullen identificeren. Ook wordt meestal de atlas uit de notatie weggelaten. Men spreekt over "de variëteit X", in plaats van over "de variëteit $(X,\, \mathcal{A})$" en vermeldt de atlas alleen als het niet uit de context duidelijk is, welke atlas wordt bedoeld.

Voor $r = 0$ heet $(X, \mathcal{A})$ een n-dimensionale *topologische variëteit.* Voor $r \ge 1$ spreekt men van een *differentieerbare variëteit*, voor $r = \infty$ van een *gladde varëteit* en voor $r = \omega$ van een *reëel-analytische variëteit.*

2.4 C^k-afbeeldingen

Definitie 2.4.1 Zij $(X, \mathcal{A})$ en $(Y, \mathcal{B})$ twee C^r-variëteiten, $\dim X = n$, $\dim Y = p$. Zij verder $0 \leq k \leq r$ en U een open deelverzameling van X. Een afbeelding $f : U \to Y$ heet C^k, als f continu is en voor iedere $\kappa \in \mathcal{A}$, $\mu \in \mathcal{B}$ de afbeelding $\mu \circ f \circ \kappa^{-1}$ een C^k-afbeelding is, van de open deelverzameling

$$\kappa(U \cap X_\kappa \cap f^{-1}(Y_\mu))$$

van $\mathbf{R}^n$, naar $\mathbf{R}^p$.

We noteren de verzameling van alle C^k-afbeeldingen van U naar Y met $\mathrm{C}^k(U, Y)$. Als $Y = \mathbf{R}$, dan noteren we $\mathrm{C}^k(X)$ voor de ruimte $\mathrm{C}^k(X, \mathbf{R})$ voor de ruimte van alle reëelwaardige functies in X van de klasse C^k. Met puntsgewijze optelling en scalairvermenigvuldiging vormen deze een lineaire ruimte, dit is ook nog het geval met $\mathrm{C}^k(X, Y)$ als Y een lineaire ruimte is, maar niet als Y een willekeurige variëteit is. Voor $Y = \mathbf{R}$ hebben we ook nog het puntsgewijze product tussen functies:

$$f, g \mapsto fg : \mathrm{C}^k(X) \times \mathrm{C}^k(X) \to \mathrm{C}^k(X),$$

waarmee $\mathrm{C}^k(X)$ een zogenaamde *algebra* vormt. We zullen hier gebruik van maken in Paragraaf 4.5 $\oslash$

Als U een open deelverzameling is van $\mathbf{R}^n$, met de identiteit als enige kaart in de atlas, dan is $f \in \mathrm{C}^k(U, Y)$ dan en slechts dan als

$$\mu \circ f \in \mathrm{C}^k(U \cap f^{-1}(Y_\mu), \mathbf{R}^p)$$

voor iedere $\mu \in \mathcal{B}$. Als $n = 1$ en U een interval is in $\mathbf{R}$, dan wordt een $f \in \mathrm{C}^k(U, Y)$ ook wel een C^k*-kromme in* Y genoemd.

Is anderzijds Y een open deelverzameling van $\mathbf{R}^p$, met de identiteit als enige kaart, dan is $f \in \mathrm{C}^k(U, Y)$ dan en slechts dan als

$$f \circ \kappa^{-1} \in \mathrm{C}^k(\kappa(U \cap X_\kappa), \mathbf{R}^p)$$

voor iedere $\kappa \in \mathcal{A}$. We kunnen schrijven

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)),$$

waarin de $f_i(x)$ reëelwaardige functies in U zijn; er geldt dat $f \in \mathrm{C}^k(U, Y)$ dan en slechts dan als $f_i \in \mathrm{C}^k(U, \mathbf{R})$ voor iedere $1 \leq i \leq p$.

Is zowel U een open deelverzameling van $\mathbf{R}^n$ en Y een open deelverzameling van $\mathbf{R}^p$, ieder met de identiteit als enige kaart in de atlas, dan corresponderen de definitie en de notatie met die van §1.8.

Keren we nu terug naar het algemene geval van twee variëteiten X en Y. Gebruikmakend van de kettingregel, zien we dat $f \in \mathrm{C}^k(U, Y)$, als f continu is en er bij iedere $a \in U$ een $\kappa \in \mathcal{A}$ is en een $\mu \in \mathcal{B}$, met de eigenschap dat $a \in X_\kappa$, $f(a) \in Y_\mu$ en $\mu \circ f \circ \kappa^{-1} \in \mathrm{C}^k$. Immers, voor iedere andere $\lambda \in \mathcal{A}$, $\nu \in \mathcal{B}$ is dan

$$\nu \circ f \circ \lambda^{-1} = (\nu \circ \mu^{-1}) \circ (\mu \circ f \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ \lambda^{-1}) \in \mathrm{C}^k.$$

Ook kan opgemerkt worden dat U, voorzien van de atlas

$$\mathcal{A}_U := \{\kappa|_{U \cap X_\kappa} \mid \kappa \in \mathcal{A}\},$$

een n-dimensionale C^r-variëteit is. Op deze wijze wordt een open deelverzameling van een variëteit automatisch als variëteit van dezelfde dimensie en differentieerbaarheidsklasse opgevat. De afbeelding $f : U \to Y$ is C^k van $(X, \mathcal{A})$ naar $(Y, \mathcal{B})$, dan en slechts dan als zij C^k is van $(U, \mathcal{A}_U)$ naar $(Y, \mathcal{B})$.

Men noemt $f : X \to Y$ een C^k-*diffeomorfisme*, als f bijectief is van X naar Y en zowel f als f^{-1} C^k-afbeeldingen zijn. Hiervoor is het noodzakelijk dat $p = n$. Dit impliceert dat f een homeomorfisme (topologisch isomorfisme) is van X naar Y, als $k = 0$ dan betekent het ook niet meer dan dat. Een C^r-diffeomorfisme van een open deelverzameling U van X naar een open deelverzameling V van $\mathbf{R}^n$ heet ook wel een *toegelaten lokale coördinatisering* van de variëteit $(X, \mathcal{A})$.

De afbeelding $f : X \to Y$ heet een *lokaal* C^k-*diffeomorfisme*, als er bij iedere $a \in X$ een open omgeving U van a in X is, met de eigenschap dat de beperking $f|_U$ van f tot U een C^k-diffeomorfisme is van U naar een open deelverzameling V van Y.

Een C^r-atlas $\mathcal{B}$ voor X heet C^r-*equivalent* met $\mathcal{A}$ als voor iedere $\kappa \in \mathcal{A}$ en $\lambda \in \mathcal{B}$ geldt dat $\kappa(X_\kappa \cap X_\lambda)$ en $\lambda(X_\kappa \cap X_\lambda)$ open deelverzamelingen zijn van $\mathbf{R}^n$ en $\lambda \circ \kappa^{-1}$ en $\kappa \circ \lambda^{-1}$ van de klasse C^r zijn. Anders gezegd: als $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ een n-dimensionale C^r-atlas is voor X. Of: iedere $\lambda \in \mathcal{B}$ is een toegelaten lokale coördinatisering van $(X, \mathcal{A})$. Dit laat tevens zien dat de collectie $\mathcal{A}_{\max}$ van alle toegelaten coördinatiseringen van $\mathcal{A}$ een atlas is voor X, die equivalent is met $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}_{\max}$ is de grootste met $\mathcal{A}$ equivalente atlas. Men noemt de atlas *maximaal* als $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\max}$.

Is $\tilde{\mathcal{A}}$ equivalent met $\mathcal{A}$ en $\tilde{\mathcal{B}}$ equivalent met $\mathcal{B}$, dan is f een C^k-afbeelding van $(X, \mathcal{A})$ naar $(Y, \mathcal{B})$, dan en slechts dan als f een C^k-afbeelding is van $(X, \tilde{\mathcal{A}})$ naar $(Y, \tilde{\mathcal{B}})$. Mede hierom wil men alle variëteiten met equivalente atlassen met elkaar identificeren.

Definitie 2.4.2 Men noemt een equivalentieklasse van n-dimensionale C^r-atlassen voor X ook wel een n-*dimensionale* C^r-*structuur* in X en definieert een n-dimensionale C^r-variëteit als een paar $(X, \mathcal{S})$, waarin X een verzameling is en $\mathcal{S}$ een n-dimensionale C^r-structuur in X. Een andere manier om van de keuzevrijheid in de atlassen af te komen, is zich te beperken tot de maximale atlas $\mathcal{A}_{\max} \in \mathcal{S}$. ⊘

Het maximale element in $\mathcal{S}$ is eenduidig bepaald, terwijl er legio minimale atlassen zijn. Minimale atlassen hebben de voorkeur als men een verzameling van een variëteitsstructuur wil voorzien: voor hoe minder kaarten men de eisen voor een atlas hoeft te verifiëren, des te gemakkelijker is dat gebeurd. Anderzijds, als men voor een bepaald probleem gebruik wil maken van daarvoor handige lokale coördinaten, dan is het prettig om over de gehele $\mathcal{A}_{\max}$ te kunnen beschikken.

Voorbeeld 2.4.1 Beschouw de sfeer

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} {x_j}^2 = 1\}$$

met straal 1 om de oorsprong in $\mathbf{R}^n$. De *stereografische projectie* vanuit de noordpool, respectievelijk zuidpool is de afbeelding die aan $x \in S$, met $x \neq \pm e_n$, toevoegt het punt $y = \sigma_\pm(x) \in \mathbf{R}^{n-1}$ met de eigenschap dat $\pm e_n$, x en $(y, 0)$ op een rechte lijn liggen.

Met de notatie $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$ betekent dit, dat

$$y = \tfrac{1}{1 \mp x_n} x',$$

terwijl de andere kant op

$$x' = \tfrac{2}{\|y\|^2+1} y, \quad x_n = \pm \tfrac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}.$$

Hieruit lezen we af dat $\sigma_\pm$ een bijectieve afbeelding is van $S \setminus \{\pm e_n\}$ naar $\mathbf{R}^{n-1}$ en dat

$$\phi = \sigma_- \circ {\sigma_+}^{-1} : y \mapsto \tfrac{1}{\|y\|^2} y \tag{2.4.1}$$

een reëel-analytisch diffeomorfisme is van $\mathbf{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ naar zichzelf, met $\phi^{-1} = \phi$. Hiermee is S een $(n-1)$-dimensionale reëel-analytische variëteit, met $\{\sigma_+, \sigma_-\}$ als een minimale atlas. Men ziet S dan ook wel als $\mathbf{R}^{n-1}$, met daaraan toegevoegd één punt "in oneindig".

Opgemerkt kan ook nog worden dat $y \mapsto \|y\|^2$ een veelterm (van de graad 2) in y is; daarmee zijn de coördinatentransformaties bij deze atlas rationale afbeeldingen. Dit is interessant vanuit algebraïsch oogpunt.

Met betrekking tot deze atlas zijn de projecties

$$\pi_{j,\pm} : x \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n),$$

beschouwd als afbeeldingen van

$$S_{j,\pm} := \{x \in S \mid \pm x_j > 0\}$$

naar $\mathbf{R}^{n-1}$, reëel-analytische diffeomorfismen, van $S_{j,\pm}$ naar de open bol in $\mathbf{R}^{n-1}$ om de oorsprong met straal gelijk aan 1. De atlas van de stereografische projecties is daarmee reëel-analytisch equivalent met de atlas der projecties langs de coördinaatassen. $\oslash$

Voorbeeld 2.4.2 Is E een n-dimensionale lineaire ruimte over $\mathbf{R}$, dan wordt de bijbehorende *reële projectieve ruimte* $\mathrm{P}(E)$ gedefinieerd als de verzameling van alle één-dimensionale lineaire deelruimten (rechte lijnen door de oorsprong) in E.

Na keuze van een basis kunnen we E met $\mathbf{R}^n$ identificeren. Voor iedere $1 \le j \le n$ definiëren we κ_j als de afbeelding die aan $L \in \mathrm{P}(\mathbf{R}^n)$ toevoegt het punt

$$(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n-1},$$

dat zó gekozen is, dat

$$(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n) \in L.$$

Dit punt bestaat en is eenduidig vastgelegd, dan en slechts dan als L niet in het hypervlak

$$H_j = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_j = 0\}$$

in $\mathbf{R}^n$ ligt. κ_j is een bijectieve afbeelding van $X_j := \mathrm{P}(\mathbf{R}^n) \setminus \mathrm{P}(H_j)$ naar $\mathbf{R}^{n-1}$. Omdat er voor iedere $L \in \mathrm{P}(\mathbf{R}^n)$ een $x \in L$ is met $x \neq 0$, dus met $x_j \neq 0$ voor zekere j, is $\mathrm{P}(\mathbf{R}^n)$ gelijk aan de vereniging der X_j.

Als $1 \leq i < j \leq n$, dan is

$$\begin{array}{rl} \kappa_i \circ {\kappa_j}^{-1} : & (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ \mapsto & \frac{1}{x_i}\,(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n). \end{array}$$

Dit is een reëel-analytisch diffeomorfisme van $\mathbf{R}^{n-1} \setminus H_i$ naar $\mathbf{R}^{n-1} \setminus H_{j-1}$. We concluderen dat de κ_j een $(n-1)$-dimensionale reëel-analytische atlas voor $\mathrm{P}(E)$ vormen. Ook is het niet moeilijk om na te gaan dat de atlastopologie Hausdorff's is. Hiermee wordt $\mathrm{P}(E)$ een $(n-1)$-dimensionale reëel-analytische variëteit.

Voor $E = \mathbf{R}^n$ heet deze de $(n-1)$-*dimensionale rëele projectieve ruimte* en wordt genoteerd als $\mathrm{P}_{n-1}(\mathbf{R})$, of P_{n-1} als het uit de context duidelijk is dat $\mathbf{R}$ het getallenlichaam is.

Voor ieder hypervlak H in E is $\mathrm{P}(E) \setminus \mathrm{P}(H)$ een open deelverzameling van $\mathrm{P}(E)$. Na keuze van $e \in E \setminus H$ is er bij iedere $L \in \mathrm{P}(E) \setminus \mathrm{P}(H)$ precies één $h = \kappa_{e,H} \in H$, met de eigenschap dat $e + h \in L$. $\kappa_{e,H}$ is een reëel-analytisch diffeomorfisme van $\mathrm{P}(E) \setminus \mathrm{P}(H)$ naar $H \simeq \mathbf{R}^{n-1}$.

Men beschrijft de $(n-1)$-dimensionale projectieve ruimte dan ook wel als "een $(n-1)$-dimensionale lineaire ruimte, gecompleteerd met een $(n-2)$-dimensionale projectieve ruimte in oneindig". Als $(n-2)$-dimensionale projectieve ruimte in oneindig kan de projectieve ruimte van een willekeurig hypervlak dienen.

Voor $n = 2$ geeft dit de beschrijving van de reële projectieve lijn als de reële as, met daaraan toegevoegd één punt in oneindig, waar $x_j \in \mathbf{R}$ naartoe convergeert als $x_j \to \infty$, maar ook als $x_j \to -\infty$. Ieder element van de projectieve lijn kan als punt in oneindig opgevat worden.

Voor $n = 3$ krijgen we de beschrijving van het projectieve vlak als een Euclidisch vlak, met daaraan toegevoegd een projectieve lijn in oneindig. Iedere projectieve rechte in het projectieve vlak kan de rol van projectieve lijn in oneindig vervullen. $\oslash$

Voorbeeld 2.4.3 Een variant op $\mathrm{P}(E)$ is de variëteit $\mathrm{S}(E)$ van stralen vanuit de oorsprong in E, ook wel de *hemelsfeer* van E genoemd. De elementen hiervan zijn de halflijnen van de vorm

$$\sigma(x) := \{\lambda\, x \mid \lambda \in \mathbf{R},\ \lambda > 0\},$$

voor $x \in E$, $x \neq 0$. Merk op dat $\sigma(x) = \sigma(y)$, dan en slechts dan als $y = \mu\, x$ voor een positief reëel getal μ. Deze stralen vanuit de oorsprong kunnen ook worden gedefinieerd als de samenhangscomponenten van $L \setminus \{0\}$, waarbij $L \in \mathrm{P}(E)$. (Voor iedere $L \in \mathrm{P}(E)$ zijn er twee.)

Keuze van een basis in E leidt tot identificatie van E met $\mathbf{R}^n$. De kaarten voor $\mathrm{S}(\mathbf{R}^n)$ zijn op dezelfde manier gedefinieerd als voor $\mathrm{P}(\mathbf{R}^n)$, alleen zijn er nu voor iedere j twee kaartomgevingen

$$X_j^{\pm} := \{\sigma(x) \in \mathrm{S}(\mathbf{R}^n) \mid x \in \mathbf{R}^n,\ \pm x_j > 0\}.$$

Het is niet moeilijk om na te gaan, dat hiermee ook $\mathrm{S}(E)$ een $(n-1)$-dimensionale reëel-analytische variëteit is en dat een andere basiskeuze in E een equivalente atlas oplevert. $\oslash$

Voorbeeld 2.4.4 Een generalisatie van het begrip projectieve ruimte is de *Grassmann-variëteit* $\mathrm{G}_d(E)$ van alle d-dimensionale lineaire deelruimten L van E. In het vervolg werken we toe naar de beschrijving van de standaard atlas voor $\mathrm{G}_d(E)$.

Noem $c = n - d$ de *codimensie* van de $L \in \mathrm{G}_d(E)$ in E. Voor een willekeurige lineaire deelruimte M van E impliceren twee van de volgende drie eigenschappen i), ii), iii) de derde.

i) $E = L + M$,

ii) $L \cap M = 0$.

iii) $\dim M = c$,

Men noemt de lineaire deelruimte M van E *complementair aan* L *in* E wanneer aan i)-iii) is voldaan en schrijft in dit geval

$$E = L \oplus M.$$

De voorwaarden i) en ii) samen betekenen dat iedere $e \in E$ eenduidig te schrijven is als $e = l+m$, met $l \in L$ en $m \in M$. We schrijven $l = \pi_{L,M}(e)$ en $m = \pi_{M,L}(e)$. Dit definieert een lineaire afbeelding $\pi_{L,M} : E \to L$, de *projectie van* E *op* L *langs* M genaamd. $\pi_{M,L} = 1 - \pi_{L,M}$ is de complementaire lineaire projectie van E op M langs L.

Kies $M \in \mathrm{G}_c(E)$. Schrijf U_M voor de verzameling der $L \in \mathrm{G}_d(E)$ die complementair aan M zijn. Kies verder $L_0 \in U_M$. Voor iedere $A \in \mathrm{L}(L_0, M)$ is

$$L := \{l_0 + A(l_0) \mid l_0 \in L_0\}$$

een d-dimensionale lineaire deelruimte van E, complementair aan M. We kunnen A uit L terugvinden, door op te merken dat $p := \pi_{L_0,M}|_L$ een bijectieve lineaire afbeelding is van L naar L_0 en dat

$$A = \pi_{M,L_0} \circ p^{-1}.$$

Hiermee wordt $\kappa_{L_0,M} : L \mapsto A$ een bijectieve afbeelding van U_M naar $\mathrm{L}(L_0, M) \simeq \mathbf{R}^{dc}$. Het vereist nog enig schrijfwerk om na te gaan dat deze afbeeldingen een $d(n-d)$-dimensionale reëel-analytische atlas voor $\mathrm{G}_d(E)$ definiëren.

Als $E = \mathbf{R}^n$, dan wordt al een atlas gevormd door zich te beperken tot paren L_0, M van de vorm

$$\begin{aligned} L_0 &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_j = 0 \text{ voor } \ j \in K\} \\ M &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_j = 0 \text{ voor } \ j \in J\}, \end{aligned}$$

waarin J een deelverzameling voorstelt van $\{1, \dots, n\}$, bestaande uit d elementen en $K = \{1, \dots, n\} \setminus J$. Men noteert ook wel $\mathrm{G}_{d,n} = \mathrm{G}_{d,n}(\mathbf{R}) = \mathrm{G}_d(\mathbf{R}^n)$. Met deze notatie is $\mathrm{P}_{n-1} = \mathrm{G}_{1,n}$. $\oslash$

Opmerking 2.4.1 Zij $0 \leq k \leq r \leq \omega$. Iedere C^r-atlas is een C^k-atlas, daarmee is iedere C^r-variëteit op te vatten als een C^k-variëteit. Omgekeerd kan men zich afvragen of een gegeven C^k-variëteit een C^r-atlas $\mathcal{B}$ heeft. Anders gezegd, of er bij een gegeven C^k-atlas $\mathcal{A}$ voor X een C^r-atlas $\mathcal{B}$ voor X is, die C^k-equivalent is met $\mathcal{A}$. Ofwel, is de C^k-variëteit $(X, \mathcal{A})$ C^k-diffeomorf met een C^r-variëteit?

Het is een resultaat van Whitney [15], dat iedere C^k-variëteit, met $k \geq 1$, C^k-diffeomorf is met een reëel-analytische variëteit. Anderzijds liet Cairns [3] zien, dat er topologische variëteiten zijn die niet homeomorf zijn met een C^1-variëteit. Ook kan het gebeuren dat twee differentieerbare variëteiten X en Y wél homeomorf, maar niet diffeomorf zijn. Dat dit mogelijk is voor de 7-dimensionale sfeer werd ontdekt door Milnor [12]. Nog spectaculairder is dat dit al kan voor $X = \mathbf{R}^4$, zie [7, §1]. De bewijzen van deze resultaten zijn diep en vallen buiten het kader van dit college.

Omdat de afgeleide van een C^∞-afbeelding weer C^∞ is, hoeft er geen boekhouding bijgehouden te worden van de differentieerbaarheidsgraad. Dit is ook waar met C^∞ vervangen door C^ω, maar het is zóveel gemakkelijker gebleken om C^∞-functies met bepaalde gewenste eigenschappen te construeren dan reëel-analytische, dat het bij veel auteurs gewoonte geworden is om met C^∞-varëteiten te werken. In de praktijk zijn concreet gedefinieerde variëteiten bijna altijd reëel-analytisch, de hier gegeven voorbeelden illustreren dit. $\oslash$

2.5 Plakken

Men kan een n-dimensionale C^r-variëteit X met atlas $\mathcal{A}$ (re)construeren uit de coördinatentransformaties

$$\phi_{\lambda,\,\kappa} := \lambda \circ \kappa^{-1}, \quad \kappa, \lambda \in \mathcal{A}.$$

Ieder van deze was een C^r-diffeomorfisme van de open deelverzameling $V_{\kappa,\,\lambda}$ van $\mathbf{R}^n$ naar de open deelverzameling $V_{\lambda,\,\kappa}$ van $\mathbf{R}^n$, zie (2.2.2) en (2.2.3).

Gegevens

a) Een indexverzameling I en voor iedere $i \in I$ een open deelverzameling V_i van $\mathbf{R}^n$.

b) Voor iedere $i, j \in I$ een C^r-diffeomorfisme $\phi_{j,i}$ van een open deelverzameling $V_{i,j}$ van V_i naar een open deelverzameling $V_{j,i}$ van V_j.

Deze hebben de volgende eigenschappen:

c) Voor iedere $i \in I$ is $V_{i,i} = V_i$ en is $\phi_{i,i}$ gelijk aan de identiteit in V_i.

d) Als $i, j, k \in I$, dan is

$$\phi_{k,i} = \phi_{k,j} \circ \phi_{j,i} \ \text{ in } \ V_{i,j} \cap {\phi_{j,i}}^{-1}(V_{j,k}). \tag{2.5.1}$$

Het idee is om hiermee een variëteit X te construeren, door te beginnen met de vereniging V te nemen van disjuncte copieën van de V_i met $i \in I$. Dit kan worden gerealiseerd door te beschouwen

$$V = \{(i,\, y) \in I \times \mathbf{R}^n \mid y \in V_i\}.$$

Vervolgens worden hierin, voor ieder paar $i, j \in I$, de punten $(i,\, y)$ en $(j,\, z)$ met elkaar geïdentificeerd, wanneer

$$y \in V_{i,j},\ z \in V_{j,i} \ \text{ en } \ z = \phi_{j,i}(y). \tag{2.5.2}$$

Men zegt ook wel dat V_i en V_j *aan elkaar geplakt* worden langs $V_{i,j} \subset V_i$, respectievelijk $V_{j,i} \subset V_j$, met behulp van de *plakafbeelding* $\phi_{j,i}$.

Een expliciete verzamelingstheoretische beschrijving van de identificatie wordt verkregen door X te definiëren als de collectie van alle niet-lege deelverzamelingen x van $I \times \mathbf{R}^n$, met de eigenschap dat, als $(i,\, y) \in x$, dan is $(j,\, z) \in x$, dan en slechts dan als (2.5.2) geldt. We gaan nu X voorzien van kaarten.

Voor iedere $i \in I$ wordt X_i gedefinieerd als de verzameling der $x \in X$, waarvoor er een $y \in \mathbf{R}^n$ is met $(i,\, y) \in x$. Uit de definitie van X is evident dat X gelijk is aan de vereniging der X_i met $i \in I$. Uit (2.5.2) met $j = i$ volgt dat $y \in V_i$ en dat $(i,\, z) \in x$ impliceert dat $z = y$. Dit geeft dat er bij iedere $x \in X_i$ precies één $y \in V_i$ is met $(i,\, y) \in x$, we schrijven $y = \kappa_i(x)$. Zo krijgen we de afbeelding κ_i van X_i naar V_i.

Deze afbeelding is surjectief: voor iedere $y \in V_i$ definiëren we x als de verzameling der $(j,\, z) \in I \times \mathbf{R}^n$, die aan (2.5.2) voldoen. Dan is $x \in X$ en $(i,\, y) \in x$, dus $y = \kappa_i(x)$. De afbeelding κ_i is ook injectief: als $(i,\, y) \in x$ en $(i,\, y) \in x'$ dan geeft (2.5.2) ook dat $x = x'$. Tenslotte leidt (2.5.2) ook tot

$$\kappa_j \circ {\kappa_i}^{-1} = \phi_{j,i}, \quad i, j \in I. \tag{2.5.3}$$

Daarmee vormen de kaarten κ_i een n-dimensionale C^r-atlas voor X, met de $\phi_{j,i}$ als verkaartingen.

Merk op, dat de voorwaarde aan het eind van §2.3 voor het Hausdorff's zijn van de atlastopologie, helemaal geformuleerd is in termen van de verkaartingen, dus als we deze voorwaarde toevoegen aan de Gegevens a) t/m d), dan krijgen we op deze manier een n-dimensionale C^r-variëteit X.

Opmerking 2.5.1 Iedere $x \in X$ eruit ziet als de grafiek in $I \times \mathbf{R}^n$, van een afbeelding van een deelverzameling I_x van I, naar $\mathbf{R}^n$. Immers we hebben dat $y = z$ zodra $(i,\, y) \in x$ en $(i,\, z) \in x$. Preciezer,

$$I_x = \{i \in I \mid x \in X_i\} \tag{2.5.4}$$

en de bedoelde afbeelding is gelijk aan

$$x : i \mapsto \kappa_i(x).$$

Op deze manier kan X worden opgevat als een collectie van afbeeldingen x van I_x naar $\mathbf{R}^n$, met de transformatieformule

$$x(j) = \phi_{j,i}(x(i)), \quad i, j \in I. \tag{2.5.5}$$

Tenslotte nog een opmerking over de notatie. Het komt vaak voor dat de kaarten in een atlas van een index $i \in I$ afhangen. Het gevaar bestaat dan, dat $\kappa_i(x)$ ook gelezen zou kunnen worden als de i-de coördinaat van $\kappa(x) \in \mathbf{R}^n$, zoals we in (2.1.1) deden. Botsingen in de notatie zijn helaas niet altijd te vermijden, als men tenminste niet steeds meer exotische symbolen wil introduceren. $\oslash$

Voorbeeld 2.5.1 Het voorbeeld van een niet-Hausdorff'se atlas in §2.3 kan door plakken verkregen worden. Plakgegevens:

$$\begin{aligned}
&I = \{+,\, -\},\\
&V_+ = V_- = \mathbf{R},\\
&V_{+,-} = V_{-,+} =]-\infty,\, 0[,\\
&\phi_{+,-}(t) = \phi_{-,+}(t) = t \ \text{ voor alle } \ t \in]-\infty,\, 0[.
\end{aligned}$$

$\oslash$

Voorbeeld 2.5.2 Een Hausdorff's voorbeeld is de *cirkel*, met de plakgegevens

$$\begin{aligned}
&I = \{1,\, 2\},\\
&V_1 =]a_1,\, b_1[, \ \ V_2 =]a_2,\, b_2[\\
&a_1 < a_2 < b_1 < b_2, \ \ b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = T,\\
&V_{1,2} =]a_1,\, a_2[\cup]a_2,\, b_1[,\\
&V_{2,1} =]a_2,\, b_1[\cup]b_1,\, b_2[,\\
&\phi_{1,2}(t) = t \ \text{ als } \ a_2 < t < b_1,\\
&\phi_{1,2}(t) = t - T \ \text{ als } \ b_1 < t < b_2.
\end{aligned}$$

De laatste twee regels zeggen dat we dit op kunnen vatten als het interval $]a_1, b_2[$, waarbij we de plakrand $]b_1, b_2[$ op de plakrand $]a_1, a_2[$ geschoven hebben. Dit definieert een één-dimensionale reëel-analytische variëteit C, deze is Hausdorff's, compact en samenhangend.

C kan geïdentificeerd worden met $\mathbf{R}/\mathbf{Z}T$, de verzameling der *reële getallen modulo* T. De elementen van $\mathbf{R}/\mathbf{Z}T$ zijn de "nevenklassen"

$$t + \mathbf{Z}T = \{t + n\,T \mid n \in \mathbf{Z}\} = t \text{ modulo } T.$$

De afbeelding $\pi : t \mapsto t + \mathbf{Z}T$ is injectief van V_i naar $\mathbf{R}/\mathbf{Z}T$, schrijf $U_i = \pi(V_i)$ en κ_i voor de inverse van de bijectieve afbeelding $\pi|_{V_i}$ van V_i naar U_i. Er geldt dat $\mathbf{R}/\mathbf{Z}T = U_1 \cup U_2$ en dat

$$\kappa_1 \circ {\kappa_2}^{-1} = \phi_{1,2}.$$

Hiermee vormen de κ_i een één-dimensionale reëel-analytische atlas voor $\mathbf{R}/\mathbf{Z}T$, met deze variëteitsstructuur is $\mathbf{R}/\mathbf{Z}T$ reëel-analytisch diffeomorf met C. De afbeelding $\pi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}T$ is een lokaal reëel-analytisch diffeomorfisme, de gegeven variëteitsstructuur in $\mathbf{R}/\mathbf{Z}T$ is de enige waarvoor dit het geval is. Merk op dat π geen diffeomorfisme is, omdat π niet injectief is: het volledig origineel van ieder punt is een hele nevenklasse.

De afbeelding

$$\gamma : t \mapsto (\cos \tfrac{2\pi t}{T},\, \sin \tfrac{2\pi t}{T}) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$$

induceert een reëel-analytisch diffeomorfisme van $\mathbf{R}/\mathbf{Z}T$ naar de cirkel

$$\{(x,\, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

in het vlak. Hiervoor hadden we in het begin van dit hoofdstuk de projecties op de y-as en de x-as als lokale coördinatiseringen geïntroduceerd, en in Voorbeeld 2.4.1 met $n = 2$ de stereografische projecties. De afbeelding γ heeft als fraaie eigenschap, dat de (grootte van de) snelheid $\|\gamma'(t)\| = 2\pi/T$ constant is als functie van t.

Het windingsgetal

De nu volgende topologische opmerkingen over de cirkel kunnen met behulp van de plakconstructie gemakkelijk bewezen worden. Zij f een continue afbeelding is van de cirkel $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ naar $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Dan is er bij iedere keuze van $b \in f(0 + \mathbf{Z})$ een eenduidig bepaalde *continue* afbeelding $f_b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, waarvoor $f_b(0) = b$ en $f(x + \mathbf{Z}) = f_b(x) + \mathbf{Z}$ voor alle $x \in \mathbf{R}$. Hieruit lezen we af dat $f_b(x + 1) + \mathbf{Z} = f_b(x) + \mathbf{Z}$, ofwel

$$w(f,\, b,\, x) := f_b(x + 1) - f_b(x) \in \mathbf{Z}.$$

Omdat een continue en geheelwaardige functie constant is, hangt $w(f,\, b,\, x)$ niet van x af. Omdat een andere keuze van b alleen maar leidt tot het optellen van een gehele constante bij f_b, hangt $w(f,\, b,\, x)$ ook niet van b af, men noemt dit het *windingsgetal* $w(f) \in \mathbf{Z}$ van de continue afbeelding $f : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

De ruimte $A = \mathrm{C}^0(\mathbf{R}/\mathbf{Z},\, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ wordt gewoonlijk voorzien van de topologie van uniforme convergentie. Men zegt dat $f, g \in A$ *homotoop* zijn, als er een continue afbeelding $F : s \mapsto f_s$ is van een interval $[p,\, q]$ naar A, waarvoor $f_p = f$ en $f_q = g$. F heet in dit geval een *homotopie* van f naar g. In dit geval is $s \mapsto w(f_s)$ een continue afbeelding van $[p,\, q]$ naar $\mathbf{Z}$, dus constant. De conclusie is dat $w(f) = w(g)$. In woorden:

Homotope continue afbeeldingen van cirkel naar cirkel hebben hetzelfde windingsgetal.

Men kan ook nog aantonen dat omgekeerd $w(f) = w(g)$ impliceert dat f en g homotoop zijn. Anders gezegd, als $w(f) = k$, dan is f homotoop met de standaard k-voudige winding

$$x + \mathbf{Z} \mapsto k\,x + \mathbf{Z} : \mathbf{R}/Z \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$$

van de cirkel naar zichzelf. $\oslash$

Voorbeeld 2.5.3 Een interessante variatie van het vorige voorbeeld is de *Möbius-band.* Daarvoor zijn de plakgegevens

$$\begin{aligned}
&I = \{1,\, 2\},\\
&V_1 =]a_1,\, b_1[\times]-c,\, c[,\\
&V_2 =]a_2,\, b_2[\times]-c,\, c[,\\
&a_1 < a_2 < b_1 < b_2,\;\; b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = T,\;\; c > 0,\\
&V_{1,2} = V_1 \setminus (\{a_2\} \times]-c,\, c[),\\
&V_{2,1} = V_2 \setminus (\{b_1\} \times]-c,\, c[),\\
&\phi_{1,2}(t,\, u) = (t,\, u) \;\text{ als }\; a_2 < t < b_1,\\
&\phi_{1,2}(t,\, u) = (t - T,\, -u) \;\text{ als }\; b_1 < t < b_2.
\end{aligned}$$

De laatste twee regels zeggen dat we dit op kunnen vatten als de strip $a_1 < t < b_2$, $-c < u < c$, waarbij we de plakrand $b_1 < t < b_2$ op de plakrand $a_1 < t < a_2$ geschoven hebben en daarbij om de t-as het papier omgelegd hebben. $\oslash$

2.6 Deelvariëteiten

Definitie 2.6.1 Zij Y een p-dimensionale C^k-variëteit, X een deelverzameling van Y en a een punt van X. Men zegt dat X een n-dimensionale C^k-*deelvariëteit* van Y is *in het punt* a, als $n \le p$ en er een open omgeving U van a in Y is, en een C^k-diffeomorfisme λ van U naar een open deelverzameling V van $\mathbf{R}^p$, met de eigenschap dat $\lambda(X \cap U)$ gelijk is aan de verzameling der $v \in V$ met $v_j = 0$ voor $n + 1 \le j \le p$. Als $n = p$, dan betekent dit dat a een inwendig punt is van X. Men zegt dat λ de verzameling X *platlegt* in een omgeving van a.

Men noemt X een n-dimensionale C^k-deelvariëteit van Y, als het bovenstaande geldig is voor iedere $a \in X$. Als $X = \emptyset$, dan hoeft er niets geverifieerd te worden. Volgens deze definitie is $\emptyset$ een n-dimensionale C^k-deelvariëteit van Y, voor iedere n. Als $X \neq \emptyset$, dan kan X alleen een n-dimensionale deelvariëteit van Y zijn als $n \le p$, het getal $p - n = \dim Y - \dim X$ heet dan de *codimensie van* X *in* Y. Als $n = p$, dan betekent een en ander dat X een open deelverzameling is van Y. $\oslash$

Het volgt meteen uit de definitie, dat de punten waar X een n-dimensionale C^k-deelvariëteit van Y is, een open deelverzameling A van X vormen (in de geïnduceerde topologie van X), en dat A een n-dimensionale C^k-deelvariëteit van Y is.

Neem nu aan dat X een n-dimensionale C^k-deelvariëteit is van Y. Schrijf

$$\pi : (y_1, \ldots,\, y_p) \mapsto (y_1, \ldots,\, y_n) : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$$

voor de projectie naar de eerste n variabelen. De $\kappa := \pi \circ \lambda|_{X \cap U}$, met λ als in Definitie 2.6.1, vormen een n-dimensionale C^k-atlas voor X. Daarmee wordt X een n-dimensionale C^k-variëteit. De atlastopologie in X is gelijk aan de geïnduceerde topologie van X, beschouwd als deelverzameling van Y. De afbeelding $\mathrm{id} : x \mapsto x : X \to Y$, de identiteit beschouwd als afbeelding van X naar Y, is een C^k-afbeelding van X naar Y.

Stel λ is een C^k-diffeomorfisme van een open omgeving U van a in Y, naar een open deelverzameling V van $\mathbf{R}^p$. Dan is X een n-dimensionale C^k-deelvariëteit van Y in het punt a, dan en slechts dan als $X' = \lambda(X \cap U)$ een n-dimensionale C^k-deelvariëteit is van $\mathbf{R}^p$ in het punt $a' = \lambda(a)$. Immers, als μ een C^k-diffeomorfisme is van een open omgeving W van a' naar een open deelverzameling Z van $\mathbf{R}^p$, die X' platlegt, dan is vanwege de kettingregel $\mu \circ \lambda$ een C^k-diffeomorfisme van de open omgeving $U \cap \lambda^{-1}(W)$ van a in Y; deze legt X plat.

We hebben de volgende equivalente karakteriseringen van n-dimensionale deelvariëteiten X van $\mathbf{R}^p$. Hierin zegt c) dat X lokaal de grafiek is van een C^k-functie van n variabelen. Dit is de definitie van deelvariëteit van $\mathbf{R}^p$, zoals die in Analyse C is gegeven.

Stelling 2.6.1 *Zij X een deelverzameling van $\mathbf{R}^p$, $a \in X$, $0 \leq n < p$. Dan zijn de volgende eigenschappen a)-c) equivalent.*

a) X is een n-dimensionale C^k-deelvariëteit van $\mathbf{R}^p$ in het punt a.

b) Er is een open omgeving U van a in $\mathbf{R}^p$ en een C^k-afbeelding f van U naar $\mathbf{R}^{p-n}$, met de eigenschappen dat $\mathrm{D}\, f(a)$ surjectief is van $\mathbf{R}^p$ naar $\mathbf{R}^{p-n}$ en dat

$$X \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}.$$

c) Er is een open omgeving U van a in $\mathbf{R}^p$ en een keuze $i(1), \ldots, i(n)$ van indices, met de volgende eigenschap. Als

$$\pi : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_{i(1)}, \ldots, x_{i(n)}) : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n \tag{2.6.1}$$

de projectie op deze keuze van variabelen voorstelt, dan is $\kappa = \pi|_{X \cap U}$ een bijectieve afbeelding van $X \cap U$ naar een open deelverzameling V van $\mathbf{R}^n$ en κ^{-1} is een C^k-afbeelding van V naar $\mathbf{R}^p$.

Bewijs a) $\Rightarrow$ b). Als λ een lokaal C^k-diffeomorfisme is dat X platlegt en $\psi : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^{p-n}$ is de projectie naar de laatste $p - n$ variabelen, dan voldoet $f = \psi \circ \lambda$ aan b).

Voor b) $\Rightarrow$ c) beginnen we met op te merken dat als $b \leq p - n$, dan zijn er b rangnummers $j(1), \ldots, j(b)$, waarvoor $\mathrm{D}\, f(a)(e_{j(k)})$ lineair onafhankelijk zijn voor $1 \leq k \leq b$. Dit gaat met inductie over b. Immers, als we er geen meer bij kunnen vinden, dan wordt de beeldruimte B van $\mathrm{D}\, f(a)$ opgespannen door de $\mathrm{D}\, f(a)(e_{j(k)})$, dus is $b = \dim B = p - n$.

Neem nu voor $i(1) < \ldots < i(n)$ de overgebleven rangnummers en beschouw de vergelijking $f(x) = 0$ met de $x_{j(k)}$ als onbekenden en de $x_{i(h)}$ als parameters. De impliciete-functiestelling geeft dat lokaal deze vergelijkingen eenduidig oplosbaar zijn, waarbij de parameters vrij gekozen moegen worden in een open omgeving van de parameters van a, terwijl bovendien de oplossing een C^k-functie is van de parameters. Dit geeft c).

Tenslotte het bewijs van c) $\Rightarrow$ a). Na omnummeren van de variabelen kunnen we c) als volgt formuleren. Schrijf $x = (x', x'')$, met $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ en $x'' = (x_{n+1}, \ldots, x_p)$. Er is een open omgeving U' van a' in $\mathbf{R}^n$, een open omgeving U'' van a'' in $\mathbf{R}^{p-n}$ en een C^k-afbeelding g van U' naar $\mathbf{R}^{p-n}$, met de eigenschap dat

$$X \cap (U' \times U'') = \{(x',\, g(x')) \mid x \in U'\}.$$

Definieer nu $\lambda(x) = (x',\, x'' - g(x'))$. Dit is een C^k-diffeomorfisme van $U' \times \mathbf{R}^{p-n}$ naar $U' \times \mathbf{R}^{p-n}$; de inverse wordt immers gegeven door $x \mapsto (x',\, x'' + g(x'))$. Anderzijds legt λ de verzameling $X \cap (U' \times U'')$ plat. $\square$

Merk op dat de projectie in c) een lokale coördinatisering van X definieert, we hebben dit verschijnsel eerder gezien bij de lokale coördinatiseringen van de cirkel en de bol.

Een karakterisering van een C^k-deelvariëteit van Y als beeld van een C^k-variëteit onder een geschikte C^k-afbeelding $f : X \to Y$, een C^k-inbedding van X in Y, wordt gegeven in Gevolg 3.3.5.

2.7 Cartesische Producten

Definitie 2.7.1 Zij $(X,\, \mathcal{A})$, respectievelijk $(Y,\, \mathcal{B})$ een C^r-variëteit van dimensie n, respectievelijk p. Voor $\kappa \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathcal{B}$ schrijven we

$$\kappa \times \lambda : (x,\, y) \mapsto (\kappa(x),\, \lambda(y)) : (X_\kappa \times Y_\lambda) \to (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p) = \mathbf{R}^{n+p}.$$

Deze afbeeldingen vormen een $(n+p)$-dimensionale C^r-atlas voor $X \times Y$. De $(n+p)$-dimensionale C^r-variëteit die daarmee onstaat heet de *Cartesisch-productvariëteit* $X \times Y$ van X en Y. $\oslash$

De projecties

$$\pi_1 : (x, y) \mapsto x, \tag{2.7.1}$$
$$\pi_2 : (x, y) \mapsto y, \tag{2.7.2}$$

zijn C^r-afbeeldingen van $X \times Y$ naar X, respectievelijk naar Y. Beide afbeeldingen zijn surjectief.

Anderzijds hebben we voor iedere $y \in Y$, respectievelijk $x \in X$ de inbedding

$$i_{1,\,y} : x \mapsto (x,\, y), \tag{2.7.3}$$
$$i_{2,\,x} : y \mapsto (x,\, y), \tag{2.7.4}$$

deze afbeeldingen zijn C^r van X, respectievelijk Y, naar $X \times Y$. Beide afbeeldingen zijn injectief.

Opgemerkt kan worden dat

$$\pi_1 \circ i_{1,y} = \mathrm{id}\ \text{ in }\ X, \tag{2.7.5}$$
$$\pi_2 \circ i_{2,x} = \mathrm{id}\ \text{ in }\ Y, \tag{2.7.6}$$

hieruit volgen opnieuw de bovenstaande surjectiviteits- en injectiviteitsuitspraken.

Opmerking 2.7.1 Een "vieze" constructie is de volgende. Voorzie $X \times Y$ van de kaarten κ_y, met κ een kaart voor X en $y \in Y$, waarbij het definitiegebied van κ_y gelijk is aan $X_\kappa \times \{y\}$ en hierop $\kappa_y = \kappa \circ \pi_1$. Hiermee krijgen we een n-dimensionale variëteit, die we met Z aanduiden. De identiteit is een bijectieve C^k-afbeelding van Z naar $X \times Y$, maar de inverse is niet eens continu als

$p > 0$. $\pi_1 : Z \to X$ en $i_{1,y} : X \to Z$ zijn lokale C^k-diffeomorfismen. Voor iedere $y \in Y$ is $X \times \{y\}$ open en gesloten in Z; Z heeft overaftelbaar veel samenhangscomponenten als $p > 0$. $\oslash$

Herhaald toepassen van de definitie leidt tot een d-voudig Cartesisch product

$$X = X_1 \times \ldots \times X_d = (X_1 \times \ldots \times X_{d-1}) \times X_d$$

van de variëteiten X_1 tot en met X_d. De dimensie van X is gelijk aan de som van de dimensies van de X_i's.

Een bekend voorbeeld is de *d-dimensionale torus*, T^d, die ontstaat als we voor iedere X_i de cirkel C nemen. Denken we bij C aan een periodieke variabele (een hoekvariabele), dan is T^d de natuurlijke toestandsruimte voor multi-periodieke verschijnselen, beschreven door d hoekvariabelen.

2.8 Complex-analytische Variëteiten

De definitie van een n-dimensionale complex-analytische variëteit wordt verkregen door in de definitie van een n-dimensionale C^r-variëteit overal $\mathbf{R}^n$ te vervangen door $\mathbf{C}^n$ en C^r door complex-analytisch. De identificatie van $\mathbf{C}^n$ met $\mathbf{R}^{2n}$ laat zien dat iedere n-dimensionale complex-analytische variëteit een $2n$-dimensionale reëel-analytische variëteit is. Een één-dimensionale complex-analytische variëteit heet een *Riemann-oppervlak*; soms wordt dit ook een *complexe kromme* genoemd. De theorie van complex-analytische variëteiten is zeer rijk en onder andere belangrijk voor de algebraïsche meetkunde, dit geldt al voor de theorie van Riemann-oppervlakken. Juist de rijkdom hiervan maakt dat een serieuze behandeling ervan een apart college vereist; om deze reden zullen we er hier niet veel aandacht aan besteden.

Voorbeeld 2.8.1 Is E een complex-lineaire ruimte van dimensie n, dan wordt de bijbehorende *complexe projectieve ruimte* $\mathrm{P}(E)$ gedefinieerd als de verzameling van alle één-dimensionale complex-lineaire deelruimten L van E. De coördinatiseringen zijn net als in Voorbeeld 2.4.2 gedefinieerd, daarmee wordt $\mathrm{P}(E)$ een $(n-1)$-dimensionale complex-analytische variëteit. Voor $E = \mathbf{C}^n$ schrijft men ook $\mathrm{P}_{n-1}(\mathbf{C})$ en noemt dit *de $(n-1)$-dimensionale complexe projectieve ruimte.*

Voor $n = 2$ krijgen we zo de "complexe projectieve lijn" $\mathrm{P}_1(\mathbf{C})$. Deze kan ook uit het complexe vlak $\mathbf{C}$ verkregen worden door middel van plakken, als in §2.5, met de volgende plakgegevens.

$$V_1 = V_2 = \mathbf{C}, \;\; V_{1,2} = V_{2,1} = \mathbf{C} \setminus \{0\},$$
$$\phi_{2,1} = \phi_{1,2} : z \mapsto \tfrac{1}{z}.$$

Identificeren we $\mathbf{C}$ met $\mathbf{R}^2$, door middel van $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$, dan zien we door vergelijken van

$$\tfrac{1}{z} = |z|^{-2}\,\bar{z}$$

met (2.4.1), dat de coördinatentransformatie hier gelijk is aan de coördinatentransformatie ϕ bij de stereografische projecties, gevolgd door de complex conjugatie $z \mapsto \bar{z}$, het diffeomorfisme $(x,\, y) \mapsto (x,\, -y)$ van $\mathbf{R}^2$ naar zichzelf. Hiermee is $\mathrm{P}_1(\mathbf{C})$ als reëel-analytische variëteit diffeomorf met de twee-dimensionale sfeer; $\mathrm{P}_1(\mathbf{C})$ heet ook wel de *Riemann-sfeer*. We hebben $\mathrm{P}_1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, het complexe vlak met daaraan toegevoegd een punt in oneindig. $\oslash$

2.9 Opgaven

2.9.1 Bewijs dat
$$x \mapsto \frac{1}{r^2 - \|x\|^2}\, x$$
een rationaal diffeomorfisme is van de bol om 0 in $\mathbf{R}^n$ met straal r, naar $\mathbf{R}^n$. Bewijs dat iedere n-dimensionale C^r-variëteit een atlas $\mathcal{A}$ heeft met $V_\kappa = \mathbf{R}^n$ voor iedere $\kappa \in \mathcal{A}$.

2.9.2 Zij X, Y en A C^k-variëteiten en veronderstel dat $\pi \in \mathrm{C}^k(X, Y)$, π is een lokaal diffeomorfisme en π is surjectief. Bewijs dat $f : Y \to A$ een C^k-afbeelding is, dan en slechts dan als $f \circ \pi \in \mathrm{C}^k(X, A)$.

Zij nu C de cirkel in $\mathbf{R}^2$ om de oorsprong met straal gelijk aan 1. Bewijs dat $\varphi : \mathbf{R} \to A$ van de vorm
$$\varphi : t \mapsto f(\cos 2\pi t,\, \sin 2\pi t)$$
is voor een $f : C \to A$, dan en slechts dan als $\varphi(t+1) = \varphi(t)$ voor alle $t \in \mathbf{R}$. Bewijs dat $f \in \mathrm{C}^k(C, A)$ dan en slechts dan als $\varphi \in \mathrm{C}^k(\mathbf{R}, A)$. Bespreek de uitspraak: "een periodieke C^k-functie met periode 1 is hetzelfde als een C^k-functie op de cirkel."

2.9.3 Bewijs dat X compact is, dan en slechts dan als er eindig veel $\kappa_1, \ldots, \kappa_N \in \mathcal{A}$ zijn en compacte deelverzamelingen K_i van V_{κ_i}, met de eigenschap dat er voor iedere $x \in X$ een index i is, waarvoor $x \in X_{\kappa_i}$ en $\kappa_i(x) \in K_i$.

2.9.4 Zij $\tilde{\mathbf{R}}$ de variëteit die verkregen wordt door de verzameling $\mathbf{R}$ te voorzien van de kaart $\kappa : x \mapsto x^3$. Is de identiteit, beschouwd als afbeelding van $\tilde{\mathbf{R}}$ naar $\mathbf{R}$, een differentieerbare afbeelding? En als afbeelding van $\mathbf{R}$ naar $\tilde{\mathbf{R}}$? Is $\tilde{\mathbf{R}}$ diffeomorf met $\mathbf{R}$?

2.9.5 Bewijs dat de hemelsfeer van een eindig-dimensionale lineaire ruimte compact is. Zij S de eenheidssfeer in $\mathbf{R}^n$ om de oorsprong en zij $\iota : S \to \mathrm{S}(\mathbf{R}^n)$ de beperking tot S van de afbeelding $\sigma : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathrm{S}(\mathbf{R}^n)$. Bewijs dat ι een reëel-analytisch diffeomorfisme is van S naar $\mathrm{S}(\mathbf{R}^n)$. Zij $A \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ inverteerbaar. Bewijs dat
$$A_{\mathrm{S}} : l \mapsto A(l) \quad l \in \mathrm{S}(\mathbf{R}^n),$$
een reëel-analytisch diffeomorfisme A_{S} van $\mathrm{S}(\mathbf{R}^n)$ naar zichzelf definieert en bereken het reëel-analytische diffeomorfisme
$$A_S := \iota^{-1} \circ A_{\mathrm{S}} \circ \iota : S \to S$$
van S naar zichzelf.

2.9.6 Als E een n-dimensionale lineaire ruimte is, dan correspondeert een basiskeuze in E met een lineair isomorfisme $A : E \to \mathbf{R}^n$. Is $B : E \to \mathbf{R}^n$ een ander lineair isomorfisme dan is $A^{-1}(S) = B^{-1}(S)$, dan en slechts dan als $C := A \circ B^{-1}$ een orthogonale matrix is. Bewijs dit.

Een *ellipsoïde* om de oorsprong in $\mathbf{R}^n$ is een verzameling van de vorm
$$X = D(S(a_1, \ldots, a_n)),$$

waarin D een draaiïng is,

$$S(a_1, \ldots, a_n) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} (x_j/a_j)^2 = 1\}$$

en de a_j positieve coëfficiënten zijn, de *aslengten van* X genaamd.

Bewijs dat X een ellipsoïde is, dan en slechts dan als $X = C(S)$ voor een inverteerbare $n \times n$-matrix C. Dit laat zien dat het begrip "eenheidssfeer om de oorsprong in E" afhankelijk is van de keuze van een basis in E, basisonafhankelijk is alleen het begrip "ellipsoïde om de oorsprong in E".

2.9.7 Zij E een eindig-dimensionale lineaire ruimte. Bewijs dat $\mathrm{P}(E)$ compact is. Zij $\pi : \mathrm{S}(E) \to \mathrm{P}(E)$ de afbeelding, die aan iedere straal $s \in E$ de rechte lijn $L \in \mathrm{P}(E)$ toevoegt, waarvoor $s \subset L$. Bewijs dat π continu is en surjectief.

Bewijs dat π een lokaal reëel-analytisch diffeomorfisme is. Is π een diffeomorfisme?

2.9.8 Bewijs dat de projectieve lijn $\mathrm{P}(\mathbf{R}^2)$ diffeomorf is met een cirkel C. Zij S de 2-dimensionale sfeer. U mag gebruik maken van de Stelling van Jordan, die zegt dat als γ een injectieve en continue afbeelding is van C naar S, dan heeft $S \setminus \gamma(C)$ twee samenhangscomponenten. Bewijs dat het projectieve vlak $\mathrm{P}(\mathbf{R}^3)$ niet homeomorf is met S.

2.9.9 Bewijs dat de afbeelding $\perp$, die aan iedere $L \in \mathrm{G}_{d,\, n}$ zijn orthogonale complement $L^{\perp}$ toevoegt, een reëel-analytisch diffeomorfisme definieert van $G_{d,\, n}$ naar $G_{n-d,\, n}$

2.9.10 Bewijs dat de Möbius-band M een 2-dimensionale reëel-analytische variëteit is. Zij $H \subset M$ de "hartlijn", die in beide kaarten correspondeert met $u = 0$. Bewijs dat H diffeomorf is met een cirkel en dat $M \setminus H$ samenhangend is.

Maak een papieren model van M. Volg met de vinger één zijde van het papier-oppervlak eenmaal rond langs de hartlijn. Verifieer dat $M \setminus H$ samenhangend is, door het papieren model langs de hartcirkel H door te knippen. Volg opnieuw het oppervlak van $M \setminus H$, aan één zijde, eenmaal rond.

Maak een tweede model van M, knip deze nu door langs de cirkel C_ε, die in de kaarten correspondeert met $u = \pm\varepsilon$. We hadden $C_0 = H$; het is nu de bedoeling dat $0 < \varepsilon < c$. Verklaar zoveel mogelijk van wat er gebeurt in termen van de kaarten voor M. (Er zijn ook verschijnselen die te maken hebben met de manier waarop het model in de omliggende ruimte $\mathbf{R}^3$ hangt.)

2.9.11 De *Klein'se fles* K wordt verkregen door in de cilinder $]0,\, 1+\varepsilon[\, \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de punten van de vorm $(x,\, y)$, met $0 < x < \varepsilon$ en $y \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, te identificeren met $(x+1,\, -y)$. Construeer plakgegevens in $\mathbf{R}^2$, die K opleveren als een twee-dimensionale, reëel-analytische variëteit. Bewijs dat K compact is. Laat zien dat wegsnijden uit K van de cirkel C, die correspondeert met $y = \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$ $(= -\frac{1}{2} + \mathbf{Z})$, een variëteit oplevert die diffeomorf is met de Möbius-band. Troost voor degenen die geprobeerd hebben om een model van K te knutselen: het is een stelling dat K niet diffeomorf is met een differentieerbare deelvariëteit van $\mathbf{R}^3$.

2.9.12 Zij X, resp. Y C^k-variëteiten van dimensie n, resp. p en f een afbeelding van X naar Y. Bewijs dat f een C^k-afbeelding is, dan en slechts dan als de grafiek

$$G := \{(x,\, f(x)) \mid x \in X\}$$

van f een n-dimensionale C^k-deelvariëteit is van $X \times Y$, waarvoor $\pi_1|_G$ een C^k-diffeomorfisme is van G naar X. Laat aan een voorbeeld zien dat de laatste voorwaarde niet weggelaten kan worden. Bewijs ook dat G een gesloten deelverzameling is van $X \times Y$, zodra f continu is.

2.9.13 Het is evident dat de d-dimensionale torus diffeomorf is met een deelvariëteit van $\mathbf{R}^{2d}$. Dat het voor $d = 2$ al zuiniger kan, laat het volgende zien.

Zij $0 < r < R$. Bewijs dat

$$X = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x^2 + y^2 - R^2 - r^2 + z^2)^2 - 4R^2(r^2 - z^2) = 0\}$$

een twee-dimensionale reëel-analytische deelvariëteit is van $\mathbf{R}^3$. Bewijs dat de afbeelding

$$(\alpha,\, \beta) \mapsto ((R + r\cos\alpha)\cos\beta,\, (R + r\cos\alpha)\sin\beta,\, r\sin\alpha)$$

een reëel-analytisch diffeomorfisme induceert van de twee-dimensionale torus $(\mathbf{R}/\mathbf{Z}2\pi)^2$ naar X.

2.9.14 Zij $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ een veeltermfunctie met complexe coëfficiënten, niet allemaal gelijk aan nul. Zij g de graad van f en zij a het aantal nulpunten van $f(z)$. Het is bekend dat $a \leq g$.

Zij $0 \leq r_1 < r_2 < \dots r_h$ de afstanden tot de oorspong van de nulpunten, geordend naar grootte. Hierin is dus $h \leq a$. Voor $r \neq r_i$, zij $w(r)$ het windingsgetal van $u \mapsto f(r\,u)/|f(r\,u)| : C \to C$. Hierin is C de eenheidscirkel in het complexe vlak.

Bewijs dat $w(r) = g$ als $r > r_h$, met de uitleg dat $w(r) = g$ voor alle $r \geq 0$ als $a = 0$. Bewijs hiermee de *hoofdstelling van de algebra*, die zegt dat iedere complexe veeltermfunctie van positieve graad minstens één nulpunt heeft.

2.9.15 Een rationale functie van een complexe variabele is een functie van de vorm $f(z) = p(z)/q(z)$, waarin $p(z)$ en $q(z)$ complexe veeltermen zijn, $q(z)$ niet identiek gelijk aan nul. Als N de collectie van nulpunten van $q(z)$ in $\mathbf{C}$ is, dan is N eindig en $f(z)$ een complex-analytische functie van $D := \mathbf{C} \setminus N$ naar $\mathbf{C}$.

Beschouw $\mathbf{C}$ als deelverzameling van $\mathrm{P}_1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Bewijs dat er een eenduidig bepaalde complex-analytische afbeelding $\tilde{f}$ van $\mathrm{P}_1(\mathbf{C})$ naar $\mathrm{P}_1(\mathbf{C})$ is, met $\tilde{f}|_D = f$.

2.9.16 Zij $p, q \in \mathbf{C}$, $4p^3 + 27q^2 \neq 0$. Bewijs dat

$$C_{p,q} := \{(x,\, y) \in \mathbf{C}^2 \mid y^2 = x^3 + px + q\}$$

een complex ééndimensionale, complex-analytische deelvariëteit is van $\mathbf{C}^2$.

Vat nu $\mathbf{C}^2$ op als deelverzameling van $\mathrm{P}_2(\mathbf{C})$, door $(x,\, y) \in \mathbf{C}^2$ te identificeren met

$$\mathbf{C}\,(x,\, y,\, 1) = \{c\,(x,\, y,\, 1) \mid c \in \mathbf{C}\} \in \mathrm{P}_2(\mathbf{C}).$$

Laat zien dat de afsluiting $E := \bar{C}_{p,q}$ van $C_{p,q}$ in $\mathrm{P}_2(\mathbf{C})$ bestaat uit $C_{p,q}$, met daaraan toegevoegd het element $\mathbf{C}\,(0,\, 1,\, 0)$ van $\mathrm{P}_2(\mathbf{C})$. Bewijs dat E een complex ééndimensionale, complex-analytische deelvariëteit van $\mathrm{P}_2(\mathbf{C})$ is.

E is compact en samenhangend en heet in de algebraïsche meetkunde een *complexe elliptische kromme*. $C_{p,q}$ heet het *affiene deel* van $E = \bar{C}_{p,q}$.

Hoofdstuk 3

De Raakruimte

We weten nu wat een differentieerbare afbeelding f van een differentieerbare variëteit X naar een differentieerbare variëteit Y is, maar nog niet wat de afgeleide L van f in een punt $a \in X$ is. We zouden graag willen zeggen: "Voor kleine h is $L(h)$ de lineaire benadering voor de toename $f(a+h) - f(a)$ van f". Of: "voor iedere vector v is $L(v)$ de afgeleide naar t in $t = 0$ van $f(a+t\,v)$". Dit gaat echter zo niet, omdat X en Y geen open deelverzamelingen van een lineaire ruimte hoeven te zijn.

In lokale coördinatiseringen kan dit echter wèl, maar dit leidt tot de complicatie dat de gevonden objecten functies worden van de lokale coördinatiseringen. Na correcte verwerking hiervan krijgen we, voor iedere $a \in X$, een n-dimensionale lineaire ruimte $\mathrm{T}_a X$, waarvan ieder element geïnterpreteerd kan worden als een *infinitesimale beweging* v in X vanuit het punt a. De afbeelding f voert een infinitesimale beweging in X over in een infinitesimale beweging in Y, vanuit het punt $f(a)$. Dit leidt tot een lineaire afbeelding $\mathrm{T}_a f$ van $\mathrm{T}_a X$ naar $\mathrm{T}_{f(a)} Y$, die in lokale coördinaten met de afgeleide correspondeert. De T in de notatie staat voor *tangent*, van het latijnse tangere = aanraken.

In de begintijd van de differentiaalrekening werden infinitesimale verplaatsingen v niet nader verklaard. Er werd mee gerekend op een voor de hand liggende manier en er werd geconstateerd dat dit niet tot ongelukken leidde. Onze definitie van raakvectoren v is operationeel, in termen van afgeleiden van vectorwaardige functies van een reële variabele. Ze ligt echter voldoende dicht bij de interpretatie van infinitesimale bewegingen, om haar als een vertaling van dit klassieke begrip op te kunnen vatten.

3.1 Raakvectoren als Snelheidsvectoren

Zij X een n-dimensionale C^r-variëteit, $r \geq 1$, met atlas $\mathcal{A}$. Een *beweging* door het punt $a \in X$ is een differentieerbare kromme $\gamma : I \to X$ met $\gamma(s) = a$; hierin is I een open interval om s in $\mathbf{R}$. Noteer

$$\mathcal{A}_a := \{\kappa \in \mathcal{A} \mid a \in X_\kappa\}. \tag{3.1.1}$$

De differentieerbaarheid van $\gamma(t)$ in $t = s$ betekent, dat voor iedere $\kappa \in \mathcal{A}_a$ de kromme $t \mapsto \kappa(\gamma(t))$ in $\mathbf{R}^n$ differentieerbaar is in $t = s$, we noteren de corresponderende snelheidsvector met

$$v_\kappa := (\kappa \circ \gamma)'(s) \in \mathbf{R}^n. \tag{3.1.2}$$

Is $\lambda \in \mathcal{A}_a$ een andere lokale coördinatisering van een omgeving van a, dan is

$$\lambda \circ \gamma = (\lambda \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ \gamma)$$

in een omgeving van 0 in I. Merk op dat hierin $\kappa \circ \gamma$ afbeeldt van een open deel van $\mathbf{R}$ naar $\mathbf{R}^n$ en $\lambda \circ \kappa^{-1}$ van een open deel van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}^n$. Toepassing van de kettingregel geeft nu dat

$$v_\lambda = \mathrm{D}(\lambda \circ \kappa^{-1})_{\kappa(a)}\,(v_\kappa), \quad \kappa, \lambda \in \mathcal{A}_a. \tag{3.1.3}$$

Hierin hebben we voor de duidelijkheid het punt $\kappa(a) \in \mathbf{R}^n$, waar gedifferentieerd wordt, als index onderaan gehangen.

Dit impliceert dat v_λ alleen van v_κ afhangt, in de volgende zin: als δ een andere differentieerbare kromme in X is, met $\delta(r) = a$ en $(\kappa \circ \delta)'(r) = v_\kappa$, dan is $(\lambda \circ \delta)'(r) = v_\lambda$. Verder lezen we uit (3.1.3) af, dat $v_\lambda \in \mathbf{R}^n$ op een lineaire manier van v_κ afhangt, namelijk via de lineaire afbeelding $\mathrm{D}(\lambda \circ \kappa^{-1})_{\kappa(a)}$. Dit geeft aanleiding tot de volgende definitie.

Definitie 3.1.1 Een *raakvector aan de differentieerbare variëteit X in het punt $a \in X$* is een afbeelding $v : \kappa \mapsto v_\kappa$ van $\mathcal{A}_a$ naar $\mathbf{R}^n$, die aan de transformatieformule (3.1.3) voldoet. De verzameling van alle raakvectoren aan X in het punt a heet de *raakruimte* $\mathrm{T}_a X$ *aan* X *in het punt* a. $\oslash$

Lemma 3.1.1 *Voor iedere $\kappa \in \mathcal{A}_a$ is de afbeelding*

$$\mathrm{D}\,\kappa_a : v \mapsto v_\kappa \tag{3.1.4}$$

bijectief van $\mathrm{T}_a X$ naar $\mathbf{R}^n$. Er is een eenduidig bepaalde optelling en scalairvermenigvuldiging in $\mathrm{T}_a X$, waarmee $\mathrm{T}_a X$ een lineaire ruimte wordt en $\mathrm{D}\,\kappa_a$, voor iedere $\kappa \in \mathcal{A}_a$, een lineaire afbeelding van $\mathrm{T}_a X$ naar $\mathbf{R}^n$. De lineaire ruimte $\mathrm{T}_a X$ is n-dimensionaal.

Bewijs Stel $v, w \in \mathrm{T}_a X$, $v_\kappa = w_\kappa$. Uit (3.1.3) lezen we af dat voor iedere $\lambda \in \mathcal{A}_a$ geldt dat

$$v_\lambda = \mathrm{D}(\lambda \circ \kappa^{-1})_{\kappa(a)}\,(v_\kappa) = \mathrm{D}(\lambda \circ \kappa^{-1})_{\kappa(a)}\,(w_\kappa) = w_\lambda,$$

dus is $v = w$ als afbeelding van $\mathcal{A}_a$ naar $\mathbf{R}^n$. Dit bewijst dat $\mathrm{D}\,\kappa_a$ injectief is.

Zij nu $w \in \mathbf{R}^n$, definieer

$$v_\lambda := \mathrm{D}(\lambda \circ \kappa^{-1})_{\kappa(a)}\,(w), \quad \lambda \in \mathcal{A}_a.$$

Voor iedere $\mu \in \mathcal{A}_a$ is

$$\mu \circ \kappa^{-1} = (\mu \circ \lambda^{-1}) \circ (\lambda \circ \kappa^{-1})$$

in een omgeving van $\kappa(a)$ in $\mathbf{R}^n$. Een toepassing van de kettingregel geeft daarom dat

$$v_\mu = \mathrm{D}(\mu \circ \lambda^{-1})_{\lambda(a)}\,(v_\lambda),$$

hieruit lezen we af dat $v \in \mathrm{T}_a X$. Anderzijds is

$$\mathrm{D}\,\kappa_a\,(v) = v_\kappa = \mathrm{D}(\kappa \circ \kappa^{-1})_{\kappa(a)}\,(w) = w,$$

de conclusie is dat $\mathrm{D}\,\kappa_a$ ook surjectief is.

Is T een verzameling en K een bijectieve afbeelding van T naar een lineaire ruimte E, dan definieert

$$u +_K v := K^{-1}[K(u) + K(v)],$$
$$c \cdot_K Kv := K^{-1}[c \cdot K(v)],$$

voor alle $u, v \in T$ en $c \in \mathbf{R}$, een optelling $+_K$ en scalairvermenigvuldiging $\cdot_K$ in T. Daarmee wordt T een lineaire ruimte, en K is dan een bijectieve linaire afbeelding van $(T, +_K, \cdot_K)$ naar E. T en E hebben dezelfde dimensie, omdat K een basis in T overvoert in een basis in E.

Is L een andere bijectieve afbeelding van T naar een lineaire ruimte F, dan is $+_L = +_K$ en $\cdot_L = \cdot_K$, dan en slechts dan als $L \circ K^{-1}$ een lineaire afbeelding is van E naar F. Dit alles volgt direct door het uitschrijven van de definities van lineaire ruimte en lineaire afbeelding.

We passen dit toe op $T = \mathrm{T}_a X$, $K = \mathrm{D}\,\kappa_a$, $L = \mathrm{D}\,\lambda_a$, $E = F = \mathbf{R}^n$, $\kappa, \lambda \in \mathcal{A}_a$. We hebben net aangetoond dat K en L bijectief zijn. Nu geeft

$$L(v) = v_\lambda = \mathrm{D}(\lambda \circ \kappa^{-1})_{\kappa(a)}\,(v_\kappa) = \mathrm{D}(\lambda \circ \kappa^{-1})_{\kappa(a)} \circ K(v)$$

voor alle v, dat

$$L \circ K^{-1} = \mathrm{D}(\lambda \circ \kappa^{-1})_{\kappa(a)}$$

een lineaire afbeelding is van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}^n$. Hiermee zijn alle uitspraken bewezen. □

Als X een open deelverzameling is van $\mathbf{R}^n$, dan wordt deze opgevat als variëteit met de $\kappa = \mathrm{id}$, de identiteit in X, als enige kaart. Dit leidt tot de zogenaamde *kanonieke identificatie*

$$\mathrm{D}(\mathrm{id})_a : \mathrm{T}_a X \to \mathbf{R}^n \tag{3.1.5}$$

van alle raakruimten $\mathrm{T}_a X$, $a \in X$, met $\mathbf{R}^n$.

In het algemeen zullen we echter de raakruimten $\mathrm{T}_a X$ aan een variëteit X als allemaal verschillende, onderling disjuncte, ruimten opvatten. Tenslotte is een infinitesimale beweging vanuit een punt a niet hetzelfde als een infinitesimale beweging vanuit b, zodra $b \neq a$.

3.2 De Raakafbeelding

De tekst voorafgaande aan (3.1.3) zegt dat, voor iedere differentieerbare kromme γ in X met $\gamma(s) = a$, de afbeelding

$$\kappa \mapsto (\kappa \circ \gamma)'(s) : \mathcal{A}_a \to \mathbf{R}^n$$

een raakvector aan X in het punt a definieert. Men noemt dit element van $\mathrm{T}_{\gamma(s)} X$ de *afgeleide* of *snelheidsvector* $\gamma'(s)$ van de kromme γ ten tijde s. Combinatie van (3.1.4) met de definitie van $\gamma'(s)$ geeft de formule

$$\mathrm{D}\,\kappa_a\left(\gamma'(s)\right) = (\kappa \circ \gamma)'(s), \tag{3.2.1}$$

hetgeen gelezen kan worden als een kettingregel voor de afgeleide van $\kappa \circ \gamma$. Voor willekeurige $w \in \mathbf{R}^n$ geldt voor de kromme

$$\gamma : t \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(a) + tw)$$

in X dat $\gamma(0) = a$ en $(\kappa \circ \gamma)'(0) = w$. Dit laat zien dat ieder element van $\mathbf{R}^n$ op kan treden als rechterlid van (3.2.1). Vanwege Lemma 3.1.1 volgt hieruit dat er bij iedere $v \in \mathrm{T}_a X$ een C^r-kromme γ is met $\gamma(0) = a$ en $\gamma'(0) = v$.

Lemma 3.2.1 *Zij X en Y differentieerbare variëteiten en f een afbeelding van X naar Y, die differentieerbaar is in het punt $a \in X$. Er is een eenduidig bepaalde afbeelding $\mathrm{T}_a f$ van $\mathrm{T}_a X$ naar $\mathrm{T}_{f(a)} Y$, met de eigenschap dat $(f \circ \gamma)'(s) = \mathrm{T}_a f(\gamma'(s))$, als γ een differentieerbare kromme is in X met $\gamma(s) = a$. $\mathrm{T}_a f$ is een lineaire afbeelding van $\mathrm{T}_a X$ naar $\mathrm{T}_{f(a)} Y$. Is κ een kaart in een omgeving van a in X en λ een kaart in een omgeving van $f(a)$ in Y, dan is*

$$\mathrm{T}_a f = (\mathrm{D}\,\lambda_{f(a)})^{-1} \circ \mathrm{D}(\lambda \circ f \circ \kappa^{-1})_{\kappa(a)} \circ \mathrm{D}\,\kappa_a. \tag{3.2.2}$$

Bewijs We beginnen met op te merken dat

$$(\lambda \circ f \circ \gamma)'(s) = \mathrm{D}\,\lambda_{f(a)}\,((f \circ \gamma)'(s)).$$

Anderzijds kunnen we de kettingregel toepassen op

$$\lambda \circ f \circ \gamma = (\lambda \circ f \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ \gamma),$$

dit geeft dat

$$(\lambda \circ f \circ \gamma)'(s) = \mathrm{D}(\lambda \circ f \circ \kappa^{-1})_{\kappa(a)} \circ \mathrm{D}\,\kappa_a(\gamma'(s)).$$

Vergelijking van beide identiteiten leidt tot

$$(f \circ \gamma)'(s) = (\mathrm{D}\,\lambda_{f(a)})^{-1} \circ \mathrm{D}(\lambda \circ f \circ \kappa^{-1})_{\kappa(a)} \circ \mathrm{D}\,\kappa_a\,(\gamma'(s)).$$

Hieruit zien we dat $(f \circ \gamma)'(s)$ uit $\gamma'(s)$ verkregen wordt door er de afbeelding $\mathrm{T}_a f$ uit (3.2.2) op los te laten; deze afbeelding is lineair. □

De lineaire afbeelding $\mathrm{T}_a f$ van $\mathrm{T}_a X$ naar $\mathrm{T}_{f(a)} Y$ uit Lemma 3.2.1 heet de *raakafbeelding* van f in het punt a.

Uit de definitie volgt meteen dat

$$\gamma'(s) = \mathrm{T}_s\,\gamma\,(1), \tag{3.2.3}$$

als $\gamma : I \to \mathbf{R}$ een differentieerbare kromme is in een differentieerbare variëteit X en we $\mathrm{T}_s I$ op kanonieke wijze met $\mathbf{R}$ hebben geïdentificeerd.

Is Y een open deelverzameling van $\mathbf{R}^p$, dan noteert men ook wel

$$\mathrm{D}\,f(a) = \mathrm{D}\,f_a := \mathrm{D}(\mathrm{id})_{f(a)} \circ \mathrm{T}_a f : \mathrm{T}_a X \to \mathbf{R}^p \tag{3.2.4}$$

voor de lineaire afbeelding van $\mathrm{T}_a X$ naar $\mathbf{R}^p$, die we krijgen als we $\mathrm{T}_a f$ laten volgen door de kanonieke identificatie van $\mathrm{T}_{f(a)} Y$ met $\mathbf{R}^p$. Merk op, dat als $f = \kappa$ een lokale coördinatisering van X is, dan geeft (3.2.2) met λ gelijk aan de identiteit, dat de in (3.2.4) gedefinieerde $\mathrm{D}\,f(a)$ gelijk is aan de in (3.1.4) gedefinieerde $\mathrm{D}\,\kappa_a$. Dit geeft een rechtvaardiging achteraf van de notatie.

Is f een reëelwaardige functie in X, differentieerbaar in het punt $a \in X$, dan is

$$\mathrm{d}f(a) = \mathrm{D}\,f(a),$$

zie (1.7.5), een reëelwaardige lineaire functie in $\mathrm{T}_a X$. Dat wil zeggen een element van

$$\mathrm{L}(\mathrm{T}_a X, \mathbf{R}) = (\mathrm{T}_a X)^*, \tag{3.2.5}$$

de *duale van de raakruimte* aan de variëteit X in het punt a. Een $\xi \in (\mathrm{T}_a X)^*$, een *lineaire vorm* in $\mathrm{T}_a X$, heet ook wel een *coraakvector* aan de variëteit X in het punt $a \in X$.

Iedere $\xi \in (\mathrm{T}_a X)^*$ is van de vorm $\xi = \mathrm{d}f(a)$ voor een geschikte C^k-functie f in een open omgeving van a in X. Hiervoor is het namelijk voldoende om in lokale coördinaten de lineaire functies $\lambda : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ te beschouwen: dit zijn C^k-functies met $\mathrm{d}\lambda(x) = \lambda$ in ieder punt $x \in \mathbf{R}^n$.

Opmerking 3.2.1 Er is a priori geen reden om coraakvectoren met raakvectoren te identificeren. Is er echter in iedere raakruimte $\mathrm{T}_a X$ een niet-gedegenereerde bilineaire vorm β_x gedefinieerd, dan geeft die een bijectieve lineaire afbeelding van $\mathrm{T}_a X$ naar $(\mathrm{T}_a X)^*$, die gebruikt kan worden om de raakruimten met de coraakruimten te identificeren. Daarmee kan een raakvector v_a aan X in het punt a met de totale afgeleide $\mathrm{d}f(a)$ van de functie f in het punt a geïdentificeerd worden.

Vooruitlopend op latere terminologie, vermelden we hier dat als β een pseudo-Riemann-structuur in X is, dan is v het gradiëntenvectorveld van f met betrekking tot β, zie Opmerking 6.5.2. Is daarentegen β een symplectische structuur, dan is v een Hamilton-vectorveld, zie (6.2.5). $\oslash$

Voor raakafbeeldingen geldt de volgende *kettingregel*.

Stelling 3.2.2 *Zij X, Y en Z C^k-variëteiten. Als $f \in \mathrm{C}^k(X, Y)$ en $g \in \mathrm{C}^k(Y, Z)$, dan is $g \circ f \in \mathrm{C}^k(X, Z)$ en*

$$\mathrm{T}_x(g \circ f) = \mathrm{T}_{f(x)}\, g \circ \mathrm{T}_x\, f \quad \text{voor iedere} \quad x \in X. \tag{3.2.6}$$

Bewijs Als κ, resp. λ, resp. μ een kaart is voor X, resp. Y, resp. Z in een open omgeving van x, resp. $y = f(x)$, resp. $z = g(y) = g \circ f(x)$, dan is

$$\mu \circ (g \circ f) \circ \kappa^{-1} = (\mu \circ g \circ \lambda^{-1}) \circ (\lambda \circ f \circ \kappa^{-1})$$

in een open omgeving van $\kappa(x)$. Hieruit volgt de eerste bewering, omdat de samenstelling van C^k-afbeeldingen tussen Euclidische ruimten een C^k-afbeelding is.

Bij iedere $v \in \mathrm{T}_x X$ is er een differentieerbare kromme γ in X met $\gamma(0) = x$ en $\gamma'(0) = v$. Vanwege het voorgaande is $\delta := f \circ \gamma$ een differentieerbare kromme in Y met $\delta(0) = y$ en

$$\varepsilon := (g \circ f) \circ \gamma = g \circ (f \circ \gamma) = g \circ \delta$$

een differentieerbare kromme in Z met $\varepsilon(0) = z$. De definitie van raakafbeelding uit Lemma 3.2.1 gebruikend, krijgen we dat

$$\mathrm{T}_x(g \circ f)\,(v) = \varepsilon'(0) = \mathrm{T}_y\, g\,(\delta'(0)) = \mathrm{T}_y\, g\,(\mathrm{T}_x\, f\,(v)).$$

Omdat dit voor iedere $v \in \mathrm{T}_x X$ geldt, is (3.2.6) bewezen. $\square$

Opmerking 3.2.2 We besluiten deze paragraaf met enige klassieke terminologie. $\lambda \circ \kappa^{-1}$ is de afbeelding die $(\kappa_1(x), \ldots, \kappa_n(x))$ in $(\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x))$ overvoert. In coördinaten uitgeschreven wordt (3.1.3):

$$v_{\lambda,\, i} = \sum_{j=1}^{n} \tfrac{\partial \lambda_i}{\partial \kappa_j}\, v_{\kappa,\, j}, \tag{3.2.7}$$

waarbij het punt $\kappa(a)$, waar wordt gedifferentieerd, uit de notatie is weggelaten. In de gebruikelijke matrixnotatie zijn v_κ en v_λ dus *kolomvectoren*. Men zegt dat v_κ onder de coördinatentransformatie van κ naar λ *contravariant* in v_λ overgaat. Raakvectoren aan X = snelheidsvectoren van bewegingen in X worden in deze terminologie daarom ook wel als "contravariante vectoren" aangeduid.

Anderzijds, als we schrijven $\xi_\kappa = \mathrm{d}(f \circ \kappa^{-1})_{\kappa(a)}$, de totale afgeleide van f in de lokale coördinaten κ, dan geeft toepassing van de kettingregel op

$$f \circ \kappa^{-1} = (f \circ \lambda^{-1}) \circ (\lambda \circ \kappa^{-1}),$$

dat

$$\xi_{\kappa,\,j} = \sum_{i=1}^{n} \xi_{\lambda,\,i} \, \frac{\partial \lambda_i}{\partial \kappa_j}. \tag{3.2.8}$$

Hierin treden ξ_λ en ξ_κ dus op als *rijvectoren.* De transformatie (3.2.8) heet *covariant.* Coraakvectoren aan X = totale afgeleiden van functies in X worden daarom ook wel "covariante vectoren" genoemd.

De namen "covariant" en "contravariant" zijn in het begin van deze eeuw door Ricci en Levi-Civita ingevoerd, met als eerste voorbeeld de transformatieregel voor de totale afgeleide $\mathrm{d}f$ van een reëelwaardige functie f in X. Misschien noemden ze dit "covariant", omdat dit hun eerste voorbeeld was, een andere verklaring geven ze niet.

De terminologie wordt in de notatie soms weergegeven door de coördinaten en de componenten van contravariante vectoren met *bovenindices* te noteren, dus κ^j en v_κ^j, in plaats van κ_j en $v_{\kappa,\,j}$. De componenten van covariante vectoren worden met *benedenindices* genoteerd, omdat bij partiële differentiatie van f naar x^j de x^j in de noemer komt en daarmee de index j beneden. Dus $\xi_{\kappa,\,j}$ blijft zo.

Men combineert deze notatie met *Einstein's sommatieconventie.* Die bestaat eruit dat, als in een term dezelfde index j als bovenindex *en* als benedenindex optreedt, men dan sommeert over deze index, terwijl men het sommatiesymbool $\sum_{j=1}^n$ daarbij uit de notatie weglaat. Dit correspondeert met het idee, dat het bij een coraakvector ξ en een raakvector v heel natuurlijk is om te kijken naar de waarde

$$\xi(v) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, v^j.$$

van de lineaire functie ξ in v.

Met deze conventies krijgen (3.2.7) en (3.2.8) de vorm

$$v_\lambda^i = \frac{\partial \lambda^i}{\partial \kappa^j} \, v_\kappa^j, \tag{3.2.9}$$

$$\xi_{\kappa,\,j} = \xi_{\lambda,\,i} \, \frac{\partial \lambda^i}{\partial \kappa^j}. \tag{3.2.10}$$

Als men veel met uitdrukkingen met indices in lokale coördinaten moet rekenen, dan zijn dit handige conventies. In situaties waar bovenindices ook machten kunnen voorstellen, kan een waarschuwing verhelderend zijn. $\oslash$

3.3 Inbeddingen

Uit (3.2.2), en het feit dat de totale afgeleiden van kaarten lineaire isomorfismen zijn, lezen we af dat $\mathrm{T}_a f$ injectief, respectievelijk bijectief is, dan en slechts dan als $\mathrm{D}(\lambda \circ f \circ \kappa^{-1})_{\kappa(a)}$ dit is. Omdat kaarten diffeomorfismen zijn en iedere samenstelling van diffeomorfismen een diffeomorfisme is, concluderen we meteen de volgende variant voor variëteiten van de *inverse-functiestelling.*

Stelling 3.3.1 *Zij X en Y C^k-variëteiten, en zij $f \in \mathrm{C}^k(X, Y)$, $k \geq 1$. Dan is f een lokaal C^k-diffeomorfisme van X naar Y, dan en slechts dan als, voor iedere $a \in X$, $\mathrm{T}_a f$ bijectief is van $\mathrm{T}_a X$ naar $\mathrm{T}_{f(a)} Y$. (Dit impliceert dat X en Y dezelfde dimensie hebben.)*

f is een C^k-diffeomorfisme van X naar Y, dan en slechts dan als $\mathrm{T}_a f : \mathrm{T}_a X \to \mathrm{T}_{f(a)} Y$ bijectief is voor iedere $a \in X$ en bovendien f bijectief is van X naar Y.

Stel X is een n-dimensionale differentieerbare deelvariëteit van de p-dimensionale differentieerbare variëteit Y. Dan is de identiteit id, beschouwd als afbeelding van X naar Y, een differentieerbare afbeelding en we hebben voor iedere $a \in X$ de raakafbeelding $\mathrm{T}_a(\mathrm{id})$ van $\mathrm{T}_a X$ naar $\mathrm{T}_a Y$. Is κ een lokale coördinatisering in een omgeving van a in Y die X platlegt, dan is

$$\kappa \circ \mathrm{id} \circ (\kappa|_X)^{-1} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

De totale afgeleide van deze lineaire afbeelding is gelijk aan deze lineaire afbeelding en is allerduidelijkst injectief. We concluderen dat $\mathrm{T}_a(\mathrm{id})$ een injectieve lineaire afbeelding is van $\mathrm{T}_a X$ naar $\mathrm{T}_a Y$.

De beeldruimte $B := \mathrm{T}_a(\mathrm{id})(\mathrm{T}_a X)$ is een lineaire deelruimte van $\mathrm{T}_a Y$, van dimensie n, omdat $\mathrm{T}_a(\mathrm{id})$ een lineair isomorfisme is van $\mathrm{T}_a X$ naar B. Het is de gewoonte om $\mathrm{T}_a(\mathrm{id})$ te gebruiken om $\mathrm{T}_a X$ met B te identificeren. Dat wil zeggen, men schrijft

$$\mathrm{T}_a X = \mathrm{T}_a(\mathrm{id})(\mathrm{T}_a X) \subset T_a Y, \tag{3.3.1}$$

beschouwt $\mathrm{T}_a X$ als lineaire deelruimte van $\mathrm{T}_a Y$ en identificeert $\mathrm{T}_a(\mathrm{id})$ met de identiteit, beschouwd als afbeelding van $\mathrm{T}_a X \subset \mathrm{T}_a Y$ naar $\mathrm{T}_a Y$.

Zij nu $Y = \mathbf{R}^p$, dus X is een differentieerbare deelvariëteit van $\mathbf{R}^p$. Dan hadden we de kanonieke identificatie van $\mathrm{T}_a Y$ met $\mathbf{R}^p$. Deze wordt gecombineerd met de bovenstaande identificatie van $\mathrm{T}_a X$ met een lineaire deelruimte van $\mathrm{T}_a Y \simeq \mathbf{R}^p$. Hiermee krijgen we een kanonieke identificatie van de raakruimten aan X, met n-dimensionale lineaire deelruimten van $\mathbf{R}^p$.

Dit zijn de raakruimten die in Analyse C werden ingevoerd. Daar werd ook nog opgemerkt dat het in de klassieke literatuur, en in plaatjes, gebruikelijk is om de over a verschoven lineaire ruimte $a + \mathrm{T}_a X$ de raakruimte te noemen. Men tekent dan de raakvector $v \in \mathrm{T}_a X$ als een pijl met de voet (staart) in a en de pijlpunt in $a + v$. Wij benadrukken echter in dit college, dat de raakruimte een lineaire ruimte is. Voorzichtiger gezegd: op natuurlijke wijze de structuur van een lineaire ruimte bezit.

We onderzoeken nu hoe in het algemeen differentieerbare afbeeldingen met injectieve raakafbeeldingen zich gedragen.

Definitie 3.3.1 Zij X, Y differentieerbare variëteiten, $f \in \mathrm{C}^k(X, Y)$. Een *indompeling* of *immersie* (engels, frans: immersion) van X in Y is een differentieerbare afbeelding f van X naar Y, met de eigenschap dat, voor iedere $a \in X$, de raakafbeelding $\mathrm{T}_a f$ een injectieve lineaire afbeelding is van $\mathrm{T}_a X$ naar $\mathrm{T}_{f(a)} Y$.

Een C^k-*inbedding* van X in Y is een afbeelding f van X naar Y, waarvoor het beeld $f(X)$ een C^k-deelvariëteit is van Y en f een C^k-diffeomorfisme is van X naar $f(X)$. $\oslash$

Als f een differentieerbare inbedding is, dan geldt voor iedere $a \in X$:

$$\mathrm{T}_a f \text{ is bijectief van } \mathrm{T}_a X \text{ naar } \mathrm{T}_{f(a)}(f(X)) \subset \mathrm{T}_{f(a)} Y. \tag{3.3.2}$$

Dit impliceert dat f een indompeling is. Is f een indompeling van X in Y, dan is

$$\dim X = \dim T_a X = \dim T_a f(\mathrm{T}_a\, X) \leq \dim T_{f(a)} Y = \dim Y. \tag{3.3.3}$$

Als $\dim X = \dim Y$, dan is een indompeling hetzelfde als een lokaal diffeomorfisme en een inbedding hetzelfde als een diffeomorfisme naar een open deel van Y. Om deze reden worden de termen indompeling en inbedding eigenlijk allen gebruikt als $\dim X < \dim Y$. We geven nu een eenvoudige lokale standaardvorm voor een indompeling, in geschikte kaarten in X en Y.

Lemma 3.3.2 *Zij X en Y C^k-variëteiten, $k \geq 1$, $\dim X = n$, $\dim Y = p$, $n \leq p$. Zij f een C^k-afbeelding van X naar Y, $a \in X$ en $\mathrm{T}_a\, f$ is injectief van $\mathrm{T}_a\, X$ naar $T_{f(a)} Y$. Dan is er bij iedere C^k-kaart κ in X met $a \in X_\kappa$ een C^k-kaart λ in Y met $b = f(a) \in Y_\lambda$, met de eigenschap dat*

$$\lambda \circ f \circ \kappa^{-1} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

in de open deelverzameling $\kappa(X_\kappa \cap f^{-1}(Y_\lambda))$ van $\mathbf{R}^n$.

Bewijs We bewijzen eerst dat er een C^k-afbeelding μ is van een open omgeving van $b = f(a)$ naar $\mathbf{R}^n$, waarvoor $\kappa = \mu \circ f$.

De beeldruimte $B := \mathrm{T}_a\, f(\mathrm{T}_a\, X)$ van $\mathrm{T}_a\, f$ is een n-dimensionale lineaire deelruimte van de p-dimensionale lineair ruimte $\mathrm{T}_b\, Y$. Zij $\beta : B \to \mathbf{R}^n$ een lineair isomorfisme, met coödinaatsfuncties $\beta_i \in B^*$. Breid β_i uit tot een lineaire vorm γ_i op $\mathrm{T}_b\, Y$. Zoals na (3.2.4) is opgemerkt, zijn er C^k-functies δ_i in een open omgeving van b in Y, met $\mathrm{d}\delta_i(b) = \gamma_i$ voor alle $1 \leq i \leq n$. De afbeelding $\delta \in \mathrm{C}^k(V, \mathbf{R}^n)$, waarvan de δ_i de coördinaatsfuncties zijn, heeft nu de eigenschap dat

$$\mathrm{D}(\delta \circ f)(a) = \mathrm{D}\,\delta(b) \circ \mathrm{T}_a\, f = \beta \circ \mathrm{T}_a\, f$$

bijectief is van $\mathrm{T}_a\, X$ naar $\mathbf{R}^n$. Vanwege de inverse-functiestelling is $\varepsilon := \delta \circ f$ een C^k-kaart in een open omgeving van a in X. Uit

$$\kappa = \kappa \circ \varepsilon^{-1} \circ \delta \circ f$$

lezen we nu af dat $\kappa = \mu \circ f$ voor $\mu = \kappa \circ \varepsilon^{-1} \circ \delta$.

Schrijf $\eta_i = \mathrm{d}\mu_i(b)$. Vul deze aan tot een basis

$$\eta_1, \ldots, \eta_n, \eta_{n+1} \ldots, \eta_p$$

van $(\mathrm{T}_b\, Y)^*$. Ook voor $n + 1 \leq i \leq p$ zijn er C^k-functies μ_i in een open omgeving van b in Y, met $\mathrm{d}\mu_i(b) = \eta_i$. De afbeelding μ met coördinaatsfuncties μ_i, $1 \leq i \leq p$, is een C^k-kaart voor Y als we haar beperken tot een geschikte open omgeving Y_μ van b in Y.

Is $\pi : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$ de projectie naar de eerste n variabelen, dan is $\kappa = \pi \circ \mu \circ f$, ofwel $\pi \circ g = \mathrm{id}$ als we noteren $g = \mu \circ f \circ \kappa^{-1}$. Maar dit betekent dat $g : x \mapsto (x, h(x))$ voor een C^k-afbeelding h van een open deelverzameling W van $\mathbf{R}^n$, naar $\mathbf{R}^{p-n}$. We krijgen de conclusie van het lemma, als we voor λ de samenstelling nemen van μ met het C^k-diffeomorfisme $(x, z) \mapsto (x, z - h(x))$ van $W \times \mathbf{R}^{p-n}$ naar zichzelf. $\square$

Gevolg 3.3.3 *Zij f een C^k-afbeelding van X naar Y. Als $a \in X$ en $\mathrm{T}_a\, f : \mathrm{T}_a\, X \to \mathrm{T}_{f(a)}\, Y$ is injectief, dan is er een open omgeving U van a in X, met de eigenschap dat $f|_U$ een C^k-inbedding is van U naar Y. De $a \in X$ waarvoor $\mathrm{T}_a\, f$ injectief is, vormen een open deelverzameling A van X. $f|_A$ is een C^k-indompeling van A in Y.*

Stelling 3.3.4 *Zij X en Y C^r-variëteiten, $1 \leq k \leq r \leq \omega$. Een C^k-afbeelding f van X naar Y is een C^k-inbeddding van X in Y, dan en slechts dan als f een injectieve indompeling is en de inverse een continue afbeelding is van $f(X)$ naar X. Hierbij is $f(X)$ voorzien van de relatieve topologie als deelverzameling van Y.*

Bewijs De noodzaak van alle voorwaarden is duidelijk. Omgekeerd geeft de continuïteit van f^{-1}, dat er bij iedere $a \in X$ en iedere open omgeving U van a in X een open omgeving V van $f(a)$ in Y is, met de eigenschap dat $f(U) = f(X) \cap V$. U als in Gevolg 3.3.3 kiezend, krijgen we dat $f(X) \cap V$ een C^k-deelvariëteit is van Y en dat f een C^k-diffeomorfisme is van U naar $f(X) \cap V$. Omdat ieder punt van $f(X)$, van de vorm $f(a)$ voor zekere $a \in X$, een open omgeving V heeft met deze eigenschappen, is de conclusie dat $f(X)$ een C^k-deelvariëteit is van Y en dat f een lokaal C^k-diffeomorfisme is van X naar $f(X)$. Omdat een bijectief lokaal diffeomorfisme een diffeomorfisme is, is de conclusie dat f een C^k-inbedding is van X in Y. □

Als X een C^k-deelvariëteit is van Y, dan is de identiteit $\mathrm{id} : X \to Y$ een inbedding van X in Y. Stelling 3.3.4 leidt nu tot de volgende karakterisering van deelvariëteiten, aangekondigd na Stelling 2.6.1.

Gevolg 3.3.5 *Zij Y een C^k-variëteit, $k \geq 1$, Een deelverzameling Z van Y is een C^k-deelvariëteit van Y, dan en slechts dan als Z gelijk is aan het beeld $f(X)$ van een C^k-afbeelding f van een C^k-variëteit X naar Y, met de volgende eigenschappen.*

a) $\mathrm{T}_a f$ *is injectief voor iedere* $a \in X$.

b) f *injectief.*

c) f^{-1} *is continu van* Z *naar* X.

Merk op dat b) en c) samen zeggen dat f een homeomorfisme is van X naar Z, waarbij Z is voorzien van de relatieve topologie als deelverzameling van X.

Voorbeeld 3.3.1 Zij X en Y C^r-variëteiten. Voor iedere $y \in Y$ is $X \times \{y\}$ een C^r-deelvariëteit van $X \times Y$ en de afbeelding $i_{1,\,y} : x \mapsto (x,\, y)$ uit (2.7.3) is een C^r-diffeomorfisme van X naar $X \times \{y\}$, dus een C^r-inbedding van X in $X \times Y$. Op dezelfde manier is voor iedere $x \in X$ de verticale as $\{x\} \times Y$ een C^r-deelvariëteit van $X \times Y$ en is $i_{2,\,x} : y \mapsto (x,\, y)$ een C^r-diffeomorfisme van Y naar $\{x\} \times Y$, dus i_2 is een C^r-inbedding van Y in $X \times Y$.

Er geldt dat $(X \times \{y\}) \cap (\{x\} \times Y) = \{(x,\, y)\}$ en

$$\mathrm{T}_{(x,\,y)}(X \times Y) = \mathrm{T}_{(x,\,y)}(X \times \{y\}) \oplus \mathrm{T}_{(x,\,y)}(\{x\} \times Y).$$

(Zie Voorbeeld 2.4.4 voor de definitie van directe som.) Hiermee samenhangend is de afbeelding

$$(u, v) \mapsto \mathrm{T}_x\, i_{1,\,y}(u) + \mathrm{T}_y\, i_{2,\,x}(v) : \mathrm{T}_x\, X \times \mathrm{T}_y\, Y \to \mathrm{T}_{(x,\,y)}(X \times Y) \tag{3.3.4}$$

een lineair isomorfisme, men gebruikt dit ook wel om $\mathrm{T}_{(x,\,y)}(X \times Y)$ met $\mathrm{T}_x\, X \times \mathrm{T}_y\, Y$ te identificeren. ⊘

Voorbeeld 3.3.2 Het voorbeeld $f : t \mapsto (\cos t,\, \sin t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ laat zien dat een indompeling niet injectief hoeft te zijn en toch een deelvariëteit als beeld kan hebben. ⊘

Voorbeeld 3.3.3 De afbeelding $f : t \mapsto (t^2 - 1,\, (t^2 - 1)t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ is een indompeling. We hebben

$$f(\mathbf{R}) = W := \{(x,\, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = x^3 + x^2\},$$

een deelverzameling van $\mathbf{R}^2$ die eruit ziet als een *wichelroede*. f is niet injectief, omdat $f^{-1}(\{0\}) = \{-1,\, 1\}$. Beperken we ons echter tot $X = \mathbf{R} \setminus \{-1,\, 1\}$, dan zien we dat $f|_X$ een reëel-analytische (zelfs polynomiale) inbedding is van X in $\mathbf{R}^2$. Anderzijds is er is geen enkele omgeving V van de oorsprong in $\mathbf{R}^2$ waarvoor $W \cap V$ een differentieerbare deelvariëteit is van $\mathbf{R}^2$. Zelfs is $W \cap V$ nooit homeomorf met een interval, omdat iedere kleine omgeving van 0 in W minstens vier randpunten heeft. Nemen we tenslotte $U =]-\infty,\, 1[$, dan is f een injectieve indompeling. Desondanks is $f(U)$ geen één-dimensionale deelvariëteit van $\mathbf{R}^n$, omdat iedere kleine omgeving van $0 = f(-1)$ in $f(U)$ minstens drie randpunten heeft. $\oslash$

Voorbeeld 3.3.4 Het beeld van een injectieve indompeling kan er echter nog veel ingewikkelder uitzien. Zelfs kan het beeld van een injectieve indompeling van $\mathbf{R}$ dicht liggen in een hoger-dimensionale variëteit.

Zij $c \in R$. De afbeelding

$$f : t \mapsto (t + \mathbf{Z},\, t\,c + \mathbf{Z}) : \mathbf{R} \to T := (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2$$

is een reëel-analytische indompeling van $\mathbf{R}$ in de twee-dimensionale torus T. f is injectief, dan en slechts dan als c *irrationaal* is, hetgeen we van nu af aan aannemen.

De doorsnede van $f(\mathbf{R})$ met de "verticale as" $\{0 + \mathbf{Z}\} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ bestaat uit de $(0 + \mathbf{Z},\, g + \mathbf{Z})$, waarbij

$$g \in G_c := \{k\,c + l \mid k, l \in \mathbf{Z}\}.$$

Merk op dat G_c een ondergroep is van de optelgroep der reële getallen.

Zij G een willekeurige ondergroep van $\mathbf{R}$, $G \neq \{0\}$. Omdat $-g \in G$ als $g \in G$, is er een $g \in G$ met $g > 0$. De intervallen $[m\,g,\, (m+1)\,g[$, $m \in \mathbf{Z}$, overdekken $\mathbf{R}$, dus bij iedere $r \in \mathbf{R}$ is er een $m \in \mathbf{Z}$, met $|r - m\,g| < g$. Merk op dat $m\,g \in G$.

Zij γ het infimum der $g \in G$ met $g > 0$. Als $\gamma = 0$, dan zien we uit het bovenstaande, dat G dicht ligt in $\mathbf{R}$.

Neem nu aan dat $\gamma > 0$. Dan is $\gamma \in G$. Immers, anders zou er een monotoon naar γ dalende rij in G bestaan, de verschillen van opeenvolgende elementen daarin zouden willekeurig kleine positieve elementen van G opleveren, in tegenspraak met $\gamma > 0$. Nu is er bij iedere $r \in G$ een $m \in \mathbf{Z}$ met $0 \leq r - m\,\gamma < \gamma$. Omdat $r - m\,\gamma \in G$, is de conclusie dat $r = m\,\gamma$. De conclusie is dat ófwel G dicht ligt in $\mathbf{R}$, ófwel $G = \mathbf{Z}\,\gamma$ voor een $\gamma \in G$, $\gamma > 0$.

Terugkerend naar G_c, zien we dat het geval $G_c = \mathbf{Z}\gamma$ correspondeert met $c = p\,\gamma$, $1 = q\,\gamma$, voor zekere $p, q \in \mathbf{Z}$, $q > 0$. Dit impliceert dat $c = p/q \in \mathbf{Q}$, tegenspraak. G_c ligt dus dicht in $\mathbf{R}$. Maar dit impliceert meteen dat $f(\mathbf{R})$ dicht ligt in T. Immers, zij $(x + \mathbf{Z},\, y + \mathbf{Z}) \in T$, $x, y \in \mathbf{R}$. Voor iedere $\varepsilon > 0$ is zijn er $k, l \in \mathbf{Z}$, waarvoor

$$|(y - x\,c) - (k\,c + l)| < \varepsilon.$$

Maar dit impliceert dat $f(x + k) = (x + \mathbf{Z},\, (x + k)\,c + \mathbf{Z})$ willekeurig dicht bij $(x + \mathbf{Z},\, y + \mathbf{Z})$ komt.

Men kan dit generaliseren tot:

$$f(t) = (t\,c_1 + \mathbf{Z}, \ldots, t\,c_n + \mathbf{Z}).$$

Als $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ lineair onafhankelijk zijn over $\mathbf{Q}$, dan is f een injectieve indompeling, waarvan het beeld $f(\mathbf{R})$ dicht ligt in de n-dimensionale torus. Deze voorwaarde voor de c_j is equivalent met:

$$\sum_{j=1}^{n} k_j\, c_j = 0,\ k_j \in \mathbf{Z} \ \Rightarrow\ k_j = 0 \text{ voor alle } \ j.$$

$\oslash$

In veel situaties is het prettig, indien een deelvariëteit Z van een variëteit Y een gesloten deelverzameling is van Y. Als Z de beeldverzameling is van een inbedding $f : X \to Y$, dan zou men dit af willen kunnen lezen uit een eigenschap van de afbeelding f.

Definitie 3.3.2 Een afbeelding f van een topologische ruimte X naar een topologische ruimte Y heet *proper*, indien voor iedere compacte deelverzameling L van Y het volledige origineel $K := f^{-1}(L)$ een compacte deelverzameling is van X. $\oslash$

Lemma 3.3.6 *Zij X en Y topologische ruimten, waarbij verondersteld wordt dat Y lokaal compact en Hausdorff's is. Is f een propere en continue afbeelding van X naar Y, dan is de beeldverzameling $f(X)$ een gesloten deelverzameling van Y.*

Bewijs Zij p een punt in de afsluiting van $f(X)$ in Y. Omdat Y lokaal compact is, heeft p een compacte omgeving L in Y. Omdat L een omgeving van p is, ligt p ook in de afsluiting van $f(X) \cap L$.

De properheid van f impliceert dat $K := f^{-1}(L)$ een compacte deelverzameling is van X. De continuïteit van f impliceert vervolgens dat $f(K) = f(X) \cap L$ een compacte deelverzameling is van Y. Omdat Y Hausdorff's is, volgt hieruit dat $f(X) \cap L$ gesloten is en daarom het punt p bevat, dat immers in de afsluiting van $f(X) \cap L$ lag. We concluderen dat ieder punt p in de afsluiting van $f(X)$ tot $f(X)$ behoort, ofwel $f(X)$ is gesloten. $\square$

Gevolg 3.3.7 *Zij X en Y differentieerbare variëteiten en $f : X \to Y$ een C^1-inbedding. Dan is $f(X)$ een gesloten deelverzameling van Y, dan en slechts dan als f een propere afbeelding is van X naar Y.*

Bewijs Alleen het "slechts dan" moet nog toegelicht worden. Neem aan dat $f(X)$ gesloten is in Y en dat L een compacte deelverzameling is van Y. Dan is $f(X) \cap L$ een compacte deelverzameling van Y en daarmee ook van $f(X)$. De continuïteit van $f^{-1} : f(X) \to X$ geeft nu dat $f^{-1}(L) = f^{-1}(f(X) \cap L)$ een compacte deelverzameling van X is. $\square$

Opmerking 3.3.1 Whitney bewees al in de 30-er jaren, dat voor iedere n-dimensionale C^{ω}-variëteit X die gelijk is aan de vereniging van aftelbaar veel compacte deelverzamelingen, er een propere C^{∞}-inbedding f is van X naar $\mathbf{R}^N$, waarbij $N = 2n + 1$ genomen kan worden. Het is een diep resultaat van Grauert [8], dat f zelfs reëel-analytisch genomen kan worden.

Het is duidelijk dat de voorwaarde, dat X gelijk is aan de vereniging van een aftelbare rij compacte deelverzamelingen, hiervoor noodzakelijk is. Immers, als B_r de gesloten bol om de oorsprong met straal r in $\mathbf{R}^N$ voorstelt en $Z = f(X)$ is een gesloten deelverzameling van $\mathbf{R}^N$, dan is

$L_r = Z \cap B_r$ een compacte deelverzameling van Z, dus $K_r = f^{-1}(L_r)$ is een compacte deelverzameling van X. Anderzijds is $\mathbf{R}^N$ gelijk aan de vereniging over $r = 1, 2, \ldots$ van de B_r, dus is X gelijk aan de vereniging van de K_r. $\oslash$

3.4 Submersies

Definitie 3.4.1 Zij X en Y C^k-variëteiten, $k \geq 1$. Een C^k-*overstroming* of C^k-*submersie* van X naar Y is een $f \in \mathrm{C}^k(X, Y)$ met de eigenschap dat $\mathrm{T}_a f$ surjectief is van $\mathrm{T}_a X$ naar $\mathrm{T}_{f(a)} Y$, voor iedere $a \in X$. $\oslash$

We beginnen weer met een standaardvorm in geschikte lokale coördinaten.

Lemma 3.4.1 *Zij X en Y C^k-variëteiten, $f \in \mathrm{C}^k(X, Y)$, $k \geq 1$. Veronderstel verder dat $a \in X$ en dat $\mathrm{T}_a f$ surjectief is van $\mathrm{T}_a X$ naar $\mathrm{T}_{f(a)} Y$. Dan is $n = \dim X \geq p = \dim Y$. Verder is er bij iedere C^k-kaart λ in Y met $b = f(a) \in Y_\lambda$ een C^k-kaart κ in X met $a \in X_\kappa$, met de eigenschap dat $\lambda \circ f \circ \kappa^{-1}$ gelijk is aan de projectie*

$$\pi : (x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_p)$$

naar de eerste p variabelen, in een open omgeving van $\kappa(a)$ in $\mathbf{R}^n$.

Bewijs Het is uit de lineaire algebra bekend, dat de surjectiviteit van $\mathrm{T}_a f : \mathrm{T}_a X \to \mathrm{T}_b Y$ impliceert dat de getransponeerde afbeelding

$$(\mathrm{T}_a f)^* : \eta \mapsto \eta \circ \mathrm{T}_a f : (\mathrm{T}_b Y)^* \to (\mathrm{T}_a X)^*$$

injectief is. De coraakvectoren

$$\xi_i := \mathrm{d}(\lambda_i \circ f)(a) = \mathrm{d}\lambda_i(b) \circ \mathrm{T}_a f, \ 1 \leq i \leq p,$$

zijn de beelden onder $(\mathrm{T}_a f)^*$ van de basis $\eta_i := \mathrm{d}\lambda_i(b)$ van $(\mathrm{T}_b Y)^*$, dus de ξ_i zijn lineair onafhankelijk in $(\mathrm{T}_a X)^*$.

Vul deze aan tot een basis $\xi_1, \ldots, \xi_n$ van $(\mathrm{T}_a X)^*$. Voor $1 \leq i \leq p$ schrijven we $\kappa_i := \lambda_i \circ f$. Hiervoor geldt $\mathrm{d}\kappa_i(a) = \xi_i$. Zoals we na (3.2.4) hebben gezien, kunnen we voor $p + 1 \leq j \leq n$ C^k-functies κ_j in een open omgeving van a in X vinden, met $\mathrm{d}\kappa_j(a) = \xi_j$. Dan is

$$\kappa : x \mapsto (\kappa_1(x), \ldots, \kappa_n(x))$$

een C^k-afbeelding van een open omgeving van a in X naar $\mathbf{R}^n$, waarvoor $\mathrm{D}\,\kappa(a)$ bijectief is. Vanwege de inverse-functiestelling is de beperking van κ tot een geschikte open omgeving van a in X een C^k-kaart voor X. Anderzijds geeft de constructie meteen dat $\pi \circ \kappa = \lambda \circ f$, dus $\lambda \circ f \circ \kappa^{-1} = \pi$ in een open omgeving van $\kappa(a)$ in $\mathbf{R}^n$. $\square$

Gevolg 3.4.2 *Zij X en Y C^k-variëteiten, $k \geq 1$, $n = \dim X \geq p = \dim Y$, $f \in \mathrm{C}^k(X, Y)$. De verzameling U der $a \in X$, waar $\mathrm{T}_a\, f$ surjectief is van $\mathrm{T}_a\, X$ naar $\mathrm{T}_{f(a)}\, Y$, is een open deelverzameling van X. $f|_U$ is een C^k-overstroming van U naar Y. $f(U)$ is een open deelverzameling van Y. Voor iedere $b \in f(U)$ is*

$$U_b := f^{-1}(\{b\}) \cap U = \{x \in U \mid f(x) = b\}$$

een $(n-p)$-dimensionale C^k-deelvariëteit van U en gesloten als deelverzameling van U.

Voor een willekeurige afbeelding f noemt men $X_b := f^{-1}(\{b\})$ ook wel de *vezel* van de afbeelding f, voor de waarde b. Gevolg 3.4.2 geeft voor iedere b in de p-dimensionale variëteit $f(U)$ een $(n-p)$-dimensionale C^k-deelvariëteit U_b van U, de lokale beschrijving in Lemma 3.4.1 laat zien dat deze naast elkaar liggen als de bladen van een boek. Het begrip vezelbundel in Opmerking 3.4.1 is nog iets specialer.

De functies van de vorm $h = g \circ f$, met g een functie in Y, zijn precies de functies, die constant zijn in de vezels X_b, $b \in Y$. In de natuurkunde kunnen de $b \in Y$ "extern waargenomen" toestanden van een systeem voorstellen, terwijl het gedrag van het systeem ertoe leidt dat men nog extra "interne vrijheidsgraden" aan het systeem wil toekennen. Het is daarbij alsof men het punt b vervangt door een hele vezel X_b, waarbij de X_b met $b \in Y$ samen een hoger-dimensionaal systeem X vormen.

Het kan echter ook gebeuren, dat om de één of andere reden het systeem in zijn bewegingen beperkt blijft tot een vezel X_b. Bijvoorbeeld, doordat $f(x)$ als gevolg van de bewegingsvergelijkingen constant blijft gedurende de beweging, zoals gebeurt als $f(x)$ de totale energie van het systeem in de klassieke mechanica voorstelt. Ofwel doordat dwangkrachten (constraints) geïntroduceerd worden die het systeem in X_b houden. Hierbij kan X_b een meer ingewikkelde globale topologische structuur hebben dan X; denk bijvoorbeeld aan deelvariëteiten van $X = \mathbf{R}^n$. Overgang van X naar Y via de projectie f en overgang van X naar X_b door inperking, zijn twee heel verschillende manieren om lager-dimensionale systemen te krijgen.

Stelling 3.4.3 *Stel f is een propere submersie van een n-dimensionale C^k-variëteit X naar een p-dimensionale C^k-variëteit Y. Als $X \neq \emptyset$ en Y samenhangend is, dan is $f(X) = Y$. Verder is dan voor iedere $y \in Y$ de vezel $f^{-1}(\{y\})$ een niet-lege en compacte C^k-deelvariëteit van dimensie $n-p$.*

Bewijs Uit Gevolg 3.4.2 volgt dat $f(X)$ een open deelverzameling is van Y, terwijl uit Lemma 3.3.6 volgt dat $f(X)$ gesloten is in Y. Omdat $f(X)$ niet-leeg is en Y samenhangend, is de conclusie dat $f(X) = Y$. Verder is $\{y\}$ een compacte deelverzameling van Y, de properheid van f geeft daarom dat de vezel voor de waarde y compact is. De conclusies over de variëteitsstructuur van de vezels zijn in Gevolg 3.4.2 al getrokken. □

Opmerking 3.4.1 Zij X, Y en Z C^k-variëteiten, $\pi \in \mathrm{C}^k(X, Y)$. Een C^k *lokale trivialisering voor π over de open deelverzameling $V = V_\tau$ van Y en met vezel Z* is een C^k-diffeomorfisme τ van $\pi^{-1}(V)$ naar $V \times Z$, met de eigenschap dat $\pi \circ \tau^{-1}$ gelijk is aan de projectie $\pi_1 : V \times Z \to V$ naar de eerste variabele.

Een C^k-*vezelbundel* bestaat uit de volgende gegevens.

i) Een C^k-variëteit X, de *bundel*.

ii) Een C^k-variëteit Y, de *basis.*

iii) Een C^k-variëteit Z, de *vezel.*

iv) Een C^k-afbeelding π van X naar Y, de *projectie.*

v) Een collectie $\mathcal{T}$ van C^k lokale trivialiseringen van π met vezel Z, waarbij de V_τ met $\tau \in \mathcal{T}$ een open overdekking van Y vormen.

Men noemt X ook een *Z-bundel over Y.*

Merk op dat $\pi^{-1}(V_\tau)$ een open deelverzameling is van X, het is de vereniging van de vezels $X_y := \pi^{-1}(\{y\})$, waarbij y de verzameling V_κ doorloopt. Het definitiegebied van τ is daarmee alleen maar lokaal wat betreft de basis, in de vezelrichting mag niet ingeperkt worden.

Omdat $\pi = \pi_1 \circ \tau$ in $\pi^{-1}(V_\tau)$, π_1 een overstroming is en τ een diffeomorfisme, zien we dat π een overstroming is. Omdat Y gelijk is aan de vereniging van alle V_τ, is voor iedere $y \in Y$ de vezel X_y een C^k-deelvariëteit van X, en $\dim X_y = \dim X - \dim Y$.

Als $y \in V_\tau$, dan is de beperking van τ tot X_y een C^k-diffeomorfisme van X_y naar $\{y\} \times Z$. Gevolgd door projectie naar de tweede variabele geeft dit een C^k-diffeomorfisme van Y_y naar Z. Daarmee worden alle vezels van π C^k-diffeomorf met dezelfde variëteit Z, dus ook $\dim X_y = \dim Z$ voor iedere $y \in Y$. Een en ander impliceert ook dat de projectie π surjectief is van X naar Y.

Men kan bewijzen dat, in de situatie van Stelling 3.4.3, X een vezelbundel is, met f als projectie en Y als basis. $\oslash$

3.5 Dwarse Snijding

Definitie 3.5.1 Stel X en Y zijn C^k-deelvariëteiten van een C^k-variëteit Z. Men zegt dat X en Y elkaar *dwars snijden in het punt a*, als $a \in X \cap Y$ en

$$\mathrm{T}_a Z = \mathrm{T}_a X + \mathrm{T}_a Y.$$

Men zegt dat X en Y elkaar *dwars snijden*, als dit het geval is voor alle $a \in X \cap Y$. In dit geval noteert men soms $X \pitchfork Y$, de T in dit symbool staat voor *transversaal.* $\oslash$

Als E en F lineaire deelruimten zijn van een eindig-dimensionale lineaire ruimte G, dan snijden E en F elkaar dwars, dan en slechts dan als $E + F = G$. De variëteiten X en Y snijden elkaar dus dwars in $a \in X \cap Y$, dan en slechts dan als de raakruimten $\mathrm{T}_a X$ en $\mathrm{T}_a Y$, beschouwd als deelruimten van $\mathrm{T}_a Z$, elkaar dwars snijden.

In het algemeen heeft men voor de lineaire deelruimten E en F de *dimensieformule*

$$\dim E + \dim F = \dim(E \cap F) + \dim(E + F). \tag{3.5.1}$$

Het bewijs gaat door eerst een basis van $E \cap F$ te kiezen en deze vervolgens uit te breiden tot een basis van E en tot een basis van F. Het resultaat is dan een basis van $E + F$. Hieruit lezen we af dat $E + F = G$ alleen op kan treden, als $\dim E + \dim F \geq \dim G$, en in dit geval is

$$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim G, \tag{3.5.2}$$

de minimale waarde die met het oog op de dimensieformule mogelijk is voor $\dim(E \cap F)$. Anderzijds impliceert (3.5.2) ook dat $\dim(E+F) = \dim G$, dus dat E en F elkaar dwars snijden.

Als $X \cap Y = \emptyset$ dan zegt men ook dat X en Y elkaar dwars snijden. Is $\dim X + \dim Y < \dim Z$, dan snijden X en Y elkaar dwars, dan en slechts dan als $X \cap Y = \emptyset$.

Dwars snijden is stabiel in de zin dat als E en F elkaar dwars snijden en E', resp. F' zijn lineaire deelruimten van G met $\dim E' = \dim E$, $\dim F' = \dim F$, E' voldoende dicht bij E en F' voldoende dicht bij F, dan snijden E' en F' elkaar dwars. De precieze formulering hiervan in termen van Grassmann-variëteiten luidt: de verzameling $D_{n,p}(G)$ der $(E, F) \in \mathrm{G}_n(G) \times \mathrm{G}_p(G)$ waarvoor $E + F = G$, is een open deelverzameling van $\mathrm{G}_n(G) \times \mathrm{G}_p(G)$.

De dwarse positie is ook "algemeen" in de zin dat als $\dim E + \dim F \geq \dim G = q$ en E en F zijn niet dwars, dan kan men een F' willekeurig dicht bij F vinden, zódanig dat E en F' elkaar wél dwars snijden. Preciezer: Als $n + p \geq q$, dan is voor iedere $E \in \mathrm{G}_n(G)$ de verzameling der $F \in \mathrm{G}_p(G)$ met $E + F = G$ een dichte deelverzameling van $\mathrm{G}_p(G)$. We gaan hier niet verder op de bewijzen in, we zullen dit resultaat ook niet echt gebruiken in dit college. Men zegt ook wel dat dwarsheid een *generieke eigenschap* is.

We geven nu weer eerst een eenvoudige standaardvorm in lokale coördinaten.

Lemma 3.5.1 *Veronderstel dat de C^k-deelvariëteiten X en Y van de C^k-variëteit Z elkaar dwars snijden in het punt a. Noteer $\dim X = n$, $\dim Y = p$, $\dim Z = q$. Merk op dat $n \leq q$, $p \leq q$ en $n + p \geq q$. Dan is er een C^k-diffeomorfisme κ van een open omgeving U van a in Z, naar een open omgeving V van 0 in $\mathbf{R}^q$, waarvoor $\kappa(a) = 0$,*

$$\kappa(X \cap U) = \{x \in V \mid x_j = 0 \text{ voor alle } n + 1 \leq j \leq q\}$$

en

$$\kappa(Y \cap U) = \{x \in V \mid x_j = 0 \text{ voor alle } 1 \leq j \leq q - p\}.$$

Bewijs We beginnen met te werken in lokale coördinaten, waarin X plat ligt, dat wil zeggen, gegeven wordt door de vergelijkingen $x_j = 0$ voor alle $n + 1 \leq j \leq q$. Ook kunnen we door een geschikte verschuiving in de eerste n variabelen ervoor zorgen dat $a = 0$.

$\mathrm{T}_a X$ is dan de lineaire ruimte opgespannen door de eerste n basisvectoren in $\mathbf{R}^q$. Hiervan is $S := \mathrm{T}_a X \cap \mathrm{T}_a Y$ een lineaire deelruimte, van dimensie $n + p - q$. Er is daarom een keuze $1 \leq i(1) < i(2) < \ldots < i(q-p) \leq n$, waarvoor $\mathrm{T}_a X = L + S$, als L de lineaire ruimte voorstelt, die opgespannen is door de basisvectoren $e_{i(j)}$, $1 \leq j \leq q - p$. Na omnummeren van de eerste n variabelen, waaronder X niet verandert, mogen we aannemen dat $i(j) = j$ voor alle $1 \leq j \leq q - p$.

Omdat S ook een lineaire deelruimte is van $\mathrm{T}_a Y$, krijgen we dat

$$\mathbf{R}^q = \mathrm{T}_a Z = \mathrm{T}_a X + \mathrm{T}_a Y = L + S + \mathrm{T}_a Y = L + \mathrm{T}_a Y.$$

Maar dit betekent dat de lineaire projectie π van $\mathrm{T}_a Y$ naar de laatste p variabelen een lineair isomorfisme is. Vanwege de inverse-functiestelling is er daarom een open omgeving U van 0 in $\mathbf{R}^p$, waarvoor $\pi|_{(Y \cap U)}$ een C^k-diffeomorfisme is van $Y \cap U$ naar een open omgeving van 0 in $\mathbf{R}^p$.

Als we de punten van $\mathbf{R}^q$ schrijven als $x = (u, v, w)$, met $u \in \mathbf{R}^{q-p}$, $v \in \mathbf{R}^{n+p-q}$ en $w \in \mathbf{R}^{q-n}$, dan wordt X gegeven door $w = 0$ en is Y van de vorm

$$Y = \{(g(v, w), v, w) \mid (v, w) \in P\}.$$

Hierin is P een open omgeving van 0 in $\mathbf{R}^p$, g een C^k-afbeelding van P naar $\mathbf{R}^{q-p}$ en $g(0) = 0$. De C^k-coördinatentransformatie

$$(u,\, v,\, w) \mapsto (u - g(v,\, w),\, v,\, w)$$

laat nu X, de variëteit $w = 0$, ongewijzigd en voert Y over in de variëteit $u = 0$. $\square$

Omdat $q-p \leq n$, zien we dat $\kappa(Y \cap U)$ en $\kappa(X \cap U)$ bepaald worden door onderling onafhankelijke lineaire relaties, de eerste door $q-p$ relaties en de tweede door $q-n$ relaties. Dus $\kappa(X \cap Y \cap U)$ is gelijk aan een open deelverzameling van een lineaire deelruimte van $\mathbf{R}^q$ met codimensie gelijk aan $(q-p)+(q-n) = q-(n+p-q)$, dus met dimensie gelijk aan $n+p-q$.

Gevolg 3.5.2 *Stel X en Y zijn C^k-deelvariëteiten van een C^k-variëteit Z, $k \geq 1$. Dan is de verzameling D der $a \in Z$, waar X en Y elkaar dwars snijden, een open deelverzameling van $X \cap Y$. Schrijf $d = \dim X + \dim Y - \dim Z$. Als $d < 0$, dan is $D = \emptyset$. Als $D \neq \emptyset$, dan is D een d-dimensionale C^k-deelvariëteit, van X, van Y en van Z. Voor de codimensies in Z geldt:*

$$\operatorname{codim} D = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Y.$$

3.6 Complexe Raakruimten

Is X een n-dimensionale complex-analytische variëteit, dan geldt Lemma 3.1.1, met overal $\mathbf{R}^n$ vervangen door $\mathbf{C}^n$, "lineaire ruimte" door "complex-lineaire ruimte" en "lineaire afbeelding" door "complex-lineaire afbeelding". Hiermee worden de raakruimten $\mathrm{T}_a\, X$ van X complex-lineaire ruimten, van complexe dimensie gelijk aan n.

Stel nu dat Y een p-dimensionale complex-analytische variëteit is en f een afbeelding van X naar Y. In §1.9 is opgemerkt, dat een afbeelding g, van een open deel Ω van $\mathbf{C}^n$ naar $\mathbf{C}^p$, complex--analytisch is dan en slechts dan als $g \in \mathrm{C}^1$ en $\mathrm{D}\, g(x)$ complex-lineair voor iedere $x \in \Omega$. We zien nu uit (3.2.2), dat f een complex-analytische afbeelding is van X naar Y, dan en slechts dan als f een C^1-afbeelding is van X naar Y, beschouwd als C^1-variëteiten van reële dimensie $2n$, resp. $2p$, en $\mathrm{T}_a\, f$ een complex-lineaire afbeelding is van $\mathrm{T}_a\, X$ naar $\mathrm{T}_{f(a)}\, Y$, voor iedere $a \in X$.

Alle stellingen uit dit hoofdstuk gelden nu ook met overal C^k vervangen door "complex-analytisch", "lineaire ruimte" door "complex-lineaire ruimte", "lineaire afbeelding" door "complex-lineaire afbeelding", "dimensie" door "complexe dimensie".

3.7 Opgaven

3.7.1 Zij X en Y C^k-variëteiten, $k \geq 1$. Bewijs dat, als $f \in \mathrm{C}^k(X,\, Y)$, dan is $x \mapsto (x,\, f(x))$ een C^k-diffeomorfisme van X naar de grafiek G van f, dus is dit een C^k-inbedding van X in $X \times Y$. (Als f constant is, dan is dit $i_{1,\, y}$.) Verder, dat de lineaire deelruimte $L := \mathrm{T}_{(x,\, f(x))}\, G$ van $\mathrm{T}_{(x,\, y)}(X \times Y)$ complementair is aan $\mathrm{T}_{(x,\, y)}(\{x\} \times Y)$. Tenslotte, dat L gelijk is aan de grafiek van $\mathrm{T}_a\, f : \mathrm{T}_x\, X \to \mathrm{T}_{f(x)}\, Y$, als we de identificatie (3.3.4) gebruiken.

Omgekeerd, zij G een C^k-deelvariëteit van $X \times Y$, $(a,\, b) \in G$. Neem aan dat $\mathrm{T}_{(a,\, b)}\, G$ complementair is aan $\mathrm{T}_{(a,\, b)}(\{a\} \times Y)$. Bewijs dat er een open omgeving A van a in X is, een open omgeving B van b in Y en een $f \in \mathrm{C}^k(A,\, B)$, met de eigenschap dat $G \cap (A \times B)$ gelijk is aan de grafiek van f. f is een lokaal diffeomorfisme in a, dan en slechts dan als $\mathrm{T}_{(a,\, b)}\, G$ ook complementair is aan $\mathrm{T}_{(a,\, b)}(X \times \{b\})$.

3.7.2 Bewijs dat $f : t \mapsto (t^2,\, t^3)$ bijectief is van $\mathbf{R}$ naar de *spits*

$$S := \{(x,\, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$$

in het vlak. Bewijs dat S een één-dimensionale topologische deelvariëteit is van $\mathbf{R}^2$. Bepaal de verzameling S' waar S een differentieerbare kromme is. Bewijs dat de beperking van f tot $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ een inbedding is met S' als beeld. Onderzoek tenslotte voor welke waarden van $b, c \in \mathbf{R}$ de kromme

$$K_{b,c} := \{(x,\, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = x^3 + bx + c\}$$

een één-dimensionale differentieerbare deelvariëteit is van $\mathbf{R}^2$. Maak een schets van $K_{b,c}$ in de diverse typerende gevallen. Wanneer is $K_{b,c}$ niet samenhangend?

3.7.3 Zij f als in Voorbeeld 3.3.4, nu met $c \in \mathbf{Q}$. Bewijs dat $f(\mathbf{R})$ een reëel-analytische deelvariëteit van de torus is, reëel-analytisch diffeomorf met de cirkel.

3.7.4 Zij X, Y en Z C^k-variëteiten, $f \in \mathrm{C}^k(X,\, Y)$ en $g \in \mathrm{C}^k(Y,\, Z)$, $k \geq 1$. Bewijs de volgende uitspraken.

$g \circ f$ is een indompeling is van X in Z, dan en slechts dan als f een indompeling is van X in Y en de beperking van $\mathrm{T}_{f(a)}\, g$ tot $\mathrm{T}_a\, f(\mathrm{T}_a\, X)$ is injectief, voor iedere $a \in X$. Dit laatste geldt als g een indompeling is van Y in Z.

$g \circ f$ is een inbedding van X in Z, dan en slechts dan als f een inbedding is van X in Y en $g|_{f(X)}$ is een inbedding van $f(X)$ in Z. Dit laatste geldt als g een inbedding is van Y in Z.

$g \circ f$ is een submersie van X naar Z, dan en slechts dan als g een submersie is van Y naar Z en

$$\mathrm{T}_a\, f(\mathrm{T}_a\, X) + \ker \mathrm{T}_{f(a)}\, g = \mathrm{T}_{f(a)}\, Y$$

voor iedere $a \in X$. Dit laatste is het geval als f een submersie is van X naar Y.

3.7.5 Bewijs dat de orthogonale $n \times n$-matrices een $\frac{1}{2}n(n-1)$-dimensionale reëel-analytische deelvariëteit $\mathrm{O}(n)$ vormen van de ruimte van alle $n \times n$-matrices, de laatste opgevat als de n^2-dimensionale Euclidische ruimte. Bewijs dat $\mathrm{O}(n)$ compact is. Bewijs, als 1 het eenheidselement in $\mathrm{O}(n)$ voorstelt, dat $\mathrm{T}_1\, \mathrm{O}(n)$ gelijk is aan de lineaire ruimte van alle anti-symmetrische $n \times n$-matrices.

3.7.6 Zij X de torus in $\mathbf{R}^3$ als in opgave 2.9.13 en zij, voor iedere $c \in \mathbf{R}$, V_c het verticale vlak dat bepaald is door de vergelijking $x = c$. Bepaal waar X en V_c elkaar dwars snijden, ga na dat in de buurt van die punten $X \cap H_c$ een gladde kromme in X, in H_c, en in $\mathbf{R}^3$ voorstelt. Bepaal voor welke waarden van c de oppervlakken X en H_c elkaar dwars snijden. Beschrijf wat er met $X \cap H_c$ gebeurt, als c een waarde c_0 overschrijdt, waarvoor X en H_{c_0} elkaar niet dwars snijden. (Dat wil zeggen, beschouw $X \cap H_c$ als c een klein beetje kleiner is dan c_0, als $c = c_0$, en als c een klein beetje groter is dan c_0.)

3.7.7 Men zegt dat een C^k-afbeelding f, van een C^k-variëteit X naar C^k-variëteit Z, *dwars* staat op de C^k-deelvariëteit Y van Z, als

$$\mathrm{T}_{f(a)}\, Z = \mathrm{T}_a\, f(\mathrm{T}_a\, X) + \mathrm{T}_{f(a)}\, Y$$

voor iedere $a \in X$. Bewijs dat dit het geval is, dan en slechts dan als de grafiek van f de deelvariëteit $X \times Y$ van $X \times Z$ dwars snijdt. Verder, is dit zo, dan is

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$$

een C^k-deelvariëteit van X, van dimensie gelijk aan $\dim X + \dim Y - \dim Z$.

Hoofdstuk 4

Vectorvelden

Zij X een n-dimensionale differentieerbare variëteit, die we met het oog op Opmerking 2.4.1 net zo goed reëel-analytisch mogen veronderstellen. Aan het einde van §3.1 hebben we het standpunt verdedigd, dat de raakruimten $\mathrm{T}_x X$, $x \in X$, onderling disjuncte lineaire ruimten zijn. We zouden dit in de notatie tot uitdrukking kunnen brengen door raakvectoren aan X te noteren met (x, v), met $x \in X$ en $v \in \mathrm{T}_x X$. Waarschuwing: hiermee wordt *niet* bedoeld dat we de verzameling van alle raakvectoren opvatten als een Cartesisch product van X met een vaste vectorruimte, immers de $\mathrm{T}_x X$ werden juist als verschillende lineaire ruimten beschouwd.

We gaan de raakruimten aan X samenvoegen tot een $2n$-dimensionale variëteit $\mathrm{T} X$. Dit zal het mogelijk maken om families $z \mapsto v(z)$ van raakvectoren $v(z) \in \mathrm{T}_{x(z)} X$ te beschouwen, die continu van een element z in een variëteit Z afhangen en die niet in één vaste raakruimte $\mathrm{T}_a X$ hoeven te liggen. Anders gezegd, waarvoor het voetpunt $x(z)$ een niet-constante functie van z mag zijn. Zo'n familie kan dan namelijk gedefinieerd worden als een continue afbeelding van de variëteit Z naar de variëteit $\mathrm{T} X$.

4.1 De Raakbundel

Definitie 4.1.1 Zij X een n-dimensionale C^k-variëteit, $k \geq 1$. De *raakbundel* $\mathrm{T} X$ van X is de vereniging

$$\mathrm{T} X = \bigcup_{x \in X} \mathrm{T}_x X = \{(x, v) \mid x \in X,\ v \in \mathrm{T}_x X\}$$

van de onderling disjuncte raakruimten $\mathrm{T}_x X$ van X. De afbeelding $\pi : (x, v) \mapsto x : \mathrm{T} X \to X$ heet de *projectie van de raakbundel naar de basis*. Voor iedere lokale C^k-kaart κ van X definiëren we de *door κ geïnduceerde kaart*

$$\mathrm{T}\,\kappa : (x, v) \mapsto (\kappa(x),\ \mathrm{D}\,\kappa_x(v)) : \pi^{-1}(X_\kappa) \to V_\kappa \times \mathbf{R}^n \tag{4.1.1}$$

voor $\mathrm{T} X$. Voorzien van deze kaarten wordt $\mathrm{T} X$ een $2n$-dimensionale C^{k-1}-variëteit. $\oslash$

Stelling 4.1.1 *Zijn X en Y C^k-variëteiten, $k \geq 1$ en is $f \in \mathrm{C}^k(X, Y)$, dan definieert*

$$\mathrm{T} f : (x, v) \mapsto (f(x),\ \mathrm{T}_x f(v))$$

een C^{k-1}*-afbeelding* $\mathrm{T}\, f$ *van* $\mathrm{T}\, X$ *naar* $\mathrm{T}\, Y$*. Is verder* g *een* C^k*-afbeelding van* Y *naar een* C^k*-variëteit* Z*, dan is*

$$\mathrm{T}(g \circ f) = \mathrm{T}\, g \circ \mathrm{T}\, f. \tag{4.1.2}$$

Bewijs (3.2.2) betekent dat

$$\mathrm{T}\, f = (\mathrm{T}\, \lambda)^{-1} \circ \mathrm{T}(\lambda \circ f \circ \kappa^{-1}) \circ \mathrm{T}\, \kappa.$$

De raakafbeelding van $\varphi := \lambda \circ f \circ \kappa^{-1} \in \mathrm{C}^k(V,\, \mathbf{R}^p)$ is van de vorm

$$\mathrm{T}\, \varphi : (x,\, v) \mapsto (\varphi(x),\, \mathrm{D}\, \varphi(x)\, (v)) : V \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p.$$

Hieruit lezen we af dat $\mathrm{T}\, \varphi$ een C^{k-1}-afbeelding is en daarmee $\mathrm{T}\, f$ ook.

(4.1.2) is hetzelfde als (3.2.6). □

Van een open deelverzameling X van $\mathbf{R}^n$, met de identiteit als enige kaart, wordt de raakbundel met $X \times \mathbf{R}^n$ geïdentificeerd. Hiermee is de afbeelding $\mathrm{T}\, \kappa : \mathrm{T}\, X_\kappa \to V_\kappa \times \mathbf{R}^n$ in (4.1.1) gelijk aan de raakafbeelding van $\kappa : X_\kappa \to V_\kappa$.

Definitie 4.1.2 Zij X een n-dimensionale C^ω-variëteit. Een *vectorveld* in X is een afbeelding v, die aan ieder punt $x \in X$ een raakvector $v(x)$ aan X en in het punt x toevoegt. ⊘

Anders gezegd: v is een afbeelding van X naar $\mathrm{T}\, X$, met de eigenschap dat $v(x) \in \mathrm{T}_x\, X$, dus $\pi(v(x)) = x$, voor iedere $x \in X$. Ofwel:

$$\pi \circ v = \mathrm{id}, \;\; \text{de identiteit in } X. \tag{4.1.3}$$

Nu we $\mathrm{T}\, X$ van een variëteitsstructuur hebben voorzien, kunnen we een C^k-vectorveld in X definiëren als een C^k-afbeelding $v : X \to \mathrm{T}\, X$, die voldoet aan (4.1.3). We zullen de verzameling van alle C^k-vectorvelden in X met $\mathcal{V}^k(X)$ noteren.

Is κ een kaart voor X, dan is

$$\mathrm{T}\, \kappa \circ v \circ \kappa^{-1} : x \mapsto (x,\, v_\kappa(x)) : V_\kappa \to V_\kappa \times \mathbf{R}^n,$$

ofwel

$$\mathrm{D}\, \kappa_x \, \cdot \, v(x) = v_\kappa(\kappa(x)), \;\; x \in X_\kappa, \tag{4.1.4}$$

voor een eenduidig bepaalde afbeelding v_κ van V_κ naar $\mathbf{R}^n$. Omgekeerd is v eenduidig bepaald door de v_κ, $\kappa \in \mathcal{A}$ en is het duidelijk dat $v \in \mathrm{C}^k$, dan en slechts dan als

$$v_\kappa \in \mathrm{C}^k(V_\kappa,\, \mathbf{R}^n) \text{ voor iedere } \kappa \in \mathcal{A}. \tag{4.1.5}$$

Men noemt $v_\kappa : V_\kappa \to \mathbf{R}^n$ ook wel het *vectorveld in lokale coördinaten.* Uit (3.1.4) en (3.1.3) lezen we af dat deze voldoen aan de transformatieformule

$$v_\lambda(\varphi(x)) = \mathrm{D}\, \varphi_x \, \cdot \, v_\kappa(x), \tag{4.1.6}$$

als $\varphi = \lambda \circ \kappa^{-1}$, $\kappa, \lambda \in \mathcal{A}_a$, $\kappa(a) = x$.

4.2 Triviale Raakbundels

Definitie 4.2.1 X heeft een *triviale raakbundel*, als er een C^k-diffeomorfisme τ is van $\mathrm{T}\,X$ naar $X \times \mathbf{R}^n$, met de volgende twee eigenschappen. Schrijf

$$\pi_1 : (x,\, u) \mapsto x : X \times \mathbf{R}^n \to X,$$
$$\pi_2 : (x,\, u) \mapsto u : X \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

voor de projectie naar de eerste, respectievelijk de tweede variabele. Dan is

1) $\pi = \pi_1 \circ \tau$ en

2) voor iedere $x \in X$ is de beperking τ_x van $\pi_2 \circ \tau$ tot $\mathrm{T}_x\,X$ een lineaire afbeelding van $\mathrm{T}_x\,X$ naar $\mathbf{R}^n$.

De afbeelding τ heet een C^k-*trivialisering* van de raakbundel. ⊘

In de klassieke meetkunde worden de raakvectoren $v \in \mathrm{T}_x\,X$ en $w \in \mathrm{T}_y\,X$ *parallel* ten aanzien van de trivialisering τ genoemd, als

$$\pi_2 \circ \tau(v) = \pi_2 \circ \tau(w).$$

De variëteit X heet daarom ook wel *parallelliseerbaar*, als zij een triviale raakbundel heeft.

Is τ een C^k-trivialisering van $\mathrm{T}\,X$ en is e_i de i-de standaardbasisvector in $\mathbf{R}^n$, dan is

$$v_i : x \mapsto \tau^{-1}(x,\, e_i)$$

een C^k-vectorveld in X. Deze vectorvelden $v_i = v_{i,\tau}$ hebben de eigenschap, dat voor iedere $x \in X$ de vectoren $v_i(x) \in \mathrm{T}_x\,X$, $1 \le i \le n$, een basis van $\mathrm{T}_x\,X$ vormen. In het bijzonder is $v_i(x) \neq 0$ voor iedere $x \in X$ en iedere $1 \le i \le n$.

Zijn er omgekeerd C^k-vectorvelden $v_1, \ldots, v_n$ in X gegeven, met de eigenschap dat voor iedere $x \in X$ de vectoren $v_i(x)$ in $\mathrm{T}_x\,X$ lineair onafhankelijk zijn, dan kunnen we aan iedere $v \in \mathrm{T}_x\,X$ de coëfficiënten $c_i = c_{i,x}(v)$ ten aanzien van de basis $v_i(x)$, $1 \le i \le n$ toevoegen. Dat wil zeggen,

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i\, v_i(x),\ x \in X,\ v \in \mathrm{T}_x\,X.$$

De afbeelding

$$\tau : (x,\, v) \mapsto (x,\, c_{1,x}(v), \ldots,\, c_{n,x}(v)) : \mathrm{T}\,X \to X \times \mathbf{R}^n$$

is dan een C^k-trivialisering van $\mathrm{T}\,X$ en $v_i = v_{i,\tau}$ voor alle $1 \le i \le n$.

Een n-tal vectorvelden v_i als boven heet ook wel een *bewegend raamwerk* in X. É. Cartan voerde dit begrip in onder de naam *répère mobile*, in het engels vertaald als *moving frame*.

Zij U een open deelverzameling van X. Een *lokale trivialisering* van $\mathrm{T}\,X$ in U is gedefinieerd als een trivialisering van $\mathrm{T}\,U$. Is κ een kaart voor X, dan is

$$\tau_\kappa : (x,\, v) \mapsto (x,\, \mathrm{D}\,\kappa_x(v))$$

een lokale trivialisering in $U = X_\kappa$. (Waarschuwing: een lokale trivialisering τ is niet altijd van de vorm τ_κ voor een lokale C^k-kaart κ.) Dit laat zien dat iedere variëteit X wordt overdekt met open omgevingen U waarin $\mathrm{T}\,X$ een lokale trivialisering heeft. Daarentegen is het een hele speciale eigenschap van een variëteit X om een globale trivialisering te hebben.

Voorbeeld 4.2.1 De twee-dimensionale sfeer S heeft geen triviale raakbundel. Er zijn zelfs geen continue vectorvelden v in S met de eigenschap dat $v(x) \neq 0$ voor alle $x \in S$. Men zegt ook wel dat “de bol niet zonder kruin gekamd kan worden”.

Om dit in te zien, beschouwen we eerst een continu vectorveld zonder nulpunten in een open deelverzameling V van het vlak $\mathbf{R}^2$, gegeven door $f \in \mathrm{C}^0(V, \mathbf{R}^2)$, $f(x) \neq 0$ voor alle $x \in V$. Als γ een gesloten kromme is in V, beschouwd als continue afbeelding van de cirkel C naar V, dan is

$$f_\gamma : t \mapsto \tfrac{1}{\|f(t)\|}\, f(t)$$

een continue afbeelding van C naar C. Het windingsgetal

$$i_\gamma(f) := w(f_\gamma)$$

van f_γ heet de *Poincaré-index* van het vectorveld f, langs de kromme γ. Dit gehele getal blijft ongewijzigd onder continue deformatie (homotopie) van de kromme γ in V. Als $\gamma(t) \equiv x$ een constante kromme in V is, dan is $i_\gamma(f) = 0$.

Beschouw nu een continu vectorveld v in de sfeer S, niet identiek gelijk aan nul. Door een geschikte orthonormale basis in $\mathbf{R}^3$ te kiezen, kunnen we arrangeren dat $v(e_3) \neq 0$. Noteer met $v_\pm$ het vectorveld in $\mathbf{R}^2$, dat verkregen wordt door stereografische projectie naar $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$, vanuit $\pm e_3$. Zie Voorbeeld 2.4.1. Uit (4.1.6) lezen we af, dat

$$v_+(x) = \langle x,\, x\rangle\, v_-(y) - 2\langle x,\, v_-(y)\rangle\, x, \quad \text{als} \;\; y = \tfrac{1}{\|x\|^2}\, x. \tag{4.2.1}$$

Vanwege de continuïteit van v is er een omgeving W van e_3 in S, met de eigenschap dat $v(s) \neq 0$ voor alle $s \in W$. Dit betekent dat er een $R \geq 0$ is, waarvoor $v_+(x) \neq 0$ zodra $\|x\| \geq R$. We gaan nu $i_\gamma(v_+)$ uitrekenen, als $\gamma = \gamma_r$ gelijk is aan de cirkel om de oorsprong met straal $r \geq R$.

De identificatie $\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$ gebruikend, kunnen we schrijven

$$x = r\, e^{2\pi i t}, \;\; v_-(y) = a\, e^{2\pi i s},$$

met $r, a > 0$ en $t, s \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Hiermee is

$$v_+(x) = r^2\, a\, [e^{2\pi i s} - (e^{2\pi i(t-s)} + e^{-2\pi i(t-s)})\, e^{2\pi i t}] = -r^2\, a\, e^{2\pi i(2t-s)}.$$

Hierin hangt $s = s(t) \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ nog van t af, via de afhankelijkheid van y van x. We hebben gevonden dat $i_\gamma(v_+)$ gelijk is aan het windingsgetal van de afbeelding

$$t \mapsto 2t - s(t) + \tfrac{1}{2} : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

Als $r \to \infty$, dan convergeert y naar 0 en $v_-(y)$ naar $v_-(0) \neq 0$. Maar dit betekent dat $s(t)$ naar een constante functie van t convergeert. De conclusie is dat

$$i(r) := i_{\gamma_r}(v_+) = 2 \tag{4.2.2}$$

als r voldoende groot is.

De index $i(r)$ is een continue en geheelwaardige functie van r, dus constant, ofwel $i(r) = i(R)$. In het bijzonder is $i(R) \neq 0$ en daaruit volgt dat v_+, en daarmee ook v, nulpunten moet hebben. Anders zou immers $R = 0$ en krijgen we een tegenspraak met $i(0) = 0$. $\oslash$

Opmerking 4.2.1 In Voorbeeld 4.2.1 werd de Poincaré-index alleen maar gebruikt om aan te tonen dat een continue vectorveld v in de twee-dimensionale sfeer S nulpunten moet hebben. Ze geeft echter ook informatie over de aard van de nulpunten van v.

Stel $f \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$. Een nulpunt p van f heet *niet-gedegenereerd*, als $\mathrm{D}\, f(p)$ inverteerbaar is. Dit impliceert dat er een open omgeving U van p in $\mathbf{R}^2$ is, waarvoor $f(x) \neq 0$ voor alle $x \in U$. Neem nu aan dat alle nulpunten van f niet-gedegenereerd zijn. Dan vormen de nulpunten van f een discrete deelverzameling N van $\mathbf{R}^p$ vormen, dus voor iedere r zijn er maar eindig veel $p \in N$ met $\|p\| \leq r$. Door een verschuiving kunnen we ook arrangeren dat $0 \notin N$.

Als r naar 0 gaat, passeert γ_r eindig veel nulpunten. Bij iedere passage van een nulpunt p kan de index van f over γ_r verspringen. Het verschil is gelijk aan de index van f, gemeten langs een kleine kring om p. Op deze manier is de index van f over een grote cirkel C gelijk aan de som van de indices van f over kleine cirkels om de nulpunten p van f die binnen C liggen.

Zij nu p een (niet-gedegenereerd) nulpunt van f, noteer $L := \mathrm{D}\, f(p)$. Het *teken* van dit nulpunt p van f is gedefinieerd als $+1$ wanneer $\det L > 0$ en als -1 indien $\det L < 0$.

Is γ een kleine cirkel om p, éénmaal doorlopen in de positieve richting, dan is $i_\gamma(f)$ gelijk aan het teken van p.

Men kan dit inzien door op te merken dat voldoende klein nemen van de straal geeft dat $i_\gamma(f)$ gelijk is aan de index van het lineaire vectorveld $x \mapsto L(x)$, langs een kring om de oorsprong. Verder is de index ook constant als we L continu variëren in de ruimte $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ van inverteerbare 2×2-matrices. Nu heeft $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ twee samenhangscomponenten, bepaald door het teken van de determinant. Men gaat tenslotte direct na dat als $L = I$, de identiteitsmatrix, dan is de index gelijk aan $+1$, terwijl de index gelijk is aan -1 als L gelijk is aan de spiegeling om de x-as.

De conclusie is daarmee dat $i_{\gamma_r}(f)$ gelijk is aan de som van de tekens van de nulpunten van f, die binnen γ_r liggen. Zij nu v een C^1-vectorveld in S, met alleen maar niet-gedegenereerde nulpunten, $v(e_3) \neq 0$. Het bovenstaande toepassend op $f = v_+$, gecombineerd met (4.2.2), krijgen we dat het aantal nulpunten van v met positief teken twee meer is dan het aantal nulpunten met negatief teken. Er zijn dan dus minimaal twee nulpunten. Zijn er precies twee nulpunten, allebei niet-gedegenereerd, dan hebben deze positief teken. $\oslash$

4.3 Gewone Differentiaalvergelijkingen

Definitie 4.3.1 Zij v een vectorveld in de variëteit X. Een *oplossing* van de *differentiaalvergelijking*

$$\tfrac{dx}{dt} = v(x) \tag{4.3.1}$$

is een differentieerbare kromme $\gamma : I \to X$ in X, met I een open interval in $\mathbf{R}$, waarvoor geldt dat

$$\gamma'(t) = v(\gamma(t)) \;\text{ voor alle }\; t \in I. \tag{4.3.2}$$

$\oslash$

Merk op dat het linker- en rechterlid in (4.3.2) beiden in $\mathrm{T}_{\gamma(t)} X$ liggen, hetgeen de vergelijking zinvol maakt. Dikwijls wil men voor willekeurige $t_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 \in X$ ook nog voorschrijven dat

$$\gamma(t_0) = x_0. \tag{4.3.3}$$

Men zegt dat er een *lokale existentiestelling geldt voor het beginwaardeprobleem* voor (4.3.1), als er bij iedere $t_0 \in \mathbf{R}$ en $x_0 \in X$ een open interval I om t_0 in $\mathbf{R}$ is en een oplossing $\gamma : I \to X$ van (4.3.1), die voldoet aan (4.3.3). Men zegt dat er een *lokale eenduidigheidsstelling geldt voor het beginwaardeprobleem* voor (4.3.1), als er voor ieder paar oplossingen $\gamma : I \to X$, $\delta : J \to X$ met $t_0 \in I \cap J$ en $\gamma(t_0) = \delta(t_0)$, een open interval $H \subset I \cap J$ is, met de eigenschap dat $\gamma(t) = \delta(t)$ voor alle $t \in H$.

Is κ een kaart voor X, dan ligt het voor de hand om (4.3.2) te vertalen in een vergelijking voor

$$\begin{aligned} \delta &:= \kappa \circ \gamma : J \to V_\kappa, \\ J &:= I \cap \gamma^{-1}(X_\kappa). \end{aligned}$$

We hebben

$$\begin{aligned} \delta'(t) &= \mathrm{D}\,\kappa_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t), \\ v_\kappa(\delta(t)) &= \mathrm{D}\,\kappa_{\gamma(t)} \cdot v(\gamma(t)), \end{aligned}$$

zie (3.1.2), (3.1.4) en (4.1.4). Hieruit lezen we af dat (4.3.2) geldt voor $t \in J$, dan en slechts dan als δ een oplossing is in J van het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\tfrac{dy}{dt} = v_\kappa(y)$$

in (de open deelverzameling V_κ van) $\mathbf{R}^n$. De lokale existentie- en eenduidigheidsstelling voor het beginwaardeprobleem voor stelsels in $\mathbf{R}^n$, zoals bijvoorbeeld in Analyse D is behandeld, geeft nu door terugvertaling naar X via de lokale coördinatiseringen, de volgende stelling.

Stelling 4.3.1 *Zij v een C^1-vectorveld in de variëteit X. Dan geldt er een lokale existentie- en eenduidigheidsstelling voor het beginwaardeprobleem voor $\frac{dx}{dt} = v(x)$.*

In Analyse D is deze stelling geformuleerd voor t-afhankelijke vergelijkingen. Dat hadden we hier ook kunnen doen, in dat geval is v een afbeelding van $I \times X$ naar $\mathrm{T}\,X$, met de eigenschap dat, voor iedere $t \in I$, de afbeelding $x \mapsto v(t,\, x)$ een vectorveld in X is. Hierin is I een open interval in $\mathbf{R}$. De meeste hierna volgende stellingen kunnen tot vergelijkingen van de vorm $\frac{dx}{dt} = v(t,\, x)$ gegeneraliseerd worden.

Lemma 4.3.2 *Een lokale eenduidigheidsstelling voor het beginwaardeprobleem voor $\frac{dx}{dt} = v(x)$ impliceert een globale eenduidigheidsstelling: als $\gamma : I \to X$ en $\delta : J \to X$ oplossingen zijn, $t_0 \in I \cap J$, $\gamma(t_0) = \delta(t_0)$, dan is $\gamma(t) = \delta(t)$ voor alle $t \in I \cap J$.*

Bewijs Zij $H = \{t \in I \cap J \mid \gamma(t) = \delta(t)$. De lokale eenduidigheidsstelling impliceert dat H een open deelverzameling is van $I \cap J$. Anderzijds volgt uit de continuïteit van γ en δ, dat H ook een gesloten deelverzameling is van $I \cap J$. Omdat $I \cap J$ een interval is, is $I \cap J$ samenhangend. Daarmee is $H = I \cap J$, als H niet-leeg is.

Het gesloten zijn van H kan als volgt bewezen worden. De afbeelding

$$\gamma \times \delta : t \mapsto (\gamma(t),\, \delta(t)$$

is continu van $I \cap J$ naar $X \times X$. H is het volledige origineel onder $\gamma \times \delta$ van de diagonaal

$$\Delta := \{(x,\, y) \in X \times X \mid y = x\} \tag{4.3.4}$$

in $X \times X$. Δ is een gesloten deelverzameling van $X \times X$. (Dit is equivalent met het Hausdorff's zijn van X.) Dus is H een gesloten deelverzameling van $I \cap J$. □

Een oplossing $\gamma : I \to X$ van $\frac{dx}{dt} = v(x)$ heet *maximaal*, als ze geen uitbreiding heeft tot een oplossing δ, die in een groter interval J is gedefinieerd. Uitgeschreven: als $\delta : J \to X$ een oplossing is, $I \subset J$ en $\delta|_I = \gamma$, dan is $J = I$ en dus $\delta = \gamma$.

Zij $\frac{dx}{dt} = v(x)$ een vergelijking, waarvoor een lokale existentie- en eenduidigheidsstelling geldt. Voor iedere $(t_0,\, x_0) \in \mathbf{R} \times X$ is er een eenduidig bepaalde maximale oplossing $\gamma : I \to X$. I is gelijk aan de vereniging van alle definitie-intervallen H van oplossingen $\beta : H \to X$ met $t_0 \in H$, $\beta(t_0) = x_0$ en we definiëren $\gamma(t) = \beta(t)$ als $t \in H$. Omdat $\alpha(t) = \beta(t)$ voor alle $t \in G \cap H$ als $\alpha : G \to X$ een andere oplossing is met $\alpha(t_0) = x_0$, is de definitie van $\gamma(t)$ onafhankelijk van de keuze van de oplossingen.

Van nu af aan zullen we met "oplossing" van een vergelijking $\frac{dx}{dt} = v(x)$, waarvoor een lokale existentie- en eenduidigheidsstelling geldt, steeds de maximale oplossing bedoelen.

Stelling 4.3.3 *Zij v een continu vectorveld in X en veronderstel dat er een lokale existentie- en eenduidigheidsstelling geldt voor het beginwaardeprobleem voor $\frac{dx}{dt} = v(x)$. Zij $\gamma : I \to X$ een maximale oplossing en veronderstel dat I naar boven begrensd is. Schrijf $s = \sup I$. Dan is er bij iedere compacte deelverzameling K van X een $\varepsilon > 0$, met de eigenschap dat $\gamma(t) \in X \setminus K$ voor alle $t \in I \cap]s - \varepsilon,\, s[$. Een soortgelijke conclusie geldt als $i := \inf I > -\infty$.*

Bewijs Dit gaat net als in Analyse D. Als de conclusie van de stelling niet geldt, dan is er een compacte deelverzameling K van X en een rij $t_j \in I$ die naar s convergeert, waarvoor $\gamma(t_j) \in K$ voor alle j. Door overgang op een deelrij $j = j(k)$ vinden we een $x \in X$ met $\gamma(t_{j(k)}) \to x$ als $k \to \infty$.

Zij κ een kaart in een coördinaatomgeving X_κ van x. Door inperking van het definitiegebied, kunnen we arrangeren dat dat v_κ begrensd is in V_κ. Dan wordt vervolgens aangetoond dat er een $\varepsilon > 0$ is, waarvoor $\gamma(t) \in X_\kappa$ voor alle $t \in I \cap]s - \varepsilon,\, s[$. Het argument is dat anders $\kappa \circ \gamma$ steeds een bepaalde positieve afstand in een steeds kortere tijd zou moeten overbruggen, bij het heen en weer schieten tussen $\kappa(x)$ en het complement van V_κ. Dit komt in tegenspraak met de begrensdheid van

$$\frac{d(\kappa \circ \gamma)}{dt}(t) = v_\kappa(\kappa \circ \gamma(t))$$

als $\gamma(t) \in X_\kappa$.

Diezelfde begrensdheid levert vervolgens dat $\kappa \circ \gamma(t) \to \kappa(x)$, dus $\gamma(t) \to x$, voor $t \uparrow s$. Zij δ de oplossing met $\delta(s) = x$. Dan vormt de vereniging van γ met δ een oplossing in een groter definitie-interval. Dit is in tegenspraak met de definitie van s. □

Gevolg 4.3.4 *Zij v een continu vectorveld in X en veronderstel dat er een lokale existentie- en eenduidigheidsstelling geldt voor het beginwaardeprobleem voor $\frac{dx}{dt} = v(x)$. Als X compact is, dan is iedere oplossing $\gamma(t)$ voor alle $t \in \mathbf{R}$ gedefinieerd.*

Merk op dat, als men alleen maar differentiaalvergelijkingen in open deelverzamelingen X van $\mathbf{R}^n$ beschouwt, dit gevolg niet veel inhoudt: X kan alleen tevens gesloten en niet-leeg zijn als $X = \mathbf{R}^n$; dit is alleen compact als $n = 0$. In de categorie der variëteiten zijn er echter talloze voorbeelden van compacte X.

Stelling 4.3.5 *Zij v een vectorveld in X, waarvoor een lokale eenduidigheidsstelling geldt voor het beginwaardeprobleem voor $\frac{dx}{dt} = v(x)$. Zij $x_0 \in X$ en zij $\gamma : I \to X$ de maximale oplossing van $\frac{dx}{dt} = v(x)$, met $\gamma(t_0) = x_0$. Dan zijn de volgende uitspraken a)-d) equivalent.*

a) $\gamma(t)$ *is constant.*

b) $\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = 0$.

c) $v(x_0) = 0$.

d) $I = \mathbf{R}$ *en* $\gamma(t) = x_0$ *voor alle* $t \in \mathbf{R}$.

Het bewijs kan uit Analyse D gecopieerd worden. Een constante oplossing wordt ook wel een *stationaire oplossing* genoemd. Een nulpunt van het vectorveld v heet ook wel een *rustpunt* of *evenwichtspunt* van het stelsel $\frac{dx}{dt} = v(x)$.

Stationaire oplossingen zijn de eenvoudigste. Daaropvolgend hebben we de *periodieke oplossingen*, de oplossingen γ waarvoor $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ voor zeker $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$. Men kan bewijzen dat ook in dit geval $I = \mathbf{R}$. Als γ niet constant is, dan is neemt de verzameling der $t_2 - t_1$, met t_1, t_2 als boven, zijn minimum aan. Geven we dit minimum aan met ω, dan is $\gamma(t + \omega) = \gamma(t)$ voor alle $t \in \mathbf{R}$. ω heet de *periode* van de periodieke oplossing γ.

Het kan echter ook gemakkelijk gebeuren dat oplossingen niet periodiek zijn en toch steeds opnieuw op andere plaatsen terugkeren in een omgeving van een punt in X. De plaatjes in Analyse D, van een oplossing van de Lorenz-vergelijkingen in $\mathbf{R}^3$, illustreren hoe ingewikkeld de *baan* $\gamma(I) \subset X$ van een oplossing γ eruit kan zien. Hierbij is het essentieel dat γ globaal, dat wil zeggen in zijn maximale definitie-interval I, bekeken wordt.

4.4 Stromingen

Als $\gamma : I \to X$ een oplossing is van $\frac{dx}{dt} = v(x)$ met $\gamma(t_0) = x_0$, dan voldoet, voor willekeurige $\tau \in \mathbf{R}$, de functie

$$\delta : t \mapsto \gamma(t + \tau) : I - \tau \to X$$

aan

$$\begin{aligned}
&\delta'(t) = \gamma'(t + \tau) = v(\gamma(t + \tau)) = v(\delta(t)), \\
&\delta(t_0 - \tau) = \gamma(t_0) = x_0.
\end{aligned}$$

Anders gezegd, een verschuiving in t voert oplossingen in oplossingen over en we kennen alle oplossingen voor het beginwaardeprobleem, voor ieder begintijdstip t_0, als we ze kennen voor bijvoorbeeld $t_0 = 0$. Dit resultaat is karakteristiek voor tijdsonafhankelijke vectorvelden v. Als men dit wil benadrukken, noemt men $\frac{dx}{dt} = v(x)$ ook wel een *autonoom stelsel.*

In het vervolg nemen we aan dat er een lokale existentie- en eenduidigheidsstelling geldt voor het beginwaardeprobleem voor $\frac{dx}{dt} = v(x)$. Voor iedere $x_0 \in X$ noteren we $I(x_0)$ voor het definitie-interval van de maximale oplossing γ met $\gamma(0) = x_0$. We schrijven

$$\Phi^t(x_0) = \Phi(t, x_0) = \gamma(t)$$

om de afhankelijkheid van x_0 te benadrukken. Definiërende vergelijkingen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x_0) = v(\Phi(t, x_0)), \tag{4.4.1}$$
$$\Phi(0, x_0) = x_0. \tag{4.4.2}$$

Φ is een afbeelding van

$$D := \{(t, x_0) \in \mathbf{R} \times X \mid t \in I(x_0)\},$$

het "gemeenschappelijke definitiegebied van alle oplossingen", naar X.

Verder noteren we, voor iedere $t \in \mathbf{R}$, het definitiegebied van Φ^t met

$$X^t := \{x_0 \in X \mid (t, x_0) \in D\}$$

De afbeelding Φ^t heet de *stroming met snelheidsveld v over de tijd t*. Engels: *flow*, waarvan ook de keuze van de letter Φ afkomstig is.

De theorie in lokale coördinaten uit Analyse D geeft:

Lemma 4.4.1 *Zij v een C^k-vectorveld in X, $k \geq 1$. Voor iedere $x_0 \in X$ is er een open interval I om 0 in $\mathbf{R}$ en een open omgeving U van x_0 in X, waarvoor $I \times U \subset D$. Verder is de beperking van Φ tot $I \times U$ een C^k-afbeelding van $I \times U$ naar X.*

De eerste opmerking van deze paragraaf geeft dat

$$t \mapsto \Phi^t(\Phi^s(x))$$

en

$$t \mapsto \Phi^{t+s}(x)$$

allebei oplossingen zijn die voor $t = 0$ gelijk zijn aan $\Phi^s(x)$. Dit leidt tot de zogenaamde *groepseigenschap* van stromingen:

Stelling 4.4.2 *Als $x \in X^s$, dan is $\Phi^s(x) \in X^t$ dan en slechts dan als $x \in X^{t+s}$. Is dit het geval, dan is*

$$\Phi^t \circ \Phi^s\,(x) = \Phi^{t+s}\,(x).$$

Combinatie van Lemma 4.4.1 en Stelling 4.4.2 geeft nu:

Stelling 4.4.3 *Zij v een C^k-vectorveld in X, $k \geq 1$. Dan is het gemeenschappelijke definitiegebied D van alle oplossingen van $\frac{dx}{dt} = v(x)$ een open deelverzameling van $\mathbf{R} \times X$ en is Φ een C^k-afbeelding van D naar X.*

Voor iedere $t \in \mathbf{R}$ is X^t een open deelverzameling van X en is Φ^t een C^k-diffeomorfisme van X^t naar X^{-t}, met inverse gelijk aan Φ^{-t}. Als $t = 0$, dan is $X^t = X$ en is Φ^t gelijk aan de identiteit in X.

Is X compact, dan is $D = \mathbf{R} \times X$ en $X^t = X$ voor alle $t \in \mathbf{R}$.

Bewijs Zij $x_0 \in X$ en zij $\gamma : I(x_0) \to X$ de oplossing die start in het punt x_0. Definieer T als de verzameling van alle $t \in \mathbf{R}$, waarvoor er een open omgeving A van (t, x_0) in $\mathbf{R} \times X$ is, met de eigenschap dat $A \subset D$ en $\Phi|_A \in \mathrm{C}^k(A, X)$. T is een open deelverzameling van $I(x_0)$ en Lemma 4.4.1 geeft dat $0 \in T$.

Stel nu dat $t_1 \in I(x_0)$ in de afsluiting ligt van T. Lemma 4.4.1, met x_0 vervangen door $x_1 = \gamma(t_1)$, geeft een open interval I om 0 in $\mathbf{R}$ en een open omgeving U van x_1 in X, met de eigenschap dat $U \subset X^\tau$ voor iedere $\tau \in I$ en $\Phi \in \mathrm{C}^k(I \times U, X)$.

Omdat $t_1 \in \bar{T}$, is er een $t \in T \cap (t_1 - I)$. De continuïteit van γ gebruikend, kunnen we bovendien arrangeren dat $\gamma(t) \in U$.

Omdat $t \in T$, is er een open omgeving V van x_0 in X, met de eigenschap dat $V \subset X^t$ en $\Phi^t : x \mapsto \Phi(t, x)$ is een C^k-afbeelding in V. De continuïteit van Φ^t gebruikend, kunnen we bovendien arrangeren dat $\Phi^t(V) \subset U$.

Als $x \in V$, $\tau \in I$, dan is $\Phi^t(x) \in U \subset X^\tau$, dus vanwege Stelling 4.4.2 is $x \in X^{\tau+t}$ en

$$\Phi(\tau + t, x) = \Phi(\tau, \Phi^t(x)).$$

Dit als functie van τ en x lezend en de kettingregel gebruikend, zien we dat Φ een C^k-afbeelding is in $(I + t) \times V \subset D$. Omdat $t \in t_1 - I$ impliceert dat $I + t$ een open omgeving is van t_1, is de conclusie dat $t_1 \in T$.

Hiermee hebben we aangetoond dat T een niet-lege, open en gesloten delverzameling is van de samenhangende verzameling $I(x_0)$. Dus $T = I(x_0)$, waarmee het eerste gedeelte van de stelling is bewezen.

Het tweede gedeelte is niet meer dan een opsomming van enkele gevolgen. Omdat $x \mapsto (t, x)$ een C^k-afbeelding van X naar $\mathbf{R} \times X$, is het volledige origineel X^t van D een open deelverzameling van X en de samenstelling Φ^t met Φ een C^k-afbeelding van X^t naar X. Het beeld is gelijk aan X^{-t} en de inverse gelijk aan Φ^{-t}.

De laatste uitspraak volgt uit Gevolg 4.3.4. Immers, als X compact is, dan is $I(x_0) = \mathbf{R}$ voor iedere $x_0 \in X$. Maar dit is equivalent met $D = \mathbf{R} \times X$. □

Uit (4.4.1) lezen we nog af dat $\partial\Phi/\partial t \in \mathrm{C}^k(D, X)$, dus als functie van t krijgen we één differentieerbaarheidsgraad meer.

Merk op dat $X^t = X$ voor alle $t \in \mathbf{R}$ equivalent is met $I(0, x_0) = \mathbf{R}$ voor alle $x_0 \in X$. In dit geval is $t \mapsto \Phi^t$ een homomorfisme van de optelgroep van de reële getallen naar de groep $\mathrm{Diff}^k(X)$ van C^k-diffeomorfismen van X naar zichzelf. De definiërende vergelijkingen

$$\tfrac{d}{dt}\Phi^t(x) = v(\Phi^t(x)), \quad \Phi^0(x) = x$$

leiden tot de suggestieve notatie

$$\Phi^t = e^{t\,v} \tag{4.4.3}$$

voor de stroming van het vectorveld v na tijd t. Het voordeel van de notatie $e^{t\,v}$ boven Φ^t is dat meteen de afhankelijkheid van v erin uitgedrukt is.

Voor lineaire stelsels $\frac{dx}{dt} = A\,x$ met constante coëfficiënten in $\mathbf{R}^n$ correspondeert dit met de e-macht van een matrix, gedefinieerd als

$$e^{t\,A} = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{t^k}{k!}\, A^k.$$

Zie Analyse D voor meer details.

4.5 Derivaties

Zij $v \in \mathrm{T}_x X$. Voor iedere reëelwaardige differentieerbare functie f in X, noteren we met

$$\mathrm{d}_{v,\,x} f := \mathrm{d}f(x) \cdot v \in \mathbf{R}$$

de afgeleide van f in het punt x, in de richting van v. Dit lezend als functie van f, krijgen we een lineaire afbeelding

$$\mathrm{d}_{v,\,x} : \mathrm{C}^\infty(X) \to \mathbf{R}.$$

Voor het product geldt de *Leibniz-regel*

$$\mathrm{d}_{v,\,x}(f \cdot g) = \mathrm{d}_{v,\,x} f \cdot g(x) + f(x) \cdot \mathrm{d}_{v,\,x} g.$$

Is v een vectorveld in X, dan definieert

$$\mathrm{d}_v f : x \mapsto \mathrm{d}f(x) \cdot v(x) : X \to \mathbf{R}$$

een reëelwaardige functie $\mathrm{d}_v f$ in X, die de afgeleide van f in de richting van het vectorveld v genoemd wordt.

Definitie 4.5.1 Een lineaire afbeelding $D : \mathrm{C}^\infty(X) \to \mathbf{R}$ heet een *derivatie in het punt* $x \in X$, als

$$D(f \cdot g) = Df \cdot g(x) + f(x) \cdot Dg$$

voor alle $f, g \in \mathrm{C}^\infty(X)$. Een *derivatie in* X is een lineaire afbeelding $D : \mathrm{C}^\infty(X) \to \mathrm{C}^\infty(X)$, waarvoor

$$D(f \cdot g) = Df \cdot g + f \cdot Dg$$

voor alle $f, g \in \mathrm{C}^\infty(X)$. Anders gezegd, voor iedere $x \in X$ is de afbeelding $f \mapsto Df(x)$ een derivatie in het punt x. $\oslash$

Merk op dat als D en D' derivaties (in een punt) zijn, dan is ook

$$D + D' : f \mapsto Df + D'f$$

een derivatie (in een punt). Verder, is $c \in \mathbf{R}$, dan is ook

$$c\,D : f \mapsto c\,Df$$

een derivatie (in een punt). Hiermee vormen de derivaties (in een punt) een lineaire ruimte.

In het bewijs van de hieronder volgende Stelling 4.5.2 maken we gebruik van het volgende

Lemma 4.5.1 *Bij iedere $p \in X$ en iedere open omgeving U van p in X is er een compacte deelverzameling K van X en een $\psi \in \mathrm{C}^\infty(X)$, waarvoor $K \subset U$, $\psi(x) = 0$ voor $x \in X \setminus K$ en $\psi(p) \neq 0$.*

Bewijs In Voorbeeld 1.9.1 is een functie $\chi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R})$ ten tonele gevoerd, met de eigenschap dat $\chi(x) > 0$ als $x > 0$ en $\chi(x) = 0$ als $x \leq 0$.

Als $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, dan heeft

$$\varphi_{a,\,b}(x) := \chi(x - a)\,\chi(b - x)$$

de eigenschap dat $\varphi_{a,b} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R})$ en $\varphi_{a,b}(x) > 0$ als $a < x < b$, terwijl $\varphi_{a,b}(x) = 0$ elders.

Als $a_j < b_j$ voor alle $1 \leq j \leq n$, dan definieert

$$\varphi(x) = \varphi_{a,\,b}(x) := \prod_{j=1}^{n} \varphi_{a_j,\,b_j}(x_j)$$

een C^∞-functie φ in $\mathbf{R}^n$ die > 0 is in het Cartesische product B van de open intervallen $]a_j,\, b_j[$ en $= 0$ elders.

Zij nu κ een kaart voor X met $p \in X_\kappa$. Daarbij kunnen we B als boven vinden, waarvoor $\kappa(p) \in B$ en $\bar{B} \subset \kappa(X_\kappa \cap U)$. Dan $K := \kappa^{-1}(\bar{B})$ een compacte deelverzameling van X en $K \subset X_\kappa \cap U$.

$\varphi \circ \kappa$ is een C^∞-functie in X_κ, gelijk aan 0 in $X_\kappa \setminus K$ en > 0 in p. Definieer $\psi(x) = \varphi \circ \kappa(x)$ als $x \in X_\kappa$ en $\psi(x) = 0$ als $x \in X \setminus X_\kappa$. Dan is $\psi(x) = 0$ voor alle x in de open verzameling $X \setminus K$, dus ψ is daar C^∞. Omdat ψ ook C^∞ is in X_κ en X gelijk is aan de vereniging van $X \setminus K$ en X_κ, is $\psi \in \mathrm{C}^\infty(X)$. Tenslotte is $\psi(p) > 0$. $\square$

Stelling 4.5.2 *Voor iedere $x \in X$ is $v \mapsto \mathrm{d}_{v,\,x}$ een bijectieve lineaire afbeelding van $\mathrm{T}_x\, X$ naar de ruimte van derivaties in het punt x. De afbeelding $v \mapsto \mathrm{d}_v$ is een bijectieve lineaire afbeelding van $\mathcal{V}^\infty(X)$ naar de lineaire ruimte van alle derivaties in X.*

Bewijs Zij D een derivatie in het punt $p \in X$. De eerste opmerking is, dat D een *lokale operator* is, in de zin dat voor iedere omgeving U van p in X de waarde Df alleen afhangt van wat f in U doet. Dat wil zeggen: als $f|_U = g|_U$, dan is $Df = Dg$. De lineariteit van D gebruikend, is dit equivalent met de uitspraak dat $Df = 0$ zodra $f|_U = 0$.

Bewijs hiervan: is ψ als in Lemma 4.5.1, dan zien we dat $f|_U = 0$ impliceert dat

$$0 = D(0) = D(\psi \cdot f) = D\psi \cdot f(p) + \psi(p) \cdot Df = \psi(p) \cdot Df,$$

dus $Df = 0$.

We mogen daarom in lokale coördinaten werken, waarbij we $p = 0 \in \mathbf{R}^n$ mogen nemen. We schrijven nu

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \tfrac{d}{dt} f(t\,x)\, dt = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\, x_j,$$

waarin

$$f_j(x) := \int_0^1 \partial_j f(t\,x)\, dt$$

een C^∞-functie van x voorstelt. Daarmee is

$$f_j(0) = \partial_j f(0) = \mathrm{d}_{e_j,\,0} f,$$

als e_j de j-de basisvector in $\mathbf{R}^n$ is.

Voor een constante c geldt dat

$$c\,Df = D(c\,f) = Dc\, f(p) + c\,Df,$$

ofwel $Dc\,f(p) = 0$ voor iedere $f \in \mathrm{C}^\infty(X)$, dus $Dc = 0$. Het voorgaande levert nu, gebruikend dat $x_j = 0$ in 0:

$$Df = D(f(0)) + \sum_{j=1}^{n} D(f_j\,x_j) = \sum_{j=1}^{n} f_j(0) \cdot Dx_j = \mathrm{d}_{v,0} f,$$

waarin

$$v := \sum_{j=1}^{n} Dx_j \cdot e_j.$$

Terugkerend naar de variëteit, laat dit zien dat iedere derivatie in het punt 0 van de vorm $\mathrm{d}_{v,p}$ is, voor een $v \in \mathrm{T}_p\,X$.

Is $v \in \mathrm{T}_p\,X$, dan geeft $\mathrm{d}_{v,p} f = 0$ voor alle f dat $v = 0$, omdat er bij iedere lineaire vorm ξ op $\mathrm{T}_p\,X$ een $f \in \mathrm{C}^\infty(X)$ is, met $\mathrm{d}f(x) = \xi$. De afbeelding $v \mapsto \mathrm{d}_{v,p}$ is daarmee ook injectief.

Voor een derivatie $D : \mathrm{C}^\infty(X) \to \mathrm{C}^\infty(X)$ geeft het voorgaande eerst voor iedere open deelverzameling U van X dat $(Df)|_U$ alleen van $f|_U$ afhangt. De berekening in lokale coördinaten geeft dat $D = \mathrm{d}_v$, waarin nu

$$v := \sum_{j=1}^{n} Dx_j \cdot e_j$$

een C^∞-vectorveld in X is, omdat $Dx_j \in \mathrm{C}^\infty(X)$. Dit geeft de surjectiviteit van $v \mapsto \mathrm{d}_v$. De injectiviteit volgt uit de injectiviteit van $v \mapsto \mathrm{d}_{v,p}$, voor iedere $p \in X$. □

Opmerking 4.5.1 Lemma 4.5.1 is niet geldig met C^∞ vervangen door C^ω. Als we anderzijds C^∞ in het bewijs proberen te vervangen door C^k met k eindig, dan stuiten we op het probleem dat de functies f_j slechts C^{k-1} zijn. Men kan bewijzen dat iedere derivatie van $\mathrm{C}^{k+1}(X)$ naar $\mathrm{C}^k(X)$ van de vorm d_v is voor een eenduidig bepaalde $v \in \mathcal{V}^k(X)$, zie [1, Thm. 4.2.38]. ⊘

Stelling 4.5.2 maakt dat we raakvectoren aan X in het punt p ook kunnen *definiëren* als derivaties in het punt p. En C^∞-vectorvelden in X als derivaties in $\mathrm{C}^\infty(X)$. Dit is helemaal geformuleerd in termen van de algebraïsche bewerkingen van optellen en vermenigvuldigen in de ruimte $\mathrm{C}^\infty(X)$. In de algebraïsche meetkunde wordt $\mathrm{C}^\infty(X)$ vervangen door de algebra A van veeltermfuncties in X en worden vectorvelden gezien als derivaties in A.

Zijn $(x_1, \ldots, x_n)$ lokale coördinaten, dan is

$$f \mapsto \partial_j f = \tfrac{\partial f}{\partial x_j},$$

de partiële afgeleide naar de j-de variabele, een derivatie, die met $\partial/\partial x_j$ aangeduid wordt. Het corresponderende vectorveld e_j, waarvoor

$$\tfrac{\partial}{\partial x_j} = \mathrm{d}_{e_j},$$

wordt soms ook met $\partial/\partial x_j$ aangeduid. Een willekeurig derivatie D, resp. C^∞-vectorveld v, is in lokale coördinaten op eenduidige wijze te schrijven als

$$D = \sum_{j=1}^{n} v_j\,\tfrac{\partial}{\partial x_j},$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j\,e_j,$$

$$v_j := D\kappa_j \in \mathrm{C}^\infty(X).$$

Identificeert men derivaties en vectorvelden, dan schrijft men vrolijk $D = v$, $\partial/\partial x_j = e_j$, en daarmee

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j \, \tfrac{\partial}{\partial x_j}. \tag{4.5.1}$$

4.6 Transformatie van Vectorvelden

Zijn X en Y variëteiten en is Φ een willekeurige C^k-afbeelding van X naar Y, dan voert de substitutie van variabelen $y = \Phi(x)$ de functie $g \in \mathrm{C}^k(Y)$ over in de functie $g \circ \Phi \in \mathrm{C}^k(X)$. Dit definieert een lineaire afbeelding

$$\Phi^* : g \mapsto g \circ \Phi : \mathrm{C}^k(Y) \to \mathrm{C}^k(X), \tag{4.6.1}$$

die het *terugtrekken van functies* door middel van de afbeelding Φ genoemd wordt. Behalve dat Φ^* een lineaire afbeelding is, hebben we ook nog de rekenregels

$$\Phi^*(g \cdot h) = \Phi^*(g) \cdot \Phi^*(h), \tag{4.6.2}$$

$$(\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*, \tag{4.6.3}$$

als $g, h \in \mathrm{C}^k(Y)$ en Ψ een C^k-afbeelding is van Y naar een derde variëteit Z. Het omkeren van de volgorde bij samenstellen is karakteristiek voor terugtrekken = substitutie van variabelen. We onderzoeken nu wat hiervan het natuurlijke analogon is voor vectorvelden.

Lemma 4.6.1 *Zij Φ een differentieerbare afbeelding van de variëteit X naar de variëteit Y en zij v, resp. w een vectorveld in X, resp. in Y.*

a) Als

$$\mathrm{T}_x \Phi \cdot v(x) = w(\Phi(x)) \text{ voor alle } \ x \in X, \tag{4.6.4}$$

dan is $\Phi \circ \gamma$ een oplossing van $\frac{dy}{dt} = w(y)$ voor iedere oplossing γ van $\frac{dx}{dt} = v(x)$.

b) Stel dat er een lokale existentiestelling geldt voor het beginwaardeprobleem voor $\frac{dx}{dt} = v(x)$ en dat $\Phi \circ \gamma$ een oplossing is van $\frac{dy}{dt} = w(y)$ voor iedere oplossing γ van $\frac{dx}{dt} = v(x)$. Dan geldt (4.6.4).

c) Neem aan: (4.6.4), een lokale existentiestelling voor het beginwaardeprobleem voor $\frac{dx}{dt} = v(x)$ en een lokale eenduidigheidsstelling voor het beginwaardeprobleem voor $\frac{dy}{dt} = w(y)$. Zij $\delta : I \to Y$ een oplossing van $\frac{dy}{dt} = w(y)$ en $\delta(t_0) = \Phi(x_0)$ voor een $t_0 \in I$, $x_0 \in X$. Dan is er een open interval I_0 om t_0 in I en een oplossing $\gamma : I_0 \to X$ van $\frac{dx}{dt} = v(x)$, met $\gamma(t_0) = x_0$, waarvoor $\delta = \Phi \circ \gamma$ in I_0. Is de afbeelding Φ bovendien proper, dan geldt het bovenstaande met $I_0 = I$. In het bijzonder is dan $\delta(I) \subset \Phi(X)$.

Bewijs Als (4.6.4) geldt en γ is een oplossing van $\frac{dx}{dt} = v(x)$, dan is

$$(\Phi \circ \gamma)'(t) = \mathrm{T}_{\gamma(t)} \Phi \cdot \gamma'(t) = \mathrm{T}_{\gamma(t)} \Phi \cdot v(\gamma(t)) = w(\Phi(\gamma(t))),$$

voor alle t, dus is $\Phi \circ \gamma$ een oplossing van $\frac{dy}{dt} = w(y)$.

Voor b) zetten we de laatste term $w(\Phi \circ \gamma(t))$ vooraan en gebruiken dat we voor iedere $x \in X$ een oplossing $\gamma : I \to X$ van $\frac{dx}{dt} = v(x)$ hebben en een $t \in I$, waarvoor $\gamma(t) = x$.

Voor c), zij γ een oplossing van $\frac{dx}{dt} = v(x)$ met $\gamma(t_0) = x_0$, waarvan de existentie bij de aannamen stond. Vanwege a) is $\Phi \circ \gamma$ een oplossing van $\frac{dy}{dt} = w(y)$. Omdat

$$\Phi \circ \gamma(t_0) = \Phi(x_0) = \delta(t_0),$$

is $\Phi \circ \gamma = \delta$ in een omgeving van t_0, op grond van de lokale eenduidigheidsstelling.

We nemen aan dat γ en δ maximale oplossingen zijn. Dan is $I_0 \subset I$. Stel dat $s := \sup I_0 \in I$. Neem $\eta > 0$, zódanig dat $[s - \eta,\, s] \subset I$. Dan is $K := \delta([s - \eta,\, s])$ compact in Y, dus $L := \Phi^{-1}(K)$ is compact in X. Vanwege Stelling 4.3.3 is er een $\varepsilon > 0$, die we $\leq \eta$ kunnen kiezen, waarvoor $\gamma(t) \notin L$, zodra $s - \varepsilon < t < s$. Dit is in tegenspraak met $\Phi \circ \gamma(t) = \delta(t) \in K$. Op dezelfde manier leidt $i := \inf I_0 \in I$ tot een tegenspraak. De conclusie is daarom dat $I_0 = I$. □

Men zegt dat Φ het vectorveld v met het vectorveld w *conjugeert*, als (4.6.4) geldt. In termen van de afbeeldingen $\Phi : X \to Y$, $\mathrm{T}\,\Phi : \mathrm{T}\,X \to \mathrm{T}\,Y$, $v : X \to \mathrm{T}\,X$ en $w : Y \to \mathrm{T}\,Y$, betekent dit dat

$$\mathrm{T}\,\Phi \circ v = w \circ \Phi.$$

Voor willekeurige differentieerbare afbeeldingen hoeft het niet zo te zijn dat er bij ieder vectorveld v in X precies één vectorveld w in Y is, dat door Φ met v wordt geconjugeerd. Immers buiten $\Phi(X)$ wordt geen voorwaarde aan w gesteld. Ook moet v aan de voorwaarde voldoen dat $\mathrm{T}_a\,\Phi \cdot v(a) = \mathrm{T}_b\,\Phi \cdot v(b)$ als $\Phi(a) = \Phi(b)$ en als Φ het vectorveld v conjugeert aan een vectorveld w in Y.

Evenmin hoeft er bij ieder vectorveld w in Y precies één vectorveld v in X te zijn, waarvoor v door Φ met w wordt geconjugeerd. Als $\mathrm{T}_x\,\Phi$ niet surjectief is, dan krijgen we problemen met de existentie en als $\mathrm{T}_x\,\Phi$ niet injectief is, dan krijgen we problemen met de eenduidigheid.

Is echter Φ een lokaal C^{k+1}-diffeomorfisme van X naar Y, dat wil zeggen $\Phi \in \mathrm{C}^{k+1}(X,\, Y)$ en $\mathrm{T}_x\,\Phi$ is bijectief van $\mathrm{T}_x\,X$ naar $\mathrm{T}_{\Phi(x)}\,Y$ voor iedere $x \in X$, dan is (4.6.4) equivalent met

$$v(x) = \mathrm{T}_x\,\Phi^{-1} \cdot w(\Phi(x)), \quad x \in X. \tag{4.6.5}$$

Voor iedere $w \in \mathcal{V}^k(Y)$ definieert (4.6.5) dan een C^k-vectorveld v in X, dat het door Φ *teruggetrokken vectorveld* genoemd wordt en met $v = \Phi^* w$ wordt aangeduid. $\Phi^* : w \mapsto v$ heet de operatie van *terugtrekken* (engels: *pullback*) van vectorvelden door middel van de afbeelding Φ. Het volgt direct uit Lemma 4.6.1 dat

$$\Phi \circ e^{t\,\Phi^* w} = e^{t\,w} \circ \Phi, \tag{4.6.6}$$

voor zover gedefinieerd.

Terugtrekken door Φ definieert een lineaire afbeelding

$$\Phi^* \,:\, w \mapsto \Phi^* w : \mathcal{V}^k(Y) \to \mathcal{V}^k(X).$$

Is Φ een diffeomorfisme, dan is deze afbeelding bijectief met inverse gelijk aan

$$\Phi_* := (\Phi^*)^{-1} = (\Phi^{-1})^*. \tag{4.6.7}$$

Φ_* heet de operatie van het *vooruitduwen* (engels: *pushforward*) van vectorvelden door middel van de afbeelding Φ. Merk op dat Φ het vectorveld v met $\Phi_* v$ conjugeert, men noemt Φ_* dan ook wel *conjugatie door middel van* Φ. Formule:

$$(\Phi_* v)(y) = \mathrm{T}_x\,\Phi \cdot v(x), \;\text{ met }\; x = \Phi^{-1}(y),\; y \in Y. \tag{4.6.8}$$

In dit geval kan (4.6.6) geschreven worden als

$$e^{t\,\Phi_* v} = \Phi \circ e^{t\,v} \circ \Phi^{-1}. \tag{4.6.9}$$

In de theorie van transformatiegroepen heet $\Psi \mapsto \Phi \circ \Psi \circ \Phi^{-1}$ de *conjugatie met* Φ, op deze manier correspondeert de terminologie voor vectorvelden met die voor afbeeldingen. Merk ook op dat, als κ een kaart voor X is en v een vectorveld in X, dan conjugeert κ het vectorveld v met $x \mapsto (x,\, v_\kappa(x))$.

Is Φ een lokaal C^k-diffeomorfisme van X naar Y, dan gelden de volgende rekenregels voor Φ^*. Als $g \in \mathrm{C}^k(Y)$, $w \in \mathcal{V}^k(Y)$, dan is

$$\Phi^*(g \cdot w) = \Phi^*(g) \cdot \Phi^*(w), \tag{4.6.10}$$

$$\Phi^*(\mathrm{d}_w g) = \mathrm{d}_{\Phi^* w} \Phi^* g. \tag{4.6.11}$$

Is Ψ een lokaal C^k-diffeomorfisme van Y naar een variëteit Z, dan geldt (4.6.3) ook voor terugtrekken van vectorvelden. Zijn Φ en Ψ diffeomorfismen, dan volgt hieruit dat

$$(\Psi \circ \Phi)_* = \Psi_* \circ \Phi_*, \tag{4.6.12}$$

omdat $(\Psi \circ \Phi)^{-1} = \Phi^{-1} \circ \Psi^{-1}$.

4.7 Lie-haakjes

Stel u en v zijn C^k-vectorvelden in de variëteit X, $k \geq 1$. Dan is, lokaal en voor kleine $|t|$,

$$v(t) := (e^{t\,u})_* v$$

een vectorveld in X, dat op differentieerbare manier van t afhangt, met $v(0) = v$. Men noemt het vectorveld

$$[u,\, v] := \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} (e^{t\,u})_* v = \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t}[(e^{t\,u})_* v - v] \tag{4.7.1}$$

in X de *Lie-haakjes* van u en v.

In lokale coördinaten κ hebben we de formule

$$[u,\, v]_\kappa(x) = \mathrm{D}\, u_\kappa(x) \cdot v_\kappa(x) - \mathrm{D}\, v_\kappa(x) \cdot u_\kappa(x). \tag{4.7.2}$$

(Zie (4.1.5) voor $v_\kappa : V_\kappa \to \mathbf{R}^n$.) Voor een bewijs merken we op dat de inverse van $e^{t\,u}$ gelijk is aan $e^{-t\,u}$. Dit geeft in lokale coördinaten de formule

$$(e^{t\,u})_* v(x) = \mathrm{D}(e^{t\,u})(e^{-t\,u}(x)) \cdot v(e^{-t\,u}(x)),$$

zie (4.6.8). Differentiatie naar de eerste t in $t = 0$, daarbij voor de tweede en derde t de waarde $t = 0$ invullend, geeft $\mathrm{D}\, u(x) \cdot v(x)$. Vullen we $t = 0$ voor de eerste t in, dan krijgen we $v(e^{-t\,u}(x))$; differentiatie hiervan naar t in $t = 0$ geeft $-\,\mathrm{D}\, v(x) \cdot u(x)$.

Uit (4.7.2) lezen we af dat $[u,\, v] \in \mathcal{V}^{k-1}(X)$, als u en v beiden C^k-vectorvelden in X zijn. Merk op dat voor iedere $v \in \mathcal{V}^k$ de afbeelding $u \mapsto [u,\, v]$ lineair is van $\mathcal{V}^k(X)$ naar $\mathcal{V}^{k-1}(X)$. Voor de berekening hiervan in het punt x is niet alleen de waarde $u(x)$ van u in het punt x nodig, maar ook de eerste-orde afgeleide. Anders gezegd, $u \mapsto [u,\, v]$ is een eerste-orde lineaire partiële differentiaaloperator. Op dezelfde manier is, voor iedere $u \in \mathcal{V}^k(X)$, de afbeelding $v \mapsto [u,\, v]$ een eerste-orde lineaire partiële differentiaaloperator van $\mathcal{V}^k(X)$ naar $\mathcal{V}^{k-1}(X)$.

Uit de formule in lokale coördinaten zien we dat de Lie-haakjes *antisymmetrisch* zijn, dat wil zeggen

$$[u,\, v] = -[v,\, u], \quad u, v \in \mathcal{V}^1(X). \tag{4.7.3}$$

Een andere manier om dit in te zien gaat als volgt. Uit de groepseigenschap voor stromingen, Stelling 4.4.2, volgt dat

$$e^{t\,v} \circ e^{s\,v} = e^{(t+s)\,v} = e^{(s+t)\,v} = e^{s\,v} \circ e^{t\,v}$$

voor alle $s, t \in \mathbf{R}$, en voorzover de samenstellingen gedefinieerd zijn. Toepassing van Stelling 4.7.1 hieronder geeft dat $[v,\, v] = 0$ voor alle $v \in \mathcal{V}^1(X)$. Hierin v vervangend door $u + v$ en de haakjes bilineair uitwerkend, krijgen we

$$0 = [u+v,\, u+v] = [u,\, u] + [u,\, v] + [v,\, u] + [v,\, v] = [u,\, v] + [v,\, u],$$

en dat is (4.7.3).

Stelling 4.7.1 *De volgende uitspraken voor $u, v \in \mathcal{V}^1(X)$ zijn equivalent.*

$$[u,\, v] = 0. \tag{4.7.4}$$

$$(e^{t\,u})_* v = v \;\text{ voor alle }\; t \in \mathbf{R}. \tag{4.7.5}$$

$$e^{t\,u} \circ e^{s\,v} = e^{s\,v} \circ e^{t\,u} \;\text{ voor alle }\; t, s \in \mathbf{R}. \tag{4.7.6}$$

Hierbij gelden (4.7.5) en (4.7.6) in die punten van X, waar alle objecten gedefinieerd zijn.

Bewijs We beginnen met het bewijs van (4.7.4) $\Rightarrow$ (4.7.5). Merk op dat

$$e^{(t+h)\,u} = e^{t\,u} \circ e^{h\,u},$$

dus vanwege (4.6.12) is

$$(e^{(t+h)\,u})_* = (e^{t\,u})_* \circ (e^{h\,u})_*.$$

Als nu (4.7.4) geldt, dan is

$$\tfrac{d}{dt}(e^{t\,u})_* v = \tfrac{d}{dh}\big|_{h=0} (e^{(t+h)\,u})_* v = \tfrac{d}{dh}\big|_{h=0} (e^{t\,u})_* \circ (e^{h\,u})_* v = (e^{t\,u})_*([u,\, v]) = 0,$$

voor iedere $t \in \mathbf{R}$. Hierbij is gebruikt dat $A := (e^{t\,u})_*$ een continue lineaire afbeelding is, in de zin dat in

$$\tfrac{1}{h}[A(v(h)) - A(v(0))] = A(\tfrac{1}{h}[v(h) - v(0)])$$

het rechterlid convergeert voor $h \to 0$ naar $A(v'(0))$. (De convergentie is bijvoorbeeld puntsgewijze convergentie van vectorvelden.) Desgewenst kan men deze uitspraken in lokale coördinaten expliciet verifiëren. De conclusie is dat $t \mapsto (e^{t\,u})_* v$ constant is, dus gelijk aan zijn waarde voor $t = 0$ en die is gelijk aan v.

Voor het bewijs van (4.7.5) $\Rightarrow$ (4.7.6) merken we op dat (4.6.9), toegepast met $\Phi = e^{t\,u}$, geeft dat

$$e^{t\,u} \circ e^{s\,v} \circ e^{-t\,u} = e^{s\,(e^{t\,u})_* v}, \quad u, v \in \mathcal{V}^1(X). \tag{4.7.7}$$

(4.7.6) $\Rightarrow$ (4.7.4) tenslotte volgt uit

$$[u,\, v] = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\, \tfrac{d}{ds}\big|_{s=0} e^{t\,u} \circ e^{s\,v} \circ e^{-t\,u}, \quad u, v \in \mathcal{V}^1(X). \tag{4.7.8}$$

Immers, de afgeleide van het linkerlid in (4.7.7) naar s in $s = 0$ is gelijk aan $(e^{t\,u})_* v$; de afgeleide dáárvan naar t in $t = 0$ is gelijk aan $[u,\, v]$. □

Met het oog op (4.7.4) $\Leftrightarrow$ (4.7.6) zegt men ook wel dat de vectorvelden u en v *commuteren*, als $[u,\, v] = 0$.

Stelling 4.7.2 *Zij $\Phi \in \mathrm{C}^1(X, Y)$, $u, v \in \mathcal{V}^1(X)$, $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{V}^1(Y)$. Als Φ het vectorveld u met $\tilde{u}$ conjugeert en v met $\tilde{v}$, dan conjugeert Φ het vectorveld $[u,\, v]$ met $[\tilde{u},\, \tilde{v}]$.*

In het bijzonder, is Φ een lokaal diffeomorfisme, dan is

$$\Phi^*[\tilde{u},\, \tilde{v}] = [\Phi^*\tilde{u},\, \Phi^*\tilde{v}]$$

voor alle $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{V}^1(Y)$. Is Φ een diffeomorfisme, dan is

$$\Phi_*[u,\, v] = [\Phi_* u,\, \Phi_* v]$$

voor alle $u, v \in \mathcal{V}^1(X)$.

Bewijs We passen Lemma 4.6.1 toe. Dit geeft

$$\begin{aligned} &\Phi \circ e^{t\,u} \circ e^{s\,v} \circ e^{-t\,u} = e^{t\,\tilde{u}} \circ \Phi \circ e^{s\,v} \circ e^{-t\,u} \\ &= e^{t\,\tilde{u}} \circ e^{s\,\tilde{v}} \circ \Phi \circ e^{-t\,u} = e^{t\,\tilde{u}} \circ e^{s\,\tilde{v}} \circ e^{-t\,\tilde{u}} \circ \Phi. \end{aligned}$$

Differentiatie naar s in $s = 0$ geeft met het oog op (4.7.7), dat Φ het vectorveld $(e^{t\,u})_* v$ conjugeert met $(e^{t\,\tilde{u}})_* \tilde{v}$. Differentiatie van deze identiteit naar t in $t = 0$ geeft vervolgens dat Φ het vectorveld $[u,\, v]$ conjugeert met $[\tilde{u},\, \tilde{v}]$. □

Een gevolg is de zogenaamde *Jacobi-identiteit* voor vectorvelden:

Gevolg 4.7.3 *Als $u, v, w \in \mathcal{V}^2(X)$, dan is*

$$[u,\, [v,\, w]] + [v,\, [w,\, u]] + [w,\, [u,\, v]] = 0.$$

Bewijs Uit Stelling 4.7.2 volgt

$$(e^{t\,u})_*[v,\, w] = [(e^{t\,u})_* v,\, (e^{t\,u})_* w]$$

voor alle t. Differentiatie hiervan naar t in $t = 0$ geeft

$$[u,\, [v,\, w]] = [[u,\, v],\, w] + [v,\, [u,\, w]].$$

Gebruikmakend van de antisymmetrie (4.7.3) kunnen we dit in de vorm van de Jacobi-identiteit herschrijven. $\square$

Als A en B lineaire operatoren zijn, dan wordt de *commutator* $[A,\, B]$ van A en B gedefinieerd door

$$[A,\, B] := A \circ B - B \circ A. \tag{4.7.9}$$

Stelling 4.7.4 *Als $u, v \in \mathcal{V}^1(X)$, dan is*

$$\mathrm{d}_{[u,\, v]} = -[\mathrm{d}_u,\, \mathrm{d}_v] : \mathrm{C}^2(X) \to \mathrm{C}^0(X). \tag{4.7.10}$$

In het bijzonder commuteren de vectorvelden u en v, dan en slechts dan als de derivaties d_u en d_v commuteren.

Bewijs Zij $f \in \mathrm{C}^2(X)$. Uit (4.6.11), met $\Phi = e^{t\,u}$, $w = v$ en $g = f$, lezen we af dat

$$(e^{t\,u})^*(\mathrm{d}_v f) = \mathrm{d}_{(e^{t\,u})^* v}(e^{t\,u})^* f.$$

Vanwege (4.6.7) is

$$(e^{t\,u})^* = (e^{-t\,u})_*,$$

dus differentiatie naar t in $t = 0$ geeft

$$\mathrm{d}_u\, \mathrm{d}_v f = -\mathrm{d}_{[u,\, v]} f + \mathrm{d}_v\, \mathrm{d}_u f.$$

$\square$

Anders gezegd, de commutator van de derivaties naar u en naar v is blijkbaar weer een derivatie, en wel naar het vectorveld $-[u,\, v]$. In het algemeen kan men bewijzen dat als A en B derivaties zijn in een algebra $\mathcal{A}$, dan is de commutator weer een derivatie in $\mathcal{A}$.

Ook geldt de Jacobi-identeit voor commutatoren van willekeurige lineaire operatoren A, B, C: de som van

$$\begin{aligned}
[A,\, [B,\, C]] &= ABC - ACB - BCA + CBA \\
[B,\, [C,\, A]] &= BCA - BAC - CAB + ACB \\
[C,\, [A,\, B]] &= CAB - CBA - ABC + BAC
\end{aligned}$$

geeft 0. Met het oog op Stelling 4.5.2 geeft dit een ander bewijs van de Jacobi-identiteit voor vectorvelden.

Stelling 4.7.5 *Veronderstel dat $u, v \in \mathcal{V}^1(X)$, $f, g \in \mathrm{C}^1(X)$. Dan geldt*

$$[f \cdot u,\, g \cdot v] = g \cdot \mathrm{d}_v f \cdot u - f \cdot \mathrm{d}_u g \cdot v + f \cdot g \cdot [u,\, v]. \tag{4.7.11}$$

Bewijs Voor $h \in \mathrm{C}^\infty(X)$ krijgen we

$$\mathrm{d}_v \circ \mathrm{d}_{fu} h = \mathrm{d}_v(f \cdot \mathrm{d}_u h) = \mathrm{d}_v f \cdot \mathrm{d}_u h + f \cdot \mathrm{d}_v \circ \mathrm{d}_u h.$$

Hiervan $\mathrm{d}_{fu} \circ \mathrm{d}_v h = f \cdot \mathrm{d}_u \circ \mathrm{d}_v h$ aftrekkend, krijgen we met het oog op (4.7.10) dat

$$\mathrm{d}_{[fu,\, v]} h = \mathrm{d}_{\mathrm{d}_v f \cdot u + f \cdot [u,\, v]} h.$$

Omdat dit geldt voor alle $h \in \mathrm{C}^\infty(X)$, geeft de injectiviteit van $w \mapsto \mathrm{d}_{w,\, x}$ uit Stelling 4.5.2 nu dat

$$[fu,\, v] = \mathrm{d}_v f \cdot u + f \cdot [u,\, v].$$

Hierin v door gv vervangend en

$$[u,\, gv] = -[gv,\, u] = -\mathrm{d}_u g \cdot v - g \cdot [v,\, u]$$

gebruikend, krijgen we tenslotte (4.7.11). □

Opmerking 4.7.1 Een *Lie-groep* is een groep G, die tegelijkertijd een n-dimensionale variëteit is, met de eigenschap dat de groepsvermenigvuldiging $(x,\, y) \mapsto x \cdot y$ een C^2-afbeelding is van $G \times G$ naar G en de inversie $x \mapsto x^{-1}$ een C^2-afbeelding is van G naar G.

Een belangrijk voorbeeld is de groep $\mathrm{GL}(V)$ van inverteerbare lineaire transformaties in een m-dimensionale lineaire ruimte V. Als open deelverzameling van $\mathrm{L}(V,\, V)$ is dit een m^2-dimensionale variëteit en het is niet moeilijk om na te gaan dat de groepsbewerkingen reëel-analytisch zijn, de vermenigvuldiging is zelfs een veelterm-afbeelding en de inversie is rationaal. De ondergroep van de orthogonale transformaties is ook een Lie-groep, met Lie-algebra gelijk aan de verzameling der antisymmetrische matrices, zie Opgave 3.7.5.

In een groep G speelt het eenheidselement 1 een bijzondere rol, vandaar dat men speciale aandacht heeft voor $\mathfrak{g} := \mathrm{T}_1\, G$, de raakruimte aan G in het eenheidselement.

Voor iedere $x \in G$ is

$$\alpha_x : y \mapsto x \cdot y \cdot x^{-1},$$

de *conjugatie met* x, een C^2-afbeelding van G naar G. Omdat $\alpha_x(1) = 1$, is de raakafbeelding

$$\mathrm{Ad}\, x := \mathrm{T}_1(\alpha_x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

een lineaire afbeelding van $\mathfrak{g}$ naar zichzelf, deze heet de *geadjungeerde transformatie* van x. Omdat

$$\alpha_{a \cdot b} = \alpha_a \circ \alpha_b, \quad a,\, b \in G,$$

geeft een toepassing van de kettingregel voor de raakafbeelding in het eenheidselement dat

$$\mathrm{Ad}\,(a \cdot b) = (\mathrm{Ad}\, a) \circ (\mathrm{Ad}\, b), \quad a,\, b \in G.$$

Anders gezegd, de afbeelding

$$\mathrm{Ad} \, : \, x \mapsto \mathrm{Ad}\, x : \, G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

is een groepshomomorfisme; dit heet de *geadjungeerde representatie* van G in $\mathfrak{g}$.

De afbeelding Ad van G naar $\mathrm{L}(\mathfrak{g},\, \mathfrak{g})$ is differentieerbaar, de totale afgeleide

$$\mathrm{ad} := \mathrm{D}\, \mathrm{Ad}_{\, 1} : \, \mathfrak{g} \to \mathrm{L}(\mathfrak{g},\, \mathfrak{g})$$

hiervan in het eenheidselement definieert een lineaire afbeelding van $\mathfrak{g}$ naar $\mathrm{L}(\mathfrak{g},\, \mathfrak{g})$. Voor iedere $u,\, v \in \mathfrak{g}$ heet nu

$$[u,\, v] := (\mathrm{ad}\, u)(v) \in \mathfrak{g}$$

de *Lie-haakjes* van u en v.

Dit is het patroon dat we gevolgd hebben bij de definitie van de Lie-haakjes van vectorvelden. Daarbij werd in plaats van G de groep van diffeomorfismen in X genomen en in plaats van $\mathfrak{g}$ de ruimte van vectorvelden in X. Met deze identificaties werd $\Phi_* = \mathrm{Ad}\,\Phi$. Het bewijs voor vectorvelden copiërend, ziet men dat ook de Lie-haakjes in $\mathfrak{g}$ een antisymmetrische bilineaire afbeelding van $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ naar $\mathfrak{g}$ definieert, die bovendien voldoet aan de Jacobi-identiteit.

In het algemeen wordt een *Lie-algebra* gedefinieerd als een lineaire ruimte $\mathfrak{g}$, voorzien van een antisymmetrische bilineaire afbeelding

$$(u, v) \mapsto [u, v] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

die voldoet aan de Jacobi-identiteit. Is G een Lie-groep, dan heet $\mathfrak{g} = \mathrm{T}_1\, G$, voorzien van de bovenstaande Lie-haakjes, de *Lie-algebra van G*. Het is één van de verrassingen van de theorie van Lie-groepen, dat iedere eindig-dimensionale Lie-algebra gelijk is aan de Lie-algebra van een Lie-groep. Voor meer over Lie-groepen verwijzen we naar het college Lie-groepen, of bijvoorbeeld [9, Ch. 2].

De filosofie om de diffeomorfismengroep van een variëteit X als een Lie-groep te zien met de ruimte van vectorvelden in X als Lie-algebra is nuttig, maar moet met de nodige voorzichtigheid gehanteerd worden. Zo is $\mathrm{Diff}^{\infty}(X)$ géén eindig-dimensionale variëteit en is $\mathcal{V}^{\infty}(X)$ géén eindig-dimensionale lineaire ruimte. $\oslash$

4.8 De Stelling van Frobenius

Als toepassing van de voorgaande theorie van Lie-haakjes geven we de lokale oplossing van een klassiek probleem uit de differentiaalmeetkunde. Zij X een n-dimensionale variëteit en $0 < d < n$. Veronderstel dat voor iedere $x \in X$ een d-dimensionale lineaire deelruimte H_x van de raakruimte $\mathrm{T}_x\, X$ aan X in het punt x gegeven is.

Als

$$H := \bigcup_{x \in X} H_x \subset \mathrm{T}\, X,$$

dan is $H_x = H \cap \mathrm{T}_x\, X$, voor iedere $x \in X$. Het gegeven kan dus alternatief beschreven worden als een deelverzameling H van de raakbundel $\mathrm{T}\, X$, met de eigenschap dat, voor iedere $x \in X$, $H_x := H \cap \mathrm{T}_x\, X$ een d-dimensionale lineaire deelruimte is van $\mathrm{T}_x\, X$. Zo een H heet een *d-dimensionale deelvectorbundel van de raakbundel*.

Een d-dimensionale differentieerbare deelvariëteit S van X heet een *integraalvariëteit* van H, als voor iedere $s \in S$ geldt dat $\mathrm{T}_s\, S = H_s$. Anders gezegd, als $\mathrm{T}\, S \subset H$, waarbij de raakbundel van S op de gebruikelijke manier als deelverzameling van $\mathrm{T}\, X$ is opgevat. De deelvectorbundel H heet *integreerbaar*, als er bij iedere $x \in X$ een integraalvariëteit S van H is die door het punt x gaat, dat wil zeggen waarvoor $x \in S$.

Bij het onderzoek naar de integreerbaarheid van H zullen we de aanname maken dat $x \mapsto H_x$ een C^k-functie van $x \in X$ is, met $k \geq 1$. Een manier om dat uit te drukken is, dat we zullen eisen dat H een C^k-deelvariëteit van $\mathrm{T}\, X$ is. De hieronder volgende lokale beschrijving zal laten zien dat dan de dimensie van H gelijk moet zijn aan $n + d$.

Lokale coördinaten om een punt p in X gebruikend, mogen we aannemen dat X een open deelverzameling is van $\mathbf{R}^n$. De n-dimensionale variëteit

$$X \times \{0\} \subset X \times \mathbf{R}^n = \mathrm{T}\, X$$

is bevat in H, dus $\dim H \geq n$. Zij c de codimensie van H in $\mathrm{T}\, X$. In het vervolg noteren we de oorsprong in $\mathbf{R}^m$ met 0_m. De lokale standaardvorm voor deelvariëteiten uit Stelling 2.6.1 laat zien dat, na eventueel omnummeren van de coördinaten, er een open omgeving U van $(p,\, 0_n)$ in $\mathrm{T}\, X$ is, een open omgeving V van $(p,\, 0_{n-c})$ in $X \times \mathbf{R}^{n-c}$ en een C^k-afbeelding g van V naar $\mathbf{R}^c$, met de eigenschap dat

$$H \cap U = \{(x,\, \eta,\, g(x,\, \eta)) \in \mathbf{R}^{2n} \mid (x,\, \eta) \in V\}.$$

Merk op dat als $(x,\, 0_n) \in U$, dan is $(x,\, 0_n) \in H$, dus $g(x,\, 0_{n-c}) = 0_c$. Door inperking van V, respectievelijk X, mogen we aannemen dat $V = X \times Y$, met Y een open deelverzameling van $\mathbf{R}^{n-c}$.

De doorsnede $H_x \cap U$ van $H \cap U$ met $\mathrm{T}_x\, X = \{x\} \times \mathbf{R}^n \simeq \mathbf{R}^n$ is gelijk aan

$$\{(\eta,\, g(x,\, \eta)) \in \mathbf{R}^n \mid \eta \in Y\}.$$

Nu is H_x een d-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbf{R}^n$; we zien daarom dat $n - c = \dim Y = d$ en dat

$$G(x) : \eta \mapsto g(x,\, \eta)$$

een lineaire afbeelding is van $\mathbf{R}^d$ naar $\mathbf{R}^c$. Omdat $g \in \mathrm{C}^k$, zijn de matrixcoëfficiënten $G_{ij}(x)$ C^k-functies van x.

De conclusie is dat de aanname, dat H een C^k-deelvariëteit is van $\mathrm{T}\, X$, equivalent is met de aanname dat in geschikte lokale coördinaten de H_x bestaan uit de $(\eta,\, \zeta) \in \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^c$, waarvoor

$$\zeta_i = \sum_{j=1}^{d} G_{ij}(x)\, \eta_j, \quad 1 \leq i \leq c, \tag{4.8.1}$$

waarin de $G_{ij}(x)$, voor $1 \leq i \leq c$, $1 \leq j \leq d$, C^k-functies van x zijn.

In het bovenstaande hebben we Griekse letters gebruikt voor de coördinaten van de raakvectoren $\xi = (\eta,\, \zeta) \in \mathbf{R}^n$. Met de corresponderende splitsing $x = (y,\, z) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^c$, zien we dat lokaal een integraalvariëteit S van de vorm

$$S = \{(y,\, f(y)) \mid y \in W\}$$

is, voor een differentieerbare afbeelding f, van een open deelverzameling W van $\mathbf{R}^d$ naar $\mathbf{R}^c$. De raakruimte aan S in het punt $s = (y,\, f(y))$ is gelijk aan

$$\mathrm{T}_s\, S = \{(\eta,\, \zeta) \in \mathbf{R}^n \mid \zeta = \mathrm{D}\, f(y) \cdot \eta\},$$

dus de voorwaarde dat $\mathrm{T}_s\, S = H_s$ betekent dat

$$\tfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(y) = G_{ij}(y,\, f(y)), \quad 1 \leq i \leq c, \; 1 \leq j \leq d. \tag{4.8.2}$$

Het differentiaalmeetkundige probleem is daarmee equivalent met een stelsel partiële differentiaalvergelijkingen in $\mathbf{R}^d$ van de vorm (4.8.2). Zo'n stelsel heet een *totaal stelsel van partiële differentiaalvergelijkingen*, omdat de totale afgeleidenmatrix $\mathrm{D}\, f(y)$ van f in ieder punt y voorgeschreven wordt als functie van $f(y)$.

Toepassing: met inductie naar l zien we dat $\mathrm{D}\, f \in C^l$ voor alle $0 \leq l \leq k$. Een differentieerbare oplossing f van (4.8.2) is dus automatisch van de klasse C^{k+1}. Dit betekent dat iedere integraalvariëteit S van H automatisch een C^{k+1}-deelvariëteit van X is.

Voor $d = 1$ is (4.8.2) een stelsel van gewone differentiaalvergelijkingen, waarvoor een lokale existentiestelling beschikbaar is. Voor $d > 1$ is dit echter een nieuw probleem, dat we hieronder met differentiaalmeetkundige middelen zullen gaan oplossen.

We zeggen dat een vectorveld v, gedefinieerd in een open deelverzameling U van X, *in H ligt*, als $v(x) \in H_x$ voor iedere $x \in U$. In formule: als $v(U) \subset H$. We zijn nu klaar voor de formulering van de volgende *stelling van Frobenius*.

Stelling 4.8.1 *Zij H een d-dimensionale C^k-deelvectorbundel van $\mathrm{T}\, X$. Dan zijn de volgende uitspraken a)-c) equivalent.*

a) H is integreerbaar.

b) Liggen de C^1-vectorvelden u en v in H, dan ligt $[u,\, v]$ in H.

c) Bij iedere $a \in X$ is er een lokale C^k-coördinatisering κ in een open omgeving U van a in X, waarvoor

$$\mathrm{D}\, \kappa(x)(H_x) = \mathbf{R}^d \times \{0_{n-d}\} \text{ voor iedere } x \in U.$$

Bewijs a) $\Rightarrow$ b). Stel dat H integreerbaar is en dat $u, v \in \mathcal{V}^1(U)$ in H liggen. Voor iedere $x \in U$ is er een integraalvariëteit S van H met $x \in S$. We hebben al eerder in deze paragraaf opgemerkt dat S een C^{k+1}-deelvariëteit van X is. Voor iedere $s \in U \cap S$ is $u(s) \in H_s = \mathrm{T}_s\, S$, dus

$$\tilde{u} := u|_{U \cap S} \in \mathcal{V}^1(U \cap S).$$

Hierin is $U \cap S$ opgevat als open deelverzameling van de d-dimensionale variëteit S. Op dezelfde manier is de beperking $\tilde{v}$ van v tot $U \cap S$ een C^1-vectorveld in $U \cap S$.

De identiteit id, beschouwd als afbeelding van $U \cap S$ naar U, conjugeert $\tilde{u}$ met u en $\tilde{v}$ met v. Vanwege Stelling 4.7.2 conjugeert id dan ook $[\tilde{u},\, \tilde{v}]$ met $[u,\, v]$, hetgeen impliceert dat $[u,\, v](x) \in \mathrm{T}_x\, S = H_x$.

b) $\Rightarrow$ c). Stel dat b) geldt. We bewijzen eerst dat er bij iedere $a \in X$ een open omgeving U van a in X is en daarin C^k-vectorvelden v_i, $1 \leq i \leq d$, met de volgende eigenschappen.

$$\begin{aligned}
&v_i(U) \subset H \text{ voor iedere } 1 \leq i \leq d.\\
&\text{Voor iedere } x \in U \text{ is } v_1(x), \ldots, v_d(x) \text{ een basis van } H_x.\\
&[v_i,\, v_j] = 0 \text{ voor alle } 1 \leq i, j \leq d.
\end{aligned}$$

Uit de lokale beschrijving (4.8.1) van H zien we, dat er bij iedere $a \in X$ een open omgeving U van a in X is en een C^ω-afbeelding π van U naar $\mathbf{R}^d$, met de eigenschap dat, voor iedere $x \in U$, de beperking β_x van $\mathrm{T}_x\, \pi$ tot H_x een bijectieve lineaire afbeelding is van H_x naar $\mathrm{T}_{\pi(x)}\, \mathbf{R}^d \simeq \mathbf{R}^d$. Verder definieert, voor ieder C^k-vectorveld w in $\mathbf{R}^d$,

$$(w_H)(x) := {\beta_x}^{-1} w(\pi(x)), \quad x \in U,$$

een C^k-vectorveld $v = w_H$ in U. Er geldt dat v in H ligt en dat π het vectorveld v met w conjugeert; deze eigenschappen leggen v eenduidig vast.

Zij nu, voor $1 \leq i \leq d$, e_i het vectorveld in $\mathbf{R}^d$ dat constant gelijk is aan de i-de standaardbasis vector in $\mathbf{R}^d$ en zij $v_i := e_{i,\,H}$. Dan is $v_i \in \mathcal{V}^k(U)$ en v_i ligt in H.

Verder, als er een lineaire afhankelijkheidsrelatie

$$\sum_{i=1}^{d} c_i\, v_i(x) = 0$$

geldt, dan levert toepassing van $\mathrm{T}_x\, \pi$ dat $\sum_i c_i\, e_i = 0$, dus $c_i = 0$ voor alle i, dit bewijst dat de $v_i(x)$ lineair onafhankelijk zijn. Omdat $\dim H_x = d$, vormen de $v_i(x)$ een basis van H_x.

Tenslotte, π conjugeert v_i met e_i, dus vanwege Stelling 4.7.2 ook $[v_i,\, v_j]$ met $[e_i,\, e_j] = 0$. Als b) geldt dan ligt $[v_i,\, v_j]$ in H, de conclusie is dat $[v_i,\, v_j] = [e_i,\, e_j]_H = 0$.

We bewijzen nu c). Zij $c = n - d$ en C een c-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathrm{T}_a\, X$, die complementair is aan H_a. Zij $\mathcal{C}$ een c-dimensionale C^ω-deelvariëteit van X met $a \in \mathcal{C}$ en $\mathrm{T}_a\, \mathcal{C} = C$, de existentie hiervan is geen probleem. Er is een open omgeving T van 0_d in $\mathbf{R}^d$ en een open omgeving A van a in $\mathcal{C}$, waarvoor

$$\varphi : ((t_1, \ldots,\, t_d),\, x) \mapsto e^{t_d\, v_d} \circ \ldots e^{t_1\, v_1}(x) \tag{4.8.3}$$

een C^k-afbeelding definieert van $T \times A$ naar X.

Merk op dat $\varphi(0_d,\, a) = a$. Verder is

$$\tfrac{\partial \varphi}{\partial t_i}(0_d,\, a) = v_i(a), \;\; 1 \leq i \leq d,$$

terwijl de overige partiële afgeleiden in het punt $(0_d,\, a)$ de identiteit van $\mathrm{T}_a\, \mathcal{C} = C$ naar $\mathrm{T}_a\, X$ opleveren. Dit laat zien dat $\mathrm{T}_{(0_d,\, a)}\, \varphi$ surjectief is van de $d + c = n$-dimensionale lineaire ruimte $\mathbf{R}^d \times C$ naar de n-dimensionale lineaire ruimte $\mathrm{T}_a\, X$. Daarmee is $\mathrm{T}_{(0_d,\, a)}\, \varphi$ bijectief; vanwege de inverse-afbeelding-stelling is φ een C^k-diffeomorfisme naar een open deelverzameling U_0 van a in X, als we de omgevingen T en A voldoende klein nemen.

Omdat $[v, v_j] = 0$ commuteren alle stromingen $e^{t_i\, v_i}$, zie Stelling 4.7.1. Dit betekent dat we in (4.8.3) de i-de stroming $e^{t_i\, v_i}$ voorop kunnen zetten, dat wil zeggen als laatste uitvoeren. Het volgt dan uit de definitie van $e^{t\, v_i}$, dat

$$\tfrac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t,\, x) = v_i(\varphi(t,\, x))$$

voor iedere $1 \leq i \leq n$. Maar dit betekent dat $\mathrm{T}_{(t,\, x)}\, \varphi$ de horizontale ruimte $\mathbf{R}^d \times \{0\}$ afbeeldt op $H_{\varphi(t,\, x)}$. Nemen we voor κ de inverse van φ en identificeren we A met een open deelverzameling van $\mathbf{R}^c$ met behulp van een lokale kaart, dan heeft κ de in c) genoemde eigenschappen.

c) $\Rightarrow$ a) is evident. $\square$

Zij H integreerbaar. Dan hebben we lokale coördinaten als in c), waarbij mogen nemen $V_\kappa = Y \times Z$ met Y, resp. Z een samenhangende open deelverzameling van $\mathbf{R}^d$, resp. $\mathbf{R}^c$. De samenhangende integraalvariëteiten zijn dan de verzamelingen van de vorm

$$Y \times \{z\} = \{(y,\, z) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^c \mid y \in Y\},$$

één voor iedere $z \in Z$.

Dit is de lokale structuur. In de globale theorie definieert men een *blad* als een maximale samenhangende integraalvariëteit van H. De punten p en q in X liggen in hetzelfde blad, dan en slechts dan als er een differentieerbare kromme γ in X is, met $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ en

$$\gamma'(t) \in H_{\gamma(t)}$$

voor alle $t \in [a, b]$. Voor het bewijs hiervan gebruikt men de lokale standaardvorm c) voor de integreerbare bundel H.

De opdeling van X in bladen heet de *bladering* met raakbundel H. Net als bij oplossingen van gewone differentiaalvergelijkingen kunnen bladen op ingewikkelde wijze oneindig vaak bij een gegeven punt terugkomen, we gaan hier niet verder op in.

Opmerking 4.8.1 Voor $v \in \mathrm{T}_x X$ is de uitspraak $v \in H_x$ equivalent met de uitspraak dat het element $v + H_x$ gelijk is aan het nul-element in de lineaire ruimte $\mathrm{T}_x X/H_x$. De obstructie tegen integreerbaarheid van H is daarmee het eventueel ongelijk aan nul zijn van

$$[u, v](x) + H_x \in \mathrm{T}_x X/H_x$$

voor differentieerbare vectorvelden u en v die in H liggen. De opmerking is nu dat, hoewel $[u, v](x)$ in het algemeen niet alleen afhangt van $u(x)$ en $v(x)$, maar ook van de eerste orde afgeleiden van u en v in het punt x, er een ééduidig bepaalde afbeelding

$$S_x : H_x \times H_x \to \mathrm{T}_x X/H_x$$

is, met de eigenschap dat

$$[u, v](x) + H_x = S_x(u(x), v(x)),$$

voor ieder paar van C^1-vectorvelden u en v dat in H ligt.

Dit kan bijvoorbeeld als volgt ingezien worden. Kies lokaal C^k-vectorvelden e_i die in ieder punt x een basis van H_x vormen. Als de C^1-vectorvelden $\tilde{u}$, resp. $\tilde{v}$ in H liggen en in het punt x gelijk zijn aan $u(x)$, resp. $v(x)$, dan kunnen we schrijven

$$\tilde{u} = u + \sum_{i=1}^{d} f_i \cdot e_i, \;\; ; \;\; \tilde{v} = v + \sum_{j=1}^{d} g_j \cdot e_j.$$

Hierin zijn f_i en g_j C^1-functies, $f_i(x) = 0$, $g_j(x) = 0$. Dit substuerend in $[\tilde{u}, \tilde{v}](x)$ en uitwerkend met behulp van (4.7.11), krijgen we dat

$$[\tilde{u}, \tilde{v}](x) - [u, v](x) \in H_x.$$

De afbeelding S_x is bilineair en antisymmetrisch, dit volgt uit de corresponderende eigenschappen van het Lie-haakje. H is integreerbaar, dan en slechts dan als $S_x = 0$ voor alle $x \in X$.

Tenslotte, H is integreerbaar, dan en slechts dan als er bij iedere $a \in X$ een d-tal C^1-vectorvelden e_i in een open omgeving U te vinden zijn, met de volgende eigenschappen.

$$e_i(U) \subset H \;\text{ voor iedere }\; 1 \le i \le d.$$
$$e_1(a), \dots, e_d(a) \;\text{ is een basis van }\; H_a.$$
$$[e_i, e_j](U) \subset H \;\text{ voor alle }\; 1 \le i, j \le d.$$

Immers, is dit het geval, dan volgt uit de continuïteit van de vectorvelden al dat voor alle x in een open omgeving van a de vectoren $v_i(x)$ lineair onafhankelijk zijn, dus een basis van H_x vormen. Verder geeft de laatste eigenschap dat

$$S_x(e_i(x),\, e_j(x)) = 0.$$

Als nu $u, v \in \mathrm{T}_x X$, dan is

$$u = \sum_{i=1}^{d} u_i \cdot e_i, \quad v = \sum_{j=1}^{d} v_j \cdot e_j,$$

voor eenduidig bepaalde $u_i, v_j \in \mathbf{R}$. De bilineariteit van S_x gebruikend, krijgen we

$$S_x(u,\, v) = \sum_{i,j=1}^{d} u_i \cdot v_j \cdot S_x(e_i(x),\, e_j(x)) = 0.$$

$\oslash$

4.9 Opgaven

4.9.1 Bewijs dat de cirkel een triviale raakbundel heeft. Bewijs dat het Cartesische product van twee paralleliseerbare variëteiten paralleliseerbaar is. Bewijs dat de n-dimensionale torus een triviale raakbundel heeft.

4.9.2 Bewijs dat er een analytisch vectorveld v in de twee-dimensionale sfeer is, zodanig dat het vectorveld $v_-(y)$ in $\mathbf{R}^2$, verkregen door stereografische projectie vanuit $-e_3$, constant gelijk is aan e_2. Bereken $v_+(x)$ en de index hiervan over een cirkel om de oorsprong. Bereken de stroming van v_+ en maak een schets van de banen.

4.9.3 a) Zij $A \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n,\, \mathbf{R}^n)$, een $n \times n$-matrix. Bewijs dat

$$L(t) = e^{t\,A}(L) \in \mathrm{P}_{n-1}(\mathbf{R}) \text{ als } \ L \in \mathrm{P}_{n-1}(\mathbf{R}^n),$$

dat $t \mapsto L(t)$ een differentieerbare kromme is in $\mathrm{P}_{n-1}(\mathbf{R})$ en bereken de afgeleide hiervan in $t = 0$ in projectieve coördinaten, als in Voorbeeld 2.4.2. (Bijvoorbeeld, in de coördinaten $x_i = y_i/y_n$, $1 \leq i \leq n-1$, als y_j de coördinaten van $\mathbf{R}^n$ voorstellen.) Bewijs dat de actie van $e^{t\,A}$ op $\mathrm{P}_{n-1}(\mathbf{R})$ gelijk is aan de stroming van een reëel-analytisch vectorveld v in $\mathrm{P}_{n-1}(\mathbf{R})$. Bewijs dat L een rustpunt is van de stroming in $\mathrm{P}_{n-1}(\mathbf{R})$, dan en slechts dan als iedere $e \in L$, $e \neq 0$, een eigenvector is voor A, behorend bij een reële eigenwaarde.

b) Zij nu gegeven de coëfficiënten p_j, q_{ij} en r_i, voor $1 \leq i,\, j \leq n-1$. Bewijs dat het vectorveld $f : \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^{n-1}$, gegeven door

$$f_i(x) = x_i \sum_{j=1}^{n-1} p_j\, x_j + \sum_{j=1}^{n-1} q_{ij}\, x_j + r_i, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

gelijk is aan v_{κ_n} als boven, voor een geschikte keuze van de matrix A. Bereken de stroming van $\frac{dx}{dt} = f(x)$, in termen van $e^{t\,A}$. Bewijs dat geen oplossingen in $\mathbf{R}^{n-1}$ van $\frac{dx}{dt} = f(x)$ in een eindige tijd onbegrensd worden, dan en slechts dan als $p_j = 0$ voor alle $1 \leq j \leq n-1$.

c) Bespreek de *Riccati-vergelijking*

$$\frac{dx}{dt} = p\,x^2 + q\,x + r$$

als differentiaalvergelijking in de projectieve lijn, afkomstig van een lineair stelsel in het vlak. Voor welke p, q, r correspondeert dit met de draaiingen in het vlak?

4.9.4 Bespreek de generalisatie van Opgave 4.9.3 naar $\mathrm{G}_{d,\,n}$.

4.9.5 Zij H een C^k-deelvariëteit van X van codimensie 1 en zij v een C^k-vectorveld in X, met de eigenschap dat $v(x) \notin \mathrm{T}_x\,H$ voor iedere $x \in H$. Verder is $k \geq 1$. Bewijs:

De verzameling A der $(t,\,x) \in \mathbf{R} \times H$, waarvoor x in het definitiegebied ligt van de stroming e^{tv} na tijd t, is een open deelverzameling van $\mathbf{R} \times H$. De afbeelding $\varphi : (t,\,x) \mapsto e^{tv}(x)$ is een C^k-afbeelding van A naar X. Er is een open deelverzameling B van A is, waarvoor $\{0\} \times H \subset B$ en waarvoor φ een lokaal C^k-diffeomorfisme is van B naar een open deelverzameling U van X.

4.9.6 Zij v een C^k-vectorveld in X is, $p \in X$, $v(p) \neq 0$. Bewijs dat er een C^k-kaart κ in een open omgeving X_κ van p in X is, met de eigenschap dat v_κ in V_κ constant gelijk is aan de eerste basisvector in $\mathbf{R}^n$

4.9.7 Zij X een gesloten C^1-deelvariëteit van Y en zij w een C^1-vectorveld in Y, met de eigenschap dat $w(x) \in \mathrm{T}_x\,X$ voor iedere $x \in X$. Bewijs dat de w-stroming de variëteit X invariant laat, in volgende zin. Als $\gamma : I \to Y$ een oplossing is van $\frac{dy}{dt} = w(y)$ en $\gamma(t_0) \in X$ voor een $t_0 \in I$, dan is $\gamma(t) \in X$ voor alle $t \in I$.

4.9.8 Zij X een n-dimensionale reëel-analytische variëteit. Zij f een propere C^k-afbeelding van X naar $\mathbf{R}$. Zij tenslotte $v \in \mathcal{V}^k(X)$, $k \geq 1$, en neem aan dat $\mathrm{d}_v f = 1$. Bewijs:

a) Voor iedere $c \in I$ is de verzameling

$$X(c) := \{x \in X \mid f(x) = c\}$$

een $n-1$-dimensionale, compacte C^k-deelvariëteit van X.

b) Voor iedere $t \in \mathbf{R}$ is het definitiegebied van de stroming $e^{t\,v}$ van v over tijd t gelijk aan de gehele variëteit X.

c) Als $c, t \in \mathbf{R}$, dan definieert $e^{t\,v}$ een C^k-diffeomorfisme van $X(c)$ naar $X(c+t)$.

d) De afbeelding

$$\Phi : (t,\,x) \mapsto e^{t\,v}(x)$$

definieert een C^k-diffeomorfisme van $\mathbf{R} \times X(0)$ naar X. Hiervoor is $\Phi^* f$ gelijk aan de functie $\pi_1 : (t,\,x) \mapsto t$. $\Phi^*(v)$ is het vectorveld e_1, dat in ieder punt $(t,\,x) \in \mathbf{R} \times X(0)$ gelijk is aan $(1,\,0) \in \mathbf{R} \times \mathrm{T}_x\,X(0)$.

4.9.9 Zij u, v C^2-vectorvelden in een open omgeving van x in $\mathbf{R}^n$. Bewijs dat

$$\lim_{(t,\,s)\to(0,0)} \tfrac{1}{ts}[e^{t\,u}\circ e^{s\,v}\circ e^{-t\,u}\circ e^{-s\,v}(x)-x]=[u,\,v](x).$$

Deze uitspraak is sterker dan de formule voor de limiet voor $t\to 0$ van de limiet voor $s\to 0$ van de uitdrukking achter het limietteken. Hint voor het bewijs: begin met aan te tonen dat de uitdrukking tussen vierkante haken een C^2-functie is van $(t,\,s)\in\mathbf{R}^2$.

4.9.10 Zij $u\in\mathcal{V}^1(X)$, $a\in X$, $u(a)=0$. Bewijs dat er een eenduidig bepaalde lineaire afbeelding A van $\mathrm{T}_a\,X$ naar zichzelf is, met de eigenschap dat

$$\mathrm{T}_a\;e^{t\,u}=e^{t\,A}:\mathrm{T}_a\,X\to\mathrm{T}_a\,X$$

voor alle $t\in\mathbf{R}$. (Merk op dat $e^{t\,u}(a)=a$.) Bewijs ook dat in dit geval

$$[u,\,v](a)=A(v(a))$$

voor ieder C^1-vectorveld v in X. Laat zien dat in lokale coördinaten $A=\mathrm{D}\,u(a)$.

4.9.11 Stel A en B zijn lineaire afbeeldingen van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}^n$. Duiden we het vectorveld $x\mapsto(x,\,A(x))$ in $\mathbf{R}^n$ provisorisch aan met v_A, bewijs dan dat

$$[v_A,\,v_B]=v_{[A,\,B]}.$$

In het vervolg identificeren we men v_A met A. Bereken ook de Lie-haakjes van $A\in\mathrm{L}(\mathbf{R}^n,\,\mathbf{R}^n)$ met een willekeurig constant vectorveld c in $\mathbf{R}^n$. En van twee constante vectorvelden. Onderzoek de stroming van het vectorveld $A+c$ na tijd t. Schrijf dit als samenstelling van een lineaire transformatie en een translatie, in ieder van de twee volgordes.

4.9.12 Zij v_i een bewegend raamwerk in X. Bewijs dat $[v_i,\,v_j]=0$ voor alle i,j, dan en slechts dan als v_i lokaal gelijk is aan het bewegend raamwerk van de trivialisering τ_κ, voor een lokale coördinatisering κ.

4.9.13 Beschouw een deelvectorbundel H in $\mathbf{R}^n$ van de vorm (4.8.1). We noteren $x=(y,\,z)$, met $y\in\mathbf{R}^d$, $z\in\mathbf{R}^c$. Bewijs dat H integreerbaar is, dan en slechts dan als

$$\tfrac{\partial G_{ij}}{\partial y_k}+\sum_{l=1}^{c}\tfrac{\partial G_{ij}}{\partial z_l}\,G_{lk}=\tfrac{\partial G_{ik}}{\partial y_j}+\sum_{l=1}^{c}\tfrac{\partial G_{ik}}{\partial z_l}\,G_{lj}$$

voor alle $1\le i\le c$ en $1\le j,k\le d$.

4.9.14 Beschouw in $\mathbf{R}^3$ de twee-dimensionale deelvectorbundel H gegeven door

$$\xi_3=-x_2\xi_1+x_1\xi_2.$$

Is H integreerbaar?

Zij π de projectie op de eerste twee variabelen. Bereken het vectorveld w_H bij het vectorveld $w(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ en bereken de oplossingen van $\frac{dx}{dt} = w_H(x)$. Wat is de limiet van de banen van oplossingen waarvoor $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, $(x_1, x_2) \to (0, 0)$? Beargumenteer dat er geen tweedimensionale differentieerbare variëteit door de oorsprong is die invariant is onder de w_H-stroming.

4.9.15 Lagrange introduceerde zijn *methode van variatie van constanten* in de volgende algemene vorm. Zij v een vectorveld in de variëteit X en veronderstel dat $(t, y) \mapsto \Phi_t(y)$ een differentieerbare afbeelding is van een open deelverzameling U van $\mathbf{R} \times Y$ naar X, met de eigenschap dat:

(i) voor iedere y is $x(t) = \Phi_t(y)$ een oplossing van $\frac{dx}{dt} = v(x)$ en

(ii) voor iedere t is $y \mapsto \Phi_t(y)$ een diffeomorfisme van een open deelverzameling van de variëteit Y.

Lagrange dacht bij y aan de "vrije constanten" waar de algemene oplossing van $\frac{dx}{dt} = v(x)$ nog van afhangt. Hij merkt ook op dat een speciaal geval optreedt als we de oplossingen parametriseren met de beginwaarden. Dat wil zeggen, als we nemen $\Phi_t = e^{t\,v}$.

Zij nu w een tweede vectorveld in X. Ga na dat bij de substitutie

$$x(t) = \Phi_t(y(t))$$

de functie $x(t)$ oplossing is van het "gestoorde stelsel"

$$\frac{dx}{dt} = v(x) + w(x),$$

dan en slechts dan als $y(t)$ oplossing is van het tijdsafhankelijke stelsel

$$\frac{dy}{dt} = \tilde{w}(t, y),$$

waarin

$$\tilde{w}(t, y) := ((\Phi_t)^* w)(y).$$

Een geval van kleine storingen treedt op als we $w(x)$ op de volgende manier van een kleine parameter ε laten afhangen:

$$w(x) = w(x, \varepsilon) = \varepsilon W(x) + O(\varepsilon^2), \;\; \varepsilon \to 0.$$

Alle functies worden continu differentieerbaar verondersteld. Toon aan dat, in lokale coördinaten,

$$y(t) = y(0) + \varepsilon \int_0^t \tilde{W}(s, y(0))\, ds + O(\varepsilon^2),$$

uniform voor t op een begrensd interval. Ook deze toepassing, de zogenaamde *middelingsmethode* uit de storingsrekening, is van Lagrange afkomstig.

Hoofdstuk 5

Differentiaalvormen

We behandelen nu de elegante theorie van differentiaalvormen, die omstreeks 1900 door Élie Cartan werd ontwikkeld, zie [4]. Dit is een uitbreiding van de klassieke theorie van differentiaalvormen van de graad 1, waarmee we ter inleiding beginnen.

5.1 De Vergelijking $\mathrm{d}f = g$

Bij (3.2.5) is al opgemerkt, dat als f een differentieerbare functie in de n-dimensionale variëteit X is, dan is, voor iedere $x \in X$, $\mathrm{d}f(x)$ een lineaire vorm in $\mathrm{T}_x X$, ook wel een coraakvector genoemd. Anders gezegd, $\mathrm{d}f(x) \in (\mathrm{T}_x X)^*$, de duale ruimte van de raakruimte $\mathrm{T}_x X$, ofwel de coraakruimte aan X in het punt x.

De disjuncte vereniging

$$\mathrm{T}^* X := \{(x, \xi) \mid x \in X,\ \xi \in (\mathrm{T}_x X)^*\}$$

van de $(\mathrm{T}_x X)^*$ heet de *coraakbundel* van X. De afbeelding $\pi : \mathrm{T}^* X \to X$, die aan $(x, \xi) \in \mathrm{T}^* X$ het basispunt x toevoegt, heet de *projectie naar de basis*, de vezel $\pi^{-1}(\{x\})$ is gelijk aan $(\mathrm{T}_x X)^*$.

Is κ een kaart voor X dan is

$$\tilde{\kappa} : (x, \xi) \mapsto (\kappa(x),\ \xi \circ \mathrm{D}\,\kappa(x)^{-1}) : \pi^{-1}(X_\kappa) \to V_\kappa \times \mathbf{R}^n$$

een kaart voor $\mathrm{T}^* X$, de *geïnduceerde kaart voor* $\mathrm{T}^* X$ genaamd. Merk op dat samenstelling van

$$\mathrm{D}\,\kappa(x)^{-1} \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n,\ \mathrm{T}_x X)$$

met $\xi \in \mathrm{L}(\mathrm{T}_x X, \mathbf{R})$ een lineaire vorm in $\mathbf{R}^n$ oplevert, die we op de gebruikelijke manier met een element van $\mathbf{R}^n$ identificeren.

De geïnduceerde kaarten vormen een atlas voor $\mathrm{T}^* X$, waarmee $\mathrm{T}^* X$ een $2n$-dimensionale C^{k-1}-variëteit wordt als X een n-dimensionale C^k-variëteit is. Als we aannemen dat X reëel-analytisch is, zoals we mogen doen zonder de algemeenheid te schaden, zie Opmerking 2.4.1, dan is ook $\mathrm{T}^* X$ een reëel-analytische variëteit.

Een differentiaalvorm (van de graad 1) in X is nu een afbeelding g, die aan iedere $x \in X$ een lineaire vorm $g(x)$ in $\mathrm{T}_x X$ toevoegt. Men interpreteert voor iedere $v \in \mathrm{T}_x X$ het reële getal $g(x) \cdot v = g(x)(v)$ als de "toename van de grootheid g bij de infinitesimale verplaatsing v vanuit het punt x". In formule: g is een afbeelding van X naar $\mathrm{T}^* X$, waarvoor $\pi \circ g = \mathrm{id}$, de identiteit in X.

Nu we $\mathrm{T}^* X$ van een variëteitsstructuur hebben voorzien, kunnen we g een C^k-differentiaalvorm noemen als $g \in \mathrm{C}^k(X, \mathrm{T}^* X)$. Equivalent kan men g beschouwen als een reëelwaardige functie in $\mathrm{T} X$, waarvan de beperking tot ieder vezel $\mathrm{T}_x X$ een lineaire vorm is; er geldt dat g een C^k-differentiaalvorm is, dan en slechts dan als $g \in \mathrm{C}^k(\mathrm{T} X)$.

Voor een kaart κ is

$$\tilde{\kappa} \circ g \circ \kappa^{-1} : x \mapsto (x,\, g_\kappa(x))$$

voor een afbeelding $g_\kappa : V_\kappa \to \mathbf{R}^n$; deze is voor iedere κ van de klasse C^k, dan en slechts dan als $g \in \mathrm{C}^k$. Als λ een andere kaart is en $\varphi = \lambda \circ \kappa^{-1}$ is de bijbehorende lokale coördinatentransformatie, dan is

$$g_\lambda(\kappa(x)) = g_\kappa(x) \cdot \mathrm{D}\,\varphi(x)^{-1}.$$

In de terminologie van (3.2.8): *differentiaalvormen transformeren covariant.* Naar analogie met vectorvelden zou men een differentiaalvorm een covectorveld kunnen noemen, maar deze terminologie is niet gebruikelijk.

De opmerking waar we mee startten was, dat voor iedere differentieerbare functie f in X de afbeelding $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ een differentiaalvorm is in X, deze is van de klasse C^k, als $f \in \mathrm{C}^{k+1}(X)$. We onderzoeken nu de vraag voor welke differentiaalvormen g in X er een differentieerbare functie f in X is, waarvoor $\mathrm{d}f = g$. Voordat we in Stelling 5.1.2 een lokale analyse hiervan geven, voeren we eerst nog wat nuttige notaties in, vergezeld van enige voor de hand liggende opmerkingen.

Voor het lokale probleem mogen we aannemen dat X een open deelverzameling is van $\mathbf{R}^n$. In dat geval noteert men de functie

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i : X \to \mathbf{R}$$

ook met x_i, zodat de differentiaalvorm $\mathrm{d}x_i$ constant gelijk is aan de i-de standaardbasisvector e_i in $\mathbf{R}^n$. Dit maakt dat we een willekeurige differentiaalvorm $g : X \to \mathbf{R}^n$ in X, met de coördinaatfuncties $g_i : X \to \mathbf{R}$, kunnen schrijven als

$$g(x) = g_1(x)\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + g_n(x)\,\mathrm{d}x_n. \tag{5.1.1}$$

Deze klassieke notatie dient om aan te geven dat $g : X \to \mathbf{R}^n$ nu als differentiaalvorm wordt opgevat en bijvoorbeeld niet als vectorveld. (In dat geval zou men $g = \sum g_i\, \partial/\partial x_i$ hebben geschreven, zie (4.5.1).) Met deze notatie is

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i. \tag{5.1.2}$$

De vergelijking $\mathrm{d}f = g$ betekent dat

$$\tfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} = g_i(x), \quad 1 \le i \le n,\ x \in X, \tag{5.1.3}$$

een totaal stelsel partiële differentiaalvergelijkingen voor de reëelwaardige functie f, met een rechterlid dat niet ook nog van $f(x)$ afhangt. Uit (5.1.3) lezen we meteen af, dat als f een differentieerbare oplossing is van $\mathrm{d}f = g$ en $g \in \mathrm{C}^k$, dan is $f \in \mathrm{C}^{k+1}$.

Is Φ een differentieerbare afbeelding van de variëteit X naar de variëteit Y, dan definieert men voor iedere differentiaalvorm h in Y de differentiaalvorm $\Phi^* h$ in X door

$$(\Phi^* h)(x) := h(\Phi(x)) \circ \mathrm{T}_x\,\Phi,\ \ x \in X. \tag{5.1.4}$$

Men noemt $\Phi^* h$ de *door Φ teruggetrokken differentiaalvorm in X.*

Als men een differentiaalvorm ziet als een reëelwaardige functie in de raakbundel, die lineair is in iedere vezel, dan kunnen we ook schrijven

$$\Phi^* h = h \circ \mathrm{T}\,\Phi = (\mathrm{T}\,\Phi)^* h,$$

dus eigenlijk zou men $\Phi^* h$ de door $\mathrm{T}\,\Phi$ teruggetrokken differentiaalvorm moeten noemen. Het is duidelijk dat $\Phi^* h \in \mathrm{C}^k$ als $h \in \mathrm{C}^k$ en $\Phi \in \mathrm{C}^{k+1}$.

Is Ψ een differentieerbare afbeelding van Y naar een variëteit Z, dan geeft de kettingregel in de vorm (4.1.2) dat

$$(\Psi \circ \Phi)^* \omega = \omega \circ \mathrm{T}(\Psi \circ \Phi) = \omega \circ \mathrm{T}\,\Psi \circ \mathrm{T}\,\Phi = \Phi^*(\Psi^* \omega)$$

dat

$$(\Psi \circ \Phi)^* \omega = \Phi^* \circ \Psi^* \omega, \tag{5.1.5}$$

ofwel de compositieregel (4.6.3) geldt ook voor het terugtrekken van differentiaalvormen. Ook geeft de kettingregel $\mathrm{d}f \circ \mathrm{T}\,\Phi = \mathrm{d}(f \circ \Phi)$, dat

$$\Phi^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\Phi^* f) \tag{5.1.6}$$

voor iedere differentieerbare functie f in Y.

Is g een continue differentiaalvorm in X en $\gamma : [a,\, b] \to X$ een C^1-kromme in X, dan is $\gamma^* g$ een continue differentiaalvorm in $[a,\, b]$:

$$\gamma^* g = g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Men definieert nu de *integraal van g over de kromme* γ door

$$\int_\gamma g = \int_a^b \gamma^* g := \int_a^b g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt. \tag{5.1.7}$$

Merk op dat $\gamma^* g$ in een lokale kaart κ gelijk is aan

$$\gamma^* \circ \kappa^* \circ (\kappa^*)^{-1} g = (\kappa \circ \gamma)^* g_\kappa.$$

Is φ een C^1-afbeelding van het interval $[\alpha,\, \beta]$ naar $[a,\, b]$, met $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, dan geeft de klassieke formule voor substitutie van variabelen in een integraal, dat

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(s))\, \varphi'(s)\, ds$$

voor iedere continue functie f in $[a,\, b]$. Merk op dat hierin niet eens geëist is dat φ een diffeomorfisme is. Wèl is essentieel dat de randpunten naar de randpunten worden afgebeeld, in de goede volgorde. Voor een bewijs, zie bijv. Analyse A.

In termen van de differentiaalvorm $\tilde{f} = f(t)\, \mathrm{d}t$ in $[a,\, b]$ betekent dit dat

$$\int \tilde{f} = \int \varphi^* \tilde{f} = \int_\varphi \tilde{f},$$

waarbij we de identiteit als index in de integratie hebben weggelaten. In deze zin is integratie van differentiaalvormen in $\mathbf{R}$ *coördinaatinvariant.* Met het oog op

$$(\gamma \circ \varphi)^* g = \varphi^*(\gamma^* g)$$

leidt dit meteen tot de volgende conclusie:

Lemma 5.1.1 *De integraal van een differentiaalvorm over een kromme hangt niet af van de parametrisatie van de kromme in de zin dat*

$$\int_\gamma g = \int_{\gamma\circ\varphi} g$$

als g een continue differentiaalvorm is in X, $\gamma \in \mathrm{C}^1([a,\, b],\, X)$ en φ een C^1-afbeelding is van $[\alpha,\, \beta]$ naar $[a,\, b]$, waarvoor $\varphi(\alpha) = a$ en $\varphi(\beta) = b$.

Stelling 5.1.2 *Zij g een C^1-differentiaalvorm in X. Dan zijn de volgende uitspraken a)-c) equivalent.*

a) Bij iedere $a \in X$ is er een open omgeving U van a in X en een differentieerbare functie f in U, waarvoor $\mathrm{d}f = g$ in U.

b) Voor iedere kaart κ geldt dat

$$\tfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = \tfrac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad 1 \le i, j \le n,$$

als

$$g = \kappa^*(\sum_{i=1}^n g_i\, \mathrm{d}x_i) \;\text{ in }\; X_\kappa.$$

c) Bij iedere $a \in X$ is er een open omgeving U van a in X, met de eigenschap dat

$$\int_\gamma g = 0$$

voor iedere gesloten, continue en stuksgewijs C^1-kromme γ in U.

Is $\mathrm{d}f = g$, dan is

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_\gamma g$$

voor iedere C^1-kromme γ in X.

Bewijs a) $\Rightarrow$ b) Als in lokale coördinaten (5.1.3) geldt, dan is $f \in \mathrm{C}^2$. Voor C^2-functies f geldt dat $\partial_j\partial_i f = \partial_i\partial_j f$, invullen van $\partial_i f = g_i$ geeft b).

b) $\Rightarrow$ a) Door een verschuiving uit te voeren, mogen we aannemen dat $\kappa(a) = 0$, de voorwaarde b) blijft intact bij deze verschuiving. Definieer nu, in de lokale coördinaten,

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n g_i(t\,x)\, x_i\, dt,$$

hierin is het rechterlid gelijk aan de integraal van g over de kromme $\gamma_x : [0,\, 1] \to \mathbf{R}^n$, gedefinieerd door $\gamma_x(t) = t\,x$. Dan is

$$\partial_j f(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \partial_j g_i(t\,x)\, t\, x_i\, dt + \int_0^1 g_j(t\,x)\, dt.$$

Substitueren we b) onder het somteken en gebruiken we dat

$$\tfrac{d}{dt} g_j(t\,x) = \sum_{i=1}^n \partial_i g_j(t\,x)\,x_i,$$

dan krijgen we dat

$$\partial_j f(x) = \int_0^1 t\,\tfrac{d}{dt} g_j(t\,x)\,dt + \int_0^1 g_j(t\,x)\,dt = g_j(x),$$

waarbij de tweede identiteit volgt na partiële integratie.

Stel $\mathrm{d}f = g$ in U. Is γ een C^1-kromme in U, dan is

$$\int_\gamma g = \int \gamma^*(\mathrm{d}f) = \int \mathrm{d}(\gamma^* f) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Een gesloten, continue en stuksgewijs C^1-kromme γ in U bestaat uit eindig veel C^1-krommen $\gamma_m : [a_m,\, b_m] \to U$, $1 \leq m \leq m$, waarvoor

$$\begin{aligned}&\gamma_m(b_m) = \gamma_{m+1}(a_{m+1}), \quad 1 \leq m \leq l-1,\\ &\gamma_l(b_l) = \gamma_1(a_1).\end{aligned}$$

Dit geeft

$$\int_\gamma g = \sum_{m=1}^l \int_{\gamma_m} g = \sum_{m=1}^l f(\gamma(b_m)) - f(\gamma(a_m)) = 0$$

Hierin is de eerste identiteit de definitie van $\int_\gamma g$ en de laatste een gevolg van de aansluitingscondities in de randpunten. Dit bewijst a) $\Rightarrow$ c).

c) $\Rightarrow$ a) Veronderstel dat we in de situatie van c) verkeren, we mogen daarbij aannemen dat U een open bol in $\mathbf{R}^n$ om de oorsprong is. Voor $p, q \in U$, zij $pq : [0,\, 1] \to \mathbf{R}^n$ de rechte lijn van p naar q, gedefinieerd door

$$(pq)(t) = p + t\,(q-p), \quad t \in [0,\, 1].$$

Merk op dat $(pq)(t) \in U$ voor alle $t \in [0,\, 1]$. Definieer

$$f(x) = \int_{0x} g,$$

als in het bewijs van b) $\Rightarrow$ a). Voor $y \in U$ volgt uit c) dat

$$\int_{0y} g + \int_{yx} g + \int_{x0} g = 0.$$

Omdat $\int_{pq} g = -\int_{qp} g$, lezen we hieruit af dat

$$f(y) - f(x) = \int_{xy} g$$

Zij nu $y = x + h\,e_i$, met $h \in \mathbf{R}$ zó dicht bij 0, dat ook $y \in U$. Dan is

$$\int_{xy} g = h \int_0^1 g_i(x + t(y-x))\,dt,$$

waaruit we meteen aflezen dat

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}[f(x+he_i) - f(x)] = g_i(x).$$

□

5.2 De Uitwendige Afgeleide

De integreerbaarheidsvoorwaarde b), resp. c) in Stelling 5.1.2 is equivalent met het gelijk blijven van $\int_\gamma g$ onder kleine storingen van de kromme γ, waarbij we de begin- en eindpunten vasthouden.

In het algemeen, is T een variëteit dan wordt een *homotopie van* C^k*-afbeeldingen van* T *naar* X gedefinieerd als een afbeelding $\Gamma : S \times T \to X$, met de volgende eigenschappen.

a) S is een interval in $\mathbf{R}$.

b) Voor iedere $s \in S$ is $\gamma_s : t \mapsto \Gamma(s,\, t)$ een C^k-afbeelding van T naar X.

c) In lokale coördinaten in T en X zijn alle partiële afgeleiden van $\Gamma(s,\, t)$ naar t, tot en met de orde k, continue functies van $(s,\, t) \in S \times T$.

Men kan $s \mapsto \gamma_s : S \to \mathrm{C}^k(T,\, X)$ hierbij opvatten als een continue kromme in de ruimte $\mathrm{C}^k(T,\, X)$. Men zegt dat de C^k-afbeeldingen γ en $\tilde{\gamma}$ *homotoop* zijn, als er een homotopie $\Gamma : [s_0,\, s_1] \times T \to X$ is, waarvoor $\gamma = \gamma_{s_0}$ en $\tilde{\gamma} = \gamma_{s_1}$. Anders gezegd, als γ en $\tilde{\gamma}$ in dezelfde boogsamenhangscomponent van $\mathrm{C}^k(T,\, X)$ liggen. Men zegt dat de homotopie van de klasse C^l is, als c) ook geldt met Γ vervangen door alle partiële afgeleiden naar s, tot en met de orde l.

Stel nu dat Γ een C^1-homotopie is van C^1-krommen in X. Dit betekent dat, in lokale coördinaten, de coördinaatsfuncties f van Γ voldoen aan de voorwaarden voor f in Lemma 1.8.1. Ter vereenvoudiging van de notatie nemen we aan dat $S = [0,\, \sigma]$ en $T = [0,\, \tau]$, dus Γ is een afbeelding van de rechthoek $R := [0,\, \sigma] \times [0,\, \tau]$ naar X.

Als X een open deelverzameling in $\mathbf{R}^n$ is en g is een C^1-differentiaalvorm in X, dan krijgen we nu dat

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{ds}\int_{\gamma_s} g = \tfrac{d}{ds}\int_0^\tau g(\Gamma(s,\, t)) \cdot \partial_t\Gamma(s,\, t)\, dt \\
&= \int_0^\tau [\mathrm{D}\, g(\Gamma(s,\, t)) \cdot \partial_s\Gamma(s,\, t)] \cdot \partial_t\Gamma(s,\, t)\, dt + \int_0^\tau g(\Gamma(s,\, t)) \cdot \partial_s\partial_t\Gamma(s,\, t)\, dt.
\end{aligned}$$

In de tweede integraal substitueren we $\partial_s\partial_t\Gamma = \partial_t\partial_s\Gamma$ en passen een partiële integratie toe op de afgeleide naar t. Met de notatie

$$\mathrm{d}g(x)\,(u,\, v) := [\mathrm{D}\, g(x) \cdot u] \cdot v - [\mathrm{D}\, g(x) \cdot v] \cdot u, \quad u,\, v \in \mathbf{R}^n, \tag{5.2.1}$$

krijgen we dat

$$\tfrac{d}{ds}\int_{\gamma_s} g = \int_0^\tau \mathrm{d}g(\Gamma(s,\, t))\,(\partial_s\Gamma(s,\, t),\, \partial_t\Gamma(s,\, t))\, dt \tag{5.2.2}$$

$$+g(\Gamma(s,\, \tau)) \cdot \partial_s\Gamma(s,\, \tau) - g(\Gamma(s,\, 0)) \cdot \partial_s\Gamma(s,\, 0). \tag{5.2.3}$$

Het is duidelijk dat (5.2.1) een bilineaire functie in $u = \sum_i u_i\, e_i$ en $v = \sum_j v_j\, e_j$ definieert; uitwerken geeft dat

$$\mathrm{d}g(x)\,(u,\,v) = \sum_{i,j=1}^{n} u_i\, v_j\, [\partial_i g_j(x) - \partial_j g_i(x)].$$

Hieruit lezen we af dat de integreerbaarheidsvoorwaarde b) in Stelling 5.1.2 equivalent is met $\mathrm{d}g(x) = 0$ voor alle $x \in X$. Verder betekent de voorwaarde, dat bij de homotopie de begin- en eindpunten vastblijven, dat

$$\tfrac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,\,0) = 0, \quad \tfrac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,\,\tau) = 0$$

voor alle s. Is aan al deze voorwaarden voldaan, dan concluderen we uit (5.2.3), dat

$$\tfrac{d}{ds} \int_{\gamma_s} g = 0$$

voor alle s, dus de functie

$$s \mapsto \int_{\gamma_s} g : [0,\,\sigma] \to \mathbf{R}$$

is constant. In het bijzonder is de conclusie dat $\mathrm{d}g = 0$ impliceert dat $\int_\gamma g = \int_{\tilde{\gamma}} g$, als γ en $\tilde{\gamma}$ homotope krommen zijn, waarbij begin- en eindpunten gedurende de homotopie vastgehouden worden.

Eenzelfde conclusie kunnen we uit (5.2.3) trekken als we de voorwaarde, dat begin- en eindpunten vastgehouden worden, vervangen door de voorwaarde dat alle γ_s gesloten krommen zijn, dat wil zeggen:

$$\Gamma(s,\,\tau) = \Gamma(s,\,0)$$

voor alle s. Een gesloten kromme γ in X heet *samentrekbaar* als zij homotoop is, via gesloten krommen, aan een constante kromme $\tilde{\gamma}(t) \equiv p$. Omdat vanzelfsprekend $\int_{\tilde{\gamma}} g = 0$, is de conclusie in dit geval, dat $\int_\gamma g = 0$ als $\mathrm{d}g = 0$ en γ een samentrekbare lus in X is.

Een samenhangende variëteit X heet *enkelvoudig samenhangend*, als iedere lus in X samentrekbaar is. Omdat in een bolomgeving van 0 iedere lus γ met $\Gamma(s,\,t) := s\,\gamma(t)$, s lopend van 1 naar 0, in de oorsprong kan worden samengetrokken, zien we dat voorwaarde c) in Stelling 5.1.2 als gevolg van b) gezien kan worden, door voor U bolvormige coördinaatomgevingen te nemen.

Voorbeeld 5.2.1 Zij $X = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, met coördinaten $(x,\,y)$. In poolcoördinaten

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos\varphi, \\ y &= r\,\sin\varphi, \end{aligned}$$

krijgen we

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \\ \mathrm{d}y &= \sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned} g := {} & \mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{r}[-\sin\varphi\,\mathrm{d}x + \cos\varphi\,\mathrm{d}y] \\ = {} & \tfrac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \tfrac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

De pointe is dat, hoewel poolcoördinaten geen globaal coördinatensysteem voor X vormen, de tweede regel een reguliere differentiaalvorm in X definieert, zelfs met rationale coëfficienten. Lokaal is de vergelijking $\mathrm{d}f = g$ oplosbaar, met als oplossingen $f = \varphi + c$, de hoekfunctie plus een constante. Men kan natuurlijk ook de voorwaarde b) narekenen.

Voor iedere gesloten kromme γ in X geldt dat

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_\gamma g = w(\gamma),$$

het windingsgetal van γ om de oorsprong in het vlak. Immers $\gamma^* g$ is een differentiaalvorm in $[a,\, b]$ die de toename van de hoek langs de kromme γ beschrijft, de integraal hiervan over $[a,\, b]$ is de totale toename van de hoek langs de kromme γ. Voor gesloten krommen is dit een geheel veelvoud van 2π, dit veelvoud heet het windingsgetal. Omdat dit getal constant blijft onder homotopie en bijvoorbeeld gelijk aan 1 is voor de kromme

$$\gamma(t) : (\cos t,\, \sin t), \quad t \in [0,\, 2\pi],$$

is de conclusie dat $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ niet enkelvoudig samenhangend is. Het opmerkelijke is, dat we dit topologische feit hier hebben vastgesteld door het uitrekenen van een integraal. $\oslash$

Tot nu toe hebben we alle berekeningen in een open deelverzameling van $\mathbf{R}^n$ gedaan; in het bijzonder was de definitie van de bilineaire vorm $\mathrm{d}g(x)$ coördinaatafhankelijk. We zullen nu voor iedere C^1-vorm g in een variëteit X en voor iedere $x \in X$ de grootheid $\mathrm{d}g(x)$ interpreteren als een bilineaire vorm

$$\mathrm{d}g(x) : (u,\, v) \mapsto \mathrm{d}g(x)\,(u,\, v) : \mathrm{T}_x\, X \times \mathrm{T}_x\, X \to \mathbf{R}$$

in de raakruimte $\mathrm{T}_x\, X$.

Veronderstel dat Γ een afbeelding is van de rechthoek R in $\mathbf{R}^2$ naar X, als in Lemma 1.8.1 en zodanig dat $\Gamma(R)$ bevat is in een coördinaatomgeving in X. Integreren we (5.2.3) over s van 0 naar σ, dan kunnen we het resultaat schrijven als

$$\begin{aligned}&\int_0^\sigma \int_0^\tau \mathrm{d}g(\Gamma(s,\, t))(\partial_s\Gamma(s,\, t),\, \partial_t\Gamma(s,\, t))\, dt\, ds \\ &= \int_{\gamma_\sigma} g - \int_{\gamma_0} g - \int_{\beta_\tau} g + \int_{\beta_0} g,\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

als we noteren

$$\beta_t : s \mapsto \Gamma(s,\, t).$$

Zij $\partial\Gamma$ de gesloten kromme, bestaande uit β_0, gevolgd door γ_σ, en dan β_τ en γ_0 in de tegengestelde richting. α is gelijk aan het beeld onder Γ van de rand ∂R van R, waarbij de rand in de gebruikelijke positieve richting, dat wil zeggen linksom, doorlopen wordt. Notatie:

$$\partial\Gamma = \partial\Gamma_{\sigma,\tau} := \Gamma \circ \partial R.$$

Het rechterlid in (5.2.4) is gelijk aan $\int_{\partial\Gamma} g$, dus onafhankelijk van de gebruikte lokale coördinaten.

In lokale coördinaten kunnen we de integrand in het linkerlid van (5.2.4) terugvinden uit

$$\lim_{(\sigma,\,\tau)\to(0,\,0)} \tfrac{1}{\sigma\,\tau} \int_{\partial\Gamma_{\sigma,\tau}} g = \mathrm{d}g(\Gamma(0,\, 0))(\partial_s\Gamma(0,\, 0), \partial_t\Gamma(0,\, 0)). \tag{5.2.5}$$

Dit leidt tot de volgende conclusie.

Stelling 5.2.1 *Zij g een C^1-differentiaalvorm in een variëteit X. Voor iedere $x \in X$ is er een eenduidig bepaalde bilineaire vorm in $\mathrm{T}_x X$, die met $\mathrm{d}g(x)$ wordt aangeduid, met de volgende eigenschappen.*

a) Zij $u, v \in \mathrm{T}_x X$ en veronderstel dat Γ een C^2-afbeelding is van een open omgeving van de oorsprong in $\mathbf{R}^2$ naar X, met $\Gamma(0, 0) = x$, $\partial_1\Gamma(0, 0) = u$ en $\partial_2\Gamma(0, 0) = v$. Dan is $\mathrm{d}g(x)\,(u, v)$ gelijk aan de limiet voor $(\sigma, \tau) \to (0, 0)$ van $\frac{1}{\sigma\,\tau}$ maal de integraal van g over

$$\Gamma \circ \partial([0, \sigma] \times [0, \tau]).$$

b) In willekeurige lokale coördinaten voldoet $\mathrm{d}g(x)$ aan (5.2.1)

Vanwege a) wordt $\mathrm{d}g(x)$ de *uitwendige afgeleide* van g in het punt x genoemd. Merk op dat $\mathrm{d}g = 0$ lokaal equivalent is met $g = \mathrm{d}f$ voor een differentieerbare functie f. In het bijzonder geldt $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$ voor iedere $f \in \mathrm{C}^2(X)$.

Uit b) zien we dat $\mathrm{d}g(x)$ antisymmetrisch is:

$$\mathrm{d}g(x)\,(v, u) = -\mathrm{d}g(x)\,(u, v), \quad u, v \in \mathrm{T}_x X.$$

In het algemeen wordt een afbeelding ω, die aan iedere $x \in X$ een antisymmetrische bilineaire vorm in $\mathrm{T}_x X$ toevoegt, een *differentiaalvorm van de graad* 2 *in* X genoemd. In de volgende paragrafen zullen we de theorie opzetten voor differentiaalvormen van willekeurige graad.

We besluiten deze paragraaf met een formule die een verband legt tussen de uitwendige afgeleide en Lie-haakjes. Is g een differentiaalvorm en v een vectorveld in X dan definieert

$$g \cdot v : x \mapsto g(x) \cdot v(x) : X \to \mathbf{R}$$

een reëelwaardige functies $g \cdot v$ in X, die het *inprodukt* van g en v genoemd wordt. Merk op dat deze definitie onafhankelijk is van lokale coördinaten. Stel u en v zijn C^1-vectorvelden in X en g is een C^1-differentiaalvorm in X. Gebruik makend van (4.7.2) en (5.2.1), krijgen we:

$$\mathrm{d}_u(g \cdot v)(x) - \mathrm{d}_v(g \cdot u)(x) = \mathrm{d}g(x)\,(u(x), v(x)) - g(x)([u, v](x)) \tag{5.2.6}$$

voor alle $x \in X$.

Is g een C^1-differentiaalvorm in de n-dimensionale variëteit X, waarvoor $g(x) \neq 0$ voor iedere $x \in X$, dan vormen de $(n-1)$-dimensionale lineaire deelruimten $\ker g(x)$ van de raakruimten een C^1-deelvectorbundel, die we met $\ker g$ aanduiden. Het vinden van integraalvariëteiten voor $\ker g$ staat in de klassieke literatuur bekend als het *Pfaff'se probleem* voor de *Pfaff'se vorm* g.

Stelling 5.2.2 *Zij g een C^k-differentiaalvorm in X, $k \geq 1$ en $g(x) \neq 0$ voor iedere $x \in X$. Dan zijn de volgende uitspraken a)-c) equivalent.*

a) Het Pfaff'se probleem $\ker g$ is integreerbaar.

b) Bij iedere $a \in X$ is een open omgeving U van a in X, een C^k-functie φ en een C^{k+1}-functie f in U, waarvoor $g = \varphi\,\mathrm{d}f$ in U.

c) Als u en v C^1-vectorvelden in X zijn en $g \cdot u = 0$, $g \cdot v = 0$, dan is $\mathrm{d}g(x)\,(u(x), v(x)) = 0$ voor alle $x \in X$.

Bewijs a) $\Rightarrow$ b). In de lokale standaardvorm c) in Stelling 4.8.1 voor de integreerbare bundel $\ker g$ is $g = g_n \, \mathrm{d}x_n$ voor een C^1-functie g_n. Dit bewijst b) met $\phi, f \in \mathrm{C}^k$. Omdat $g(x) \neq 0$, is zowel $\phi(x) \neq 0$ als ook $\mathrm{d}f(x) \neq 0$, voor iedere $x \in X$. Uit $\mathrm{d}f = \frac{1}{\phi}\, g \in \mathrm{C}^k$ zien we dat $f \in \mathrm{C}^{k+1}$.

b) $\Rightarrow$ c). Een berekening in lokale coördinaten geeft dat

$$\mathrm{d}(\varphi \, \mathrm{d}f)(x)\,(u(x),\, v(x)) = \mathrm{d}_u\varphi(x)\,\mathrm{d}_v f(x) - \mathrm{d}_v\varphi(x)\,\mathrm{d}_u f(x)$$

voor alle $x \in X$. Omdat $\ker g = \ker \mathrm{d}f$ als $g = \varphi\, \mathrm{d}f$, lezen we hieruit c) af.

c) $\Rightarrow$ a). Stel c) geldt, $g \cdot u = 0$ en $g \cdot v = 0$. Uit (5.2.6) zien we dat

$$g(x)([u,\, v](x)) = \mathrm{d}g(x)\,(u(x),\, v(x)) = 0$$

voor alle $x \in X$. Maar dit betekent dat $H = \ker g$ voldoet aan b) in Stelling 4.8.1. $\square$

Men noemt de functie φ in b) een *integrerende factor* voor de differentiaalvorm g. Eigenlijk zou het natuurlijker zijn om $\frac{1}{\phi}$ zo te noemen, omdat het product hiervan met g gelijk is aan de totale afgeleide van een functie f. Merk op dat de integraalvariëteiten van $\ker g$ lokaal gelijk zijn aan de niveauvariëteiten $f^{-1}(\{c\})$, $c \in \mathbf{R}$, van de functie f.

5.3 De Uitwendige Algebra

Zij E een n-dimensionale lineaire ruimte. Een *p-lineaire vorm in E* is gedefinieerd als een p-lineaire functie $\omega : E^p \to \mathbf{R}$, zie (1.8.3). Voor $p = 1$ is dit een *lineaire vorm*, voor $p = 2$ spreekt men van een *bilineaire vorm.* Voor $p = 0$ is ω een element van $\mathbf{R}$.

Is $p \geq 2$, dan noemt men de p-lineaire vorm ω *antisymmetrisch*, als voor iedere $1 \leq i \leq p-1$ en $v_1, \ldots, v_p \in E$ geldt dat

$$\omega(v_1, \ldots,\, v_i,\, v_{i+1}, \ldots,\, v_p) = -\omega(v_1, \ldots,\, v_{i+1},\, v_i, \ldots,\, v_p). \tag{5.3.1}$$

Omdat iedere permutatie π van $\{1, \ldots, p\}$ verkregen kan worden als samenstelling van buurverwisselingen, geeft herhaald toepassen van (5.3.1) dat

$$\omega(v_{\pi(1)}, \ldots,\, v_{\pi(p)}) = (\operatorname{sgn} \pi)\, \omega(v_1, \ldots,\, v_p), \tag{5.3.2}$$

voor iedere permutatie π en $v_1, \ldots, v_p \in E$. Hierin is de *tekenfunctie* $\pi \mapsto \operatorname{sgn} \pi$ gegeven door:

Lemma 5.3.1 *Zij $\mathcal{S}$ de groep van permutaties van $\{1, \ldots, p\}$. Er is precies één homomorfisme* sgn *van $\mathcal{S}$ naar de vermenigvuldigingsgroep $\{+1, -1\}$, dat niet constant gelijk aan* 1 *is. Hiervoor geldt dat* $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^l$ *als π het product is van l paarverwisselingen.*

Bewijs Voor de eenduidigheid merken we op dat de commutativiteit van de groep $\{\pm 1\}$ impliceert dat

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \psi \circ \pi^{-1}) = (\operatorname{sgn} \pi) \circ (\operatorname{sgn} \psi) \circ (\operatorname{sgn} \pi)^{-1} = \operatorname{sgn} \psi$$

voor alle $\psi, \pi \in \mathcal{S}$. Anders gezegd, ieder homomorfisme $\operatorname{sgn} : \mathcal{S} \to \{\pm 1\}$ is constant op iedere conjugatieklasse in $\mathcal{S}$.

Noteren we de permutatie die i met j verwisselt met (ij), dan is

$$\pi \circ (ij) \circ \pi^{-1} = (\pi(i)\, \pi(j))$$

voor iedere $\pi \in \mathcal{S}$. Nu is er voor ieder paar a, b met $a \neq b$ een permutatie π waarvoor $\pi(i) = a$ en $\pi(j) = b$, dus als $\operatorname{sgn}(ij) = 1$, dan is $\operatorname{sgn}(ab) = 1$ voor alle a, b, hetgeen impliceert dat $\operatorname{sgn}\psi = 1$ voor alle $\psi \in \mathcal{S}$, omdat iedere permutatie een product van paarverwisselingen (zelfs van buurverwisselingen) is. De conclusie is dat, als sgn niet constant is, dan is $\operatorname{sgn}\beta = -1$ voor iedere paarverwisseling β, dus $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^l$, als π het product is van l paarverwisselingen.

Voor de existentie, schrijf P, resp. Q voor de verzameling van paren $(i,\, j)$ met $1 \leq i < j \leq p$, resp. $1 \leq j < i \leq p$. Verder $R = P \cup Q$. Als $\alpha = (i,\, j) \in R$ en $\pi \in \mathcal{S}$, dan noteren we $\pi(\alpha) = (\pi(i),\, \pi(j)) \in R$, dit definieert een actie van $\mathcal{S}$ in R. Voor iedere $\pi \in \mathcal{S}$ definiëren we de lengte $l(\pi)$ als het aantal elementen van P dat door π naar Q afgebeeld wordt, dus

$$l(\pi) := \#(P \cap \pi^{-1}(Q)).$$

We gaan nu bewijzen dat

$$\operatorname{sgn} : \pi \mapsto (-1)^{l(\pi)}$$

een homomorfisme van $\mathcal{S}$ naar $\{\pm\}$ is.

Zijn $\pi,\, \psi \in \mathcal{S}$, dan schrijven we

$$ABC := \{\alpha \in A \mid \psi(\alpha) \in B,\ \pi(\psi(\alpha)) \in C\}.$$

Alle $2^3 = 8$ mogelijkheden met A, B, C gelijk aan P of Q zijn onderling disjunct. We hebben

$$\begin{aligned}
&P \cap (\pi \circ \psi)^{-1}(Q) = PPQ \cup PQQ,\\
&P \cap \psi^{-1}(Q) = PQR = PQQ \cup PQP,\\
&\psi^{-1}(P \cap \pi^{-1}(Q)) = RPQ = PPQ \cup QPQ,
\end{aligned}$$

waaruit we aflezen dat

$$l(\pi) + l(\psi) = l(\pi \circ \psi) + \#(QPQ) + \#(PQP).$$

De afbeelding $s : (i,\, j) \mapsto (j,\, i)$ verwisselt P met Q. Omdat $\theta(s(\alpha)) = s(\theta(\alpha))$ voor iedere $\alpha \in R$, $\theta \in \mathcal{S}$, zien we dat $s(QPQ) = PQP$, dus $\#(PQP) = \#(QPQ)$. Dit geeft dat

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \psi) = (\operatorname{sgn}\pi) \cdot (\operatorname{sgn}\psi).$$

Is $\pi = (i\ i+1)$, dan geldt $j < k$ en $\pi(j) > \pi(k)$ dan en slechts dan als $j = i$ en $k = i + 1$. Dus $l(\pi) = 1$ en $\operatorname{sgn}\pi = -1$ voor iedere buurverwisseling π, hetgeen laat zien dat het homomorfisme π niet constant is. $\square$

Lemma 5.3.2 *Zij ω een p-lineaire vorm in E. Dan zijn de volgende uitspraken a), b) equivalent.*

a) ω is antisymmetrisch.

b) Zijn $v_1, \ldots, v_p$ lineair afhankelijk, dan is $\omega(v_1, \ldots, v_p) = 0$.

Bewijs Uit (5.3.2) en Lemma 5.3.1 zien we dat a) geldt, dan en slechts dan als

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_p)$$

als $1 \leq i < j \leq p$. Net als na (4.7.3) zien we dat dit equivalent is met

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = 0$$

als $v_i = v_j$, $1 \leq i < j \leq p$. Omdat in deze situatie de vectoren $v_1, \ldots, v_p$ lineair afhankelijk zijn, is hiermee b) $\Rightarrow$ a) bewezen.

Omgekeerd, zijn de vectoren $v_1, \ldots, v_p$ lineair afhankelijk, dan is er een i waarvoor

$$v_i = \sum_{j \neq i} c_j\, v_j,$$

voor zekere coëfficiënten $c_j \in \mathbf{R}$. De lineariteit van ω in de i-de variabele uitwerkend, krijgen we dat

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_p) = \sum_{j \neq i} c_j\, \omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = 0$$

als ω antisymmetrisch is, omdat de hier genoteerde v_j op de i-de plaats gelijk is aan de vector op de j-de plaats en $i \neq j$. $\square$

Een antisymmetrische p-lineaire vorm ω in E heet ook wel een *p-vorm* in E. Lemma 5.3.2, b) suggereert de interpretatie van $\omega(v_1, \ldots, v_p)$ als een p-dimensionaal volume, voorzien van een teken, van het parallellepipedum in E opgespannen door de vectoren $v_1, \ldots v_p$ in E. Immers, als $v_1, \ldots, v_p$ lineair afhankelijk zijn, dan ligt het opgespannen parallellepipedum in een lineaire deelruimte van dimensie $< p$, dus is het p-dimensionale volume gelijk aan 0. De lineariteit van $v_i \mapsto \omega(v_1, \ldots, v_p)$ maakt daarbij dat $\omega(v_1, \ldots, v_p)$ van teken wisselt als v_i vervangen wordt door $-v_i$ (en ook als v_i met v_j wordt verwisseld). Om die reden spreekt men van een *georiënteerd p-dimensionaal volume.*

De p-vormen in E vormen een lineaire deelruimte van de ruimte van alle functies in E^p, de ruimte van p-vormen in E wordt met $\bigwedge^p E^*$ aangeduid. We hebben $\bigwedge^1 E^* = E^*$ en $\bigwedge^0 E^* = \mathbf{R}$.

Als $\omega \in \bigwedge^p E^*$, $\nu \in \bigwedge^q E^*$, dan wordt het *uitwendige product* $\omega \wedge \nu \in \bigwedge^{p+q} E^*$ gedefinieerd door:

$$(\omega \wedge \nu)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \sum_{\pi \in \mathcal{K}} \operatorname{sgn} \pi \cdot \omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}) \cdot \nu(v_{\pi(p+1)}, \ldots, v_{\pi(p+q)}) \tag{5.3.3}$$
$$= \frac{1}{p!}\frac{1}{q!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}} \operatorname{sgn} \pi \cdot \omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}) \cdot \nu(v_{\pi(p+1)}, \ldots, v_{\pi(p+q)}).$$

Hierin is $\mathcal{S}$ de collectie van alle permutaties van $\{1, \ldots, p+q\}$. De deelverzameling $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ is zó gekozen, dat er voor iedere opdeling van $\{1, \ldots, p+q\}$ in deelverzamelingen A, resp. B met p, resp. q elementen, er precies één $\pi \in \mathcal{K}$ is, waarvoor $\pi(i) \in A$ voor $1 \leq i \leq p$ en $\pi(j) \in B$ voor $p+1 \leq j \leq p+q$.

Merk op dat een andere permutatie met deze eigenschappen van de vorm $\psi \circ \pi$ is met $\psi(A) = A$, $\psi(B) = B$. Dit resulteert in een extra factor $\operatorname{sgn}(\psi|_A)$ afkomstig van ω en een factor $\operatorname{sgn}(\psi|_B)$ afkomstig van ν. Maar omdat

$$\operatorname{sgn}(\psi \circ \pi) = \operatorname{sgn}(\psi) \cdot \operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\psi|_A) \cdot \operatorname{sgn}(\psi|_B) \cdot \operatorname{sgn}(\pi),$$

zien we dat de keuze van π er niet toe doet.

Tenslotte gaan we nog even na dat $\omega \wedge \nu$ inderdaad een $(p+q)$-vorm is. De lineariteit in iedere variabele is duidelijk. Is ψ een permutatie en vervangen we in (5.3.4) de indices j door $\psi(j)$, dan zien we dat dit op hetzelfde neerkomt als in het rechterlid van (5.3.4) de permutatie π te vervangen door $\tilde{\pi} = \pi \circ \psi$. Omdat

$$\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn}(\tilde{\pi} \circ \psi^{-1}) = \operatorname{sgn} \tilde{\pi} / \operatorname{sgn} \psi = \operatorname{sgn} \psi \, \operatorname{sgn} \tilde{\pi},$$

zien we dat het vervangen van de indices j door $\psi(j)$ leidt tot vermenigvuldiging van (5.3.4) met de factor $\operatorname{sgn} \psi$.

Opmerking 5.3.1 In de literatuur wordt het uitwendige product ook wel met andere, van p en q afhankelijke, factoren ervoor gedefinieerd. De hier gemaakte keuze is niet alleenzaligmakend, maar het is wèl verstandig om de verschillende definities niet door elkaar te gebruiken. $\oslash$

Het uitwendige product heeft de volgende eigenschappen.

Stelling 5.3.3 *Als $\omega \in \bigwedge^p E^*$, $\nu \in \bigwedge^q E^*$ en $\mu \in \bigwedge^r E^*$, dan is*

$$\omega \wedge (\nu \wedge \mu) = (\omega \wedge \nu) \wedge \mu. \tag{5.3.4}$$

Als $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ een basis in E^* is, dan vormen de

$$\varepsilon_{i(1)} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i(p)}, \quad \text{met} \quad i(1) < i(2) < \ldots < i(p)$$

een basis van $\bigwedge^p E^*$. In het bijzonder is

$$\dim \bigwedge^p E^* = \binom{n}{p} \tag{5.3.5}$$

en is $\bigwedge^p E^* = \{0\}$ als $p > n$. Tenslotte, als $\omega \in \bigwedge^p E^*$, $\nu \in \bigwedge^q E^*$, dan is

$$\omega \wedge \nu = (-1)^{p \cdot q} \, \nu \wedge \omega. \tag{5.3.6}$$

Bewijs (5.3.4) kan bewezen worden, door aan te tonen dat beide zijden van de identiteit, toegepast op $(v_1, \ldots, v_{p+q+r})$, gelijk zijn aan

$$\sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \cdot \omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}) \cdot \nu(v_{\pi(p+1)}, \ldots, v_{\pi(p+q)}) \cdot \mu(v_{\pi(p+q+1)}, \ldots, v_{\pi(p+q+r)}),$$

waarbij in de som voor iedere opdeling van $\{1, \ldots, p+q+r\}$ $\{1, \ldots, p+q+r\}$ in deelverzamelingen A, resp. B, resp. C met p, resp. q, resp. r elementen er één permutatie π gekozen is, waarvoor $\pi(i) \in A$ voor $1 \le i \le p$, $\pi(j) \in B$ voor $p+1 \le j \le p+q$ en $\pi(k) \in C$ voor $p+q+1 \le k \le p+q+r$.

Bijvoorbeeld, bij het uitschrijven van het linkerlid $\omega \wedge (\nu \wedge \mu)$ volgens de definitie (5.3.4) krijgen we

$$\begin{aligned} &\sum_{\psi} \operatorname{sgn} \psi \cdot \omega(v_{\psi(1)}, \ldots, v_{\psi(p)}) \\ &\cdot \sum_{\chi} \operatorname{sgn} \chi \cdot \nu(v_{\psi(p+\chi(1))}, \ldots, v_{\psi(p+\chi(q))}) \cdot \mu(v_{\psi(p+\chi(q+1))}, \ldots, v_{\psi(p+\chi(q+r))}). \end{aligned}$$

Hierin is voor iedere opdeling van $\{1, \ldots, p+q+r\}$ in deelverzamelingen A, resp. D met p, resp. $q+r$ elementen, er één permutatie ψ van $\{1, \ldots, p+q+r\}$ gekozen, waarvoor $\pi(i) \in A$ voor $1 \leq i \leq p$, $\pi(j) \in D$ voor $p+1 \leq j \leq p+q+r$. En voor iedere opdeling van $\{1, \ldots, q+r\}$ in deelverzamelingen B', resp. C' met q, resp. r elementen is één permutatie χ van $\{1, \ldots, q+r\}$gekozen, waarvoor $\chi(i) \in B'$ als $1 \leq i \leq q$ en $\chi(j) \in C'$ als $q+1 \leq j \leq q+r$. We krijgen de termen in de gewenste vorm door π te definiëren door middel van $\pi(i) = \psi(i)$ als $1 \leq i \leq p$ en $\pi(p+j) = \psi(p+\chi(j))$ als $1 \leq j \leq q+r$. We hebben $\pi = \psi \circ \tilde{\chi}$, waarin $\tilde{chi}(i) = i$ als $1 \leq i \leq p$ en $\tilde{chi}(p+j) = p+\chi(j)$ als $1 \leq j \leq q+r$. Hiermee is $\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \psi \cdot \operatorname{sgn} \tilde{\chi} = \operatorname{sgn} \psi \cdot \operatorname{sgn} \chi$. Tenslotte is ook duidelijk dat de afbeelding $k \mapsto \psi(p+k)$ de opdeling van $\{1, \ldots, q+r\}$ in B', resp. C' afbeeldt naar een opdeling van D in deelverzamelingen B, resp. C van q, resp. r elementen en dat iedere dergelijke opdeling van D precies één keer in de som voorkomt.

Voor de tweede uitspraak voeren we de collectie $I = I_p$ in van multi-indices

$$i = (i(1), \ldots, i(p)),$$

met

$$1 \leq i(1) < i(2) < \ldots < i(p) \leq n.$$

Verder, zij e_j de duale basis in E, gedefinieerd door $\varepsilon_i(e_j) = 1$ als $i = j$ en $\varepsilon_i(e_j) = 0$ als $i \neq j$. Voor $i \in I$ schrijven we

$$\varepsilon_i := \varepsilon_{i(1)} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i(p)}, \quad e_i := (e_{i(1)}, \ldots, e_{i(p)}).$$

Voor $i, j \in I$ krijgen we dan dat $\varepsilon_i(e_j) = 1$ als $i = j$ en $\varepsilon_i(e_j) = 0$ als $i \neq j$. Hieruit volgt dat

$$(\sum_{i \in I} c_i \cdot \varepsilon_i)(e_j) = c_j$$

voor iedere $c \in \mathbf{R}^I$ en iedere $j \in I$. Voor iedere $\omega \in \bigwedge^p E^*$ geeft dit op zijn beurt dat

$$\omega = \sum_{i \in I} \omega(e_i) \cdot \varepsilon_i,$$

omdat het linker- en rechterlid op alle e_j, $j \in I$ dezelfde waarde aannemen. De conclusie is dat de afbeelding

$$c \mapsto \sum_{i \in I} c_i \cdot \varepsilon_i$$

een bijectieve lineaire afbeelding is van $\mathbf{R}^I$ naar $\bigwedge^p E^*$.

Tenslotte volgt (5.3.6) uit het voorgaande en het feit dat

$$\omega \wedge \nu = -\nu \wedge \omega \quad \text{als} \quad \omega, \nu \in E^* = \bigwedge{}^1 E^*. \tag{5.3.7}$$

□

De directe som (= het Cartesische product)

$$\bigwedge = \bigwedge E^* := \bigoplus_{p=0}^{n} \bigwedge{}^p E^*$$

is een lineaire ruimte met

$$\dim \bigwedge E^* = \sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = 2^n.$$

Het uitwendige product heeft een eenduidig bepaalde uitbreiding tot een bilineaire afbeelding $(\omega,\, \nu) \mapsto \omega \wedge \nu$ van $\bigwedge \times \bigwedge$ naar $\bigwedge$. Daarmee wordt $\bigwedge$ een algebra, die de *uitwendige algebra* of *Grassmann-algebra* van E^* genoemd wordt. Uit (5.3.7) zien we dat $\bigwedge$ verre van commutatief is. Anderzijds zien we uit (5.3.6), dat $\omega \wedge \nu = \nu \wedge \omega$, zodra ω of ν een lineaire combinatie is van p-vormen van *even* graad p.

Is A een lineaire afbeelding van E naar een eindig-dimensionale lineaire ruimte F, dan definieert

$$(A^*\omega)(v_1, \ldots,\, v_p) := \omega(Av_1, \ldots,\, Av_p) \tag{5.3.8}$$

een lineaire afbeelding van $\bigwedge^p F^*$ naar $\bigwedge^p E^*$, die het *terugtrekken van p-vormen door* A genoemd wordt. Er geldt

$$A^*(\omega \wedge \nu) = (A^*\omega) \wedge (A^*\nu), \tag{5.3.9}$$

als $\omega \in \bigwedge^p F^*$, $\nu \in \bigwedge^q F^*$, zoals direct volgt door uitschrijven van de definities.

De afbeelding A^* heeft een eenduidig bepaalde uitbreiding tot een lineaire afbeelding van $\bigwedge F^*$ naar $\bigwedge E^*$, die ook met A^* aangeduid wordt. Daarvoor geldt (5.3.9) voor alle $\omega, \nu \in \bigwedge F^*$, ofwel A^* is een homomorfisme van algebra's $\bigwedge F^* \to \bigwedge E^*$.

Is B een lineaire afbeelding van F naar een eindig-dimensionale lineaire ruimte G, dan is

$$A^*(B^*\omega) = (B \circ A)^*\omega \tag{5.3.10}$$

voor iedere $\omega \in \bigwedge^p G^*$; ook dit volgt direct door uitschrijven van de definities. Door lineair uitbreiden geldt deze regel ook voor de afbeeldingen tussen de uitwendige algebra's.

Is $\omega \in \bigwedge^p E^*$, $p \geq 1$ en $v \in E$, dan definieert

$$(\omega \cdot v)(v_2, \ldots,\, v_p) := \omega(v,\, v_2, \ldots,\, v_p) \tag{5.3.11}$$

een $(p-1)$-vorm in E, die het *inproduct van* ω *met* v of de *contractie van* ω *met* v genoemd wordt. Merk op dat

$$i_v : \omega \mapsto \omega \cdot v : {\textstyle\bigwedge}^p E^* \to {\textstyle\bigwedge}^{p-1} E^* \quad \text{en} \tag{5.3.12}$$

$$i_\omega : v \mapsto \omega \cdot v : E \to {\textstyle\bigwedge}^{p-1} E^* \tag{5.3.13}$$

beiden lineaire afbeeldingen zijn.

Als $\omega \in \bigwedge^p E^*$, $\nu \in \bigwedge^q E^*$ en $v \in E$, dan geldt:

$$i_v(\omega \wedge \nu) = i_v\omega \wedge \nu + (-1)^p \omega \wedge i_v\nu, \tag{5.3.14}$$

Om dit in te zien, splitsen we de som in (5.3.4) in de som over permutaties π met $\pi(1) = 1$ en de som over permutaties π met $\pi(p+1) = 1$. De eerste som herkennen we als $i_{v_1}\omega \wedge \nu$, werkend op $(v_2, \ldots,\, v_{p+q})$. In de tweede som herschrijven we $\pi(i) = \psi(i+1)$ voor $1 \leq i \leq p$, $\pi(p+1) = \psi(1)$ en $\pi(j) = \psi(j)$ voor $p+2 \leq j \leq p+q$. Dit impliceert dat $\pi = \psi \circ \chi$, waarin $\operatorname{sgn} \chi = (-1)^p$, terwijl $\psi(1) = 1$. De tweede som herkennen we nu als $(-1)^p\, \omega \wedge i_{v_1}\nu$, werkend op $(v_2, \ldots,\, v_{p+q})$.

Is A een *bijectieve* lineaire afbeelding van E naar F, dan geldt

$$A^*(\omega \cdot v) = (A^*\omega) \cdot (A^{-1}v), \;\; \omega \in {\textstyle\bigwedge}^p F^*,\; v \in F. \tag{5.3.15}$$

Dit volgt door uitschrijven van de definities.

Een belangrijk speciaal geval treedt op voor $p = n = \dim E$, in welk geval $\omega \in \bigwedge^n E^*$ een *georiënteerde volume-vorm in* E genoemd wordt. Is $A \in \mathrm{L}(E,\, E)$, dan is A^* een lineaire afbeelding van de 1-dimensionale lineaire ruimte $\bigwedge^n E^*$ naar zichzelf, dus van de vorm

$$A^*\omega = c(A) \cdot \omega, \quad \omega \in \bigwedge^n E^*$$

voor een eenduidig bepaalde $c(A) \in \mathbf{R}$. (5.3.10) gebruikend, krijgen we dat

$$c(B \circ A) \cdot \omega = (B \circ A)^*\omega = A^*(B^*\omega) = A^*(c(B) \cdot \omega) = c(B) \cdot A^*\omega = c(B) \cdot c(A) \cdot \omega$$

voor iedere $\omega \in \bigwedge^n E^*$, dus

$$c(B \circ A) = c(B) \cdot c(A), \quad A,\, B \in \mathrm{L}(E,\, E).$$

Ook is het duidelijk dat $c(\mathrm{id}) = 1$.

Is $e_1, \ldots,\, e_n$ een basis in E, dan geeft uitschrijven van

$$Ae_j = \sum_i A^i_j\, e_i$$

in coördinaten ten aanzien van deze basis dat

$$\begin{aligned}
&c(A) \cdot \omega(e_1, \ldots,\, e_n) = (A^*\omega)(e_1, \ldots,\, e_n) = \omega(Ae_1, \ldots,\, Ae_n)\\
&= \sum_\pi \prod_{i=1}^n A_i^{\pi(i)} \cdot \omega(e_{\pi(1)}, \ldots,\, e_{\pi(n)})\\
&= \sum_\pi \prod_{i=1}^n A_i^{\pi(i)}\, \mathrm{sgn}\, \pi \cdot \omega(e_1, \ldots,\, e_n).
\end{aligned}$$

Hierin is in de middelste regel eerst gesommeerd over alle afbeeldingen π van $\{1, \ldots,\, n\}$ naar $\{1, \ldots,\, n\}$; dit is het resultaat van het multilineair uitwerken. Vervolgens is opgemerkt, dat als er i en j zijn met $i \neq j$ en $\pi(i) = \pi(j)$, dan is $\omega(e_{\pi(1)}, \ldots,\, e_{\pi(n)}) = 0$, dus we hoeven alleen te sommeren over de permutaties π. De conclusie is hiermee, dat $c(A)$ *gelijk is aan de determinant van* A *ten aanzien van de basis* $e_1, \ldots e_n$.

Om deze reden schrijft men $c(A) = \det A$, ofwel beschouwt men

$$A^*\omega = \det A \cdot \omega, \;\; \omega \in \bigwedge^n E^*, \;\; A \in \mathrm{L}(E,\, E), \tag{5.3.16}$$

als de *definitie van de determinant van* $A \in \mathrm{L}(E,\, E)$. Deze definitie komt overeen met de determinant van de matrix ten aanzien van een willekeurige basis. Bijna zonder rekenen krijgt men hiermee de bekende formule

$$\det(B \circ A) = \det B \cdot \det A \tag{5.3.17}$$

voor de determinant van $n \times n$-matrices terug.

Ook kan nog opgemerkt worden, dat

$$\mathrm{sgn}\, \pi = \det A_\pi$$

als A de lineaire afbeelding van E naar E is, die e_i in $e_{\pi(i)}$ overvoert, de bij π behorende *permutatiematrix* genaamd.

5.4 Differentiaalvormen van de graad p

Zij X een n-dimensionale variëteit. Een *differentiaalvorm van de graad p in X*, of kortweg een *p-vorm in X* is een afbeelding ω, die aan iedere $x \in X$ een antisymmetrische p-lineaire vorm $\omega(x) = \omega_x$ in $\mathrm{T}_x X$ toevoegt. Anders gezegd,

$$\omega_x \in \bigwedge^p (\mathrm{T}_x X)^* \ \text{ voor iedere } \ x \in X.$$

Het punt x wordt in de notatie vaak onderaan gehangen, omdat ω_x zélf een functie van p raakvectoren v_1 tot en met v_p in $\mathrm{T}_x X$ is; dan staat

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_n)$$

wat overzichtelijker dan

$$\omega(x)(v_1, \ldots, v_n).$$

Voor $p = 0$ is dit een reëelwaardige functie in X, terwijl voor $p = 1$ de differentiaalvormen uit §5.1 terugkomen. De uitwendige afgeleide van een 1-vorm uit §5.2 was een differentiaalvorm van de graad 2. Een n-vorm in X heet een *(georiënteerde) volume-vorm in X*.

Om te kunnen spreken van C^k-differentiaalvormen van de graad p, voeren we de *p-vormbundel* $\bigwedge^p \mathrm{T}^* X$ in van de disjuncte lineaire ruimten $\bigwedge^p (\mathrm{T}_x X)^*$, $x \in X$:

$$\bigwedge^p \mathrm{T}^* X := \{(x, \omega) \mid x \in X, \ \omega \in \bigwedge^p (\mathrm{T}_x X)^*\}.$$

De afbeelding

$$\pi : (x, \omega) \mapsto x : \bigwedge^p \mathrm{T}^* X \to X$$

heet weer de projectie naar de basis. In deze termen is een p-vorm in X gedefinieerd als een afbeelding $\omega : X \to \bigwedge^p \mathrm{T}^* X$, waarvoor $\pi \circ \omega = \mathrm{id}$, de identiteit in X.

Voor iedere kaart κ voor X is $\mathrm{D}\,\kappa(x)^{-1}$ een lineaire afbeelding van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathrm{T}_x X$, die we kunnen gebruiken om de geïnduceerde kaart

$$\tilde{\kappa} : \pi^{-1}(X_\kappa) \to V_\kappa \times \bigwedge^p (\mathbf{R}^n)^*$$

te definiëren door

$$\tilde{\kappa}(x, \omega) := (\kappa(x), (\mathrm{D}\,\kappa(x)^{-1})^* \, \omega). \tag{5.4.1}$$

Merk op dat

$$\bigwedge^p (\mathbf{R}^n)^* \simeq \mathbf{R}^m, \ \ m := \binom{n}{p},$$

zie Stelling 5.3.3. Met de geïnduceerde kaarten wordt $\bigwedge^p \mathrm{T}^* X$ een $n + m$-dimensionale C^{l-1}-variëteit als X een n-dimensionale C^l-variëteit is. Zoals gewoonlijk zullen we aannemen dat X reëel-analytisch is, zonder de algemeenheid te schaden, zie Opmerking 2.4.1.

Na invoering van de variëteitsstructuur in $\bigwedge^p \mathrm{T}^* X$ kunnen we de p-vorm ω in X van de klasse C^k noemen, als ω een C^k-afbeelding is van X naar $\bigwedge^p \mathrm{T}^* X$. De ruimte van alle willekeurig vaak differentieerbare p-vormen in X wordt met $\Omega^p(X)$ aangeduid. De ruimte van p-vormen van de klasse C^k zou met $\Omega^{p,\,k}(X)$ aangegeven kunnen worden.

Alle algebraïsche bewerkingen uit §5.3 kunnen nu in ieder punt $x \in X$ voor differentiaalvormen in X worden overgebracht. Om te beginnen definiëren we voor de p-vorm ω in X en de q-vorm ν in X de $(p+q)$-vorm $\omega \wedge \nu$ in X, door middel van:

$$(\omega \wedge \nu)_x := \omega_x \wedge \nu_x, \quad x \in X. \tag{5.4.2}$$

$\omega \wedge \nu$ heet het *uitwendige product van* ω *en* ν. (5.3.11) laat zien op welke manier dit een functie is van $p+q$ raakvectoren in het punt x. Is ω of ν een reëelwaardige functie, dat wil zeggen $p = 0$ of $q = 0$, dan laat men het symbool $\wedge$ weg of vervangt het door het gewone vermenigvuldigingssymbool $\cdot$.

Is Φ een differentieerbare afbeelding van X naar een variëteit Y, dan definiëren we voor iedere p-vorm ω in Y de *door* Φ *teruggetrokken* p*-vorm* $\Phi^*\omega$ in X door:

$$(\Phi^*\omega)_x := (\mathrm{T}_x\,\Phi)^*\omega_{\Phi(x)}, \quad x \in X. \tag{5.4.3}$$

Merk op dat $\omega_{\Phi(x)} \in \bigwedge^p(\mathrm{T}_{\Phi(x)}\,Y)^*$ en dat $\mathrm{T}_x\,\Phi$ een lineaire afbeelding is van $\mathrm{T}_x\,X$ naar $\mathrm{T}_{\Phi(x)}\,Y$, dus (5.4.3) is goed gedefinieerd. (5.3.8) laat zien op welke manier het rechterlid een functie is van p raakvectoren in het punt x. Uit (5.4.1) lezen we ook af, dat voor een kaart κ geldt dat

$$\tilde{\kappa} \circ \omega \circ \kappa^{-1} = (\kappa^{-1})^*\omega = (\kappa^*)^{-1}\omega. \tag{5.4.4}$$

In het bijzonder betekent dit, dat ω van de klasse C^k in X_κ is, dan en slechts dan als $(\kappa^{-1})^*\omega = (\kappa^*)^{-1}\omega$ van de klasse C^k is in V_κ.

Is X een deelvariëteit van Y en is ω een p-vorm in Y, dan definieert

$$\nu_x(v_1, \dots, v_p) = \omega_x(v_1, \dots, v_p), \quad x \in X \subset Y,\ v_1, \dots, v_p \in \mathrm{T}_x\,X \subset \mathrm{T}_x\,Y$$

een p-vorm ν in X die ω *in* X genoemd wordt. Als $p > 0$ dan is dit wat anders dan de beperking tot X van $\omega : Y \to \mathrm{T}\,Y$, omdat ook de v_i tot $\mathrm{T}\,X$ beperkt worden. (Zo is $\nu = 0$ als $p > \dim X$, terwijl het daarbij best kan gebeuren dat $\omega_x \neq 0$ voor $x \in X$.) In termen van terugtrekken van differentiaalvormen is

$$\nu = \mathrm{id}_X^*\,\omega,$$

als id_X de identiteit, beschouwd als afbeelding van X naar Y, voorstelt.

Tenslotte definiëren we voor iedere p-vorm ω in X en voor ieder vectorveld v in X de $(p-1)$-vorm $\omega \cdot v = i_v\omega = i_\omega v$ in X door:

$$(\omega \cdot v)_x := \omega_x \cdot v(x). \tag{5.4.5}$$

(5.3.11) laat zien dat dit neerkomt op het invullen van $v(x) \in \mathrm{T}_x\,X$ op de eerste plaats in de p-vorm ω_x in $\mathrm{T}_x\,X$. $\omega \cdot v$ heet het *inproduct van de* p*-vorm* ω *met het vectorveld* v.

Stelling 5.3.3, (5.3.9), (5.3.10), (5.3.14) en (5.3.15) geven nu:

Stelling 5.4.1 *Zijn* ω*, resp.* ν*, resp.* μ *differentiaalvormen in* X *van de graad* p*, resp.* q*, resp.* r*, dan gelden (5.3.4) en (5.3.6). Is* κ *een kaart voor* X*, dan zijn er voor iedere* p*-vorm* ω *in* X_κ *eenduidig bepaalde reëelwaardige functies* $\omega_{i(1),\dots,i(p)}$ *in* X_κ*, waarvoor*

$$\omega = \sum_{1 \le i(1) < \dots < i(p) \le n} \omega_{i(1),\dots,i(p)}\, \mathrm{d}\kappa_{i(1)} \wedge \mathrm{d}\kappa_{i(2)} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\kappa_{i(p)}. \tag{5.4.6}$$

Er geldt dat ω van de klasse C^k is, dan en slechts dan als de functies $\omega_{i(1),\dots,i(p)}$ van de klasse C^k zijn. Ook is $\omega \wedge \nu$ van de klasse C^k als ω en ν van de klasse C^k zijn.

Is Φ een differentieerbare afbeelding van X naar een variëteit Y, dan geldt

$$\Phi^*(\omega \wedge \nu) = (\Phi^*\omega) \wedge (\Phi^*\nu) \tag{5.4.7}$$

voor iedere p-vorm ω in Y en q-vorm ν in Y. $\Phi^*\omega$ is een p-vorm in X van de klasse C^k, als de p-vorm ω in Y van de klasse C^k is en Φ een C^{k+1}-afbeelding is van X naar Y. Is Ψ een differentieerbare afbeelding van Y naar een variëteit Z, dan geldt

$$\Phi^*(\Psi^*\omega) = (\Psi \circ \Phi)^*\omega \tag{5.4.8}$$

voor iedere p-vorm ω in Z.

Tenslotte, is v een vectorveld in X en is ω een p-vorm in X en ν een q-vorm in X, dan geldt (5.3.14). $\omega \cdot v$ is van de klasse C^k als ω en v van de klasse C^k zijn. Is Φ een lokaal diffeomorfisme van X naar een variëteit Y, dan is

$$\Phi^*(\omega \cdot v) = (\Phi^*\omega) \cdot (\Phi^*v) \tag{5.4.9}$$

voor iedere p-vorm ω in Y en ieder vectorveld v in Y.

De gedaante in lokale coördinaten is een gevolg van de opmerking dat als $(x_1, \dots, x_n)$ de coördinaten in $\mathbf{R}^n$ voorstellen, dan is $\mathrm{d}x_i$ constant gelijk aan de i-de standaard basisvector in $(\mathbf{R}^n)^* \simeq \mathbf{R}^n$. Dit betekent dat een C^k-differentiaalvorm van de graad p in een open deelverzameling V van $\mathbf{R}^n$ eruit ziet als

$$g = \sum_{1 \leq i(1) < i(2) < \dots < i(p) \leq n} g_{i(1),\dots,i(p)}(x)\, \mathrm{d}x_{i(1)} \wedge \mathrm{d}x_{i(2)} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i(p)}, \tag{5.4.10}$$

waarin de $g_{i(1),\dots,i(p)}(x)$ reëelwaardige C^k-functies van $x \in V$ zijn.

Is κ een kaart voor de variëteit X, dan zijn de C^k-differentiaalvormen van de graad p in X_κ precies de $\omega = \kappa^* g$ met g als boven. Gebruik makend van $\kappa^* x_i = \kappa_i$, dus $\kappa^* \mathrm{d}x_i = \mathrm{d}\kappa_i$, gecombineerd met de rekenregel (5.4.7), geeft dit (5.4.6) met

$$\omega_{i(1),\dots,i(p)} = \kappa^* g_{i(1),\dots,i(p)}.$$

Opmerking 5.4.1 In de klassieke literatuur ziet men vaak de definitie van een p-vorm als een formele uitdrukking van de vorm (5.4.10), waarin de $g_{i(1),\dots,i(p)}(x)$ reëelwaardige functies van x zijn en de $\mathrm{d}x_{i(1)} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i(p)}$ uitdrukkingen die niet nader gedefinieerd worden, maar waarvan geëist wordt dat ze aan de tot nu toe vermelde rekenregels voldoen. Dit leidt tot een consistent rekenschema. Hier zijn de rekenregels *aangetoond* als gevolg van de gegeven definities. Daar staat tegenover dat onze definitie van een p-vorm: "in ieder punt x, een antisymmetrische p-lineaire vorm in de raakruimte $\mathrm{T}_x X$", meer achtergrondkennis vereist dan de definitie: "een uitdrukking van de vorm (5.4.10)". $\oslash$

5.5 Uitwendige Afgeleide van p-vormen

We generaliseren nu de uitwendige afgeleide van 1-vormen uit §5.2. Met "$\omega \mapsto \mathrm{d}\omega$ is een eerste-orde partiële differentiaaloperator" bedoelen we dat voor iedere $x \in X$ het beeld $\mathrm{d}\omega_x$ alleen afhangt van x, ω_x en de eerste-orde afgeleiden van de coördinaten van ω in het punt x.

Stelling 5.5.1 *Zij X een n-dimensionale variëteit. Er is een afbeelding d, die aan iedere differentieerbare p-vorm ω in X een $(p+1)$-vorm $\mathrm{d}\omega$ in X toevoegt en die voor iedere kaart κ voor X gegeven wordt door de formule*

$$\begin{aligned} &\mathrm{d} \sum_{1 \leq i(1) < \ldots < i(p) \leq n} \omega_{i(1), \ldots, i(p)} \, \mathrm{d}\kappa_{i(1)} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\kappa_{i(p)} \\ &= \sum_{1 \leq i(1) < \ldots < i(p) \leq n} \mathrm{d}\omega_{i(1), \ldots, i(p)} \wedge \mathrm{d}\kappa_{i(1)} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\kappa_{i(p)} \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

in X_κ.

d *is een eerste-orde lineaire partiële differentiaaloperator. Voor $p = 0$ is $\mathrm{d}f$ de totale afgeleide van de functie f, in lokale coördinaten gegeven door*

$$\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x_j.$$

Voor $p = 1$ is d gelijk aan de uitwendige afgeleide uit §5.2.

Is ω een differentieerbare p-vorm en ν een differentieerbare q-vorm in X, dan is

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \nu) = \mathrm{d}\omega \wedge \nu + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\nu. \tag{5.5.2}$$

Is ω een p-vorm in X van de klasse C^2, dan is

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0. \tag{5.5.3}$$

Tenslotte, als Φ een differentieerbare afbeelding is van X naar een variëteit Y en ω is een differentieerbare p-vorm in Y, dan is

$$\Phi^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\Phi^*\omega). \tag{5.5.4}$$

Bewijs De identificatie voor $p = 0$ is evident. Voor $p = 1$ wordt (5.5.1) met $\kappa_i = x_i$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \mathrm{d}x_i &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\omega_i \wedge \mathrm{d}x_i = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j \omega_i \, \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \\ &= \sum_{i<j} (\partial_i \omega_j - \partial_j \omega_i) \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j. \end{aligned}$$

Toepassing op (e_i, e_j) voor alle $i < j$ geeft hetzelfde resultaat als de $\mathrm{d}\omega$ die in (5.2.1) is gedefinieerd.

We bewijzen nu eerst (5.5.2) in lokale coördinaten. Daarbij gebruiken we de multi-index notatie uit het bewijs van Stelling 5.3.3 en de basis $\varepsilon_i = \mathrm{d}x_i$. We krijgen

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega \wedge \nu) = \;& \mathrm{d}\,(\sum_{i\in I_p} \omega_i\, \varepsilon_i \wedge \sum_{j\in I_q} \nu_j\, \varepsilon_j) \\
&= \mathrm{d} \sum_{i\in I_p,\, j\in I_q} \omega_i\, \nu_j\, \varepsilon_i \wedge \varepsilon_j \\
&= \sum_{i\in I_p,\, j\in I_q} \mathrm{d}(\omega_i\, \nu_j) \wedge \varepsilon_i \wedge \varepsilon_j \\
&= \sum_{i\in I_p,\, j\in I_q} (\mathrm{d}\omega_i \wedge \nu_j + \omega_i \wedge \mathrm{d}\nu_j) \wedge \varepsilon_i \wedge \varepsilon_j \\
&= \mathrm{d}\omega \wedge \nu + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\nu.
\end{aligned}$$

Hierbij is bij de derde identiteit opgemerkt dat $\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j$ ófwel gelijk aan 0 is, ófwel gelijk aan $\pm\varepsilon_k$ voor zekere $k \in I_{p+q}$. In het tweede geval is de definitie (5.5.1) toegepast, waarna vervolgens $\pm\varepsilon_k$ weer teruggeschreven is als $\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j$. Voor de laatste identiteit is (5.3.6) gebruikt om $\mathrm{d}\nu_j$, door verwisseling met ε_i, vòòr ε_j te krijgen.

In lokale coördinaten krijgen we nu uit (5.5.2) dat

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i(1)} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i(p)}) = 0,$$

dus

$$\mathrm{d}(\mathrm{d} \sum_{i\in I_p} \omega_i\, \varepsilon_i) = \mathrm{d} \sum_{i\in I_p} \mathrm{d}\omega_i \wedge \varepsilon_i = \sum_{i\in I_p} \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega_i) \wedge \varepsilon_i = 0,$$

omdat $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$ voor iedere C^2-functie f, zie §5.2. Hiermee is tevens (5.5.3) in lokale coördinaten bewezen.

In principe hangt de definitie (5.5.1) nog van de keuze van lokale coördinaten af en hadden we d_κ moeten schrijven voor de operator d in (5.2.1). Nu geven echter (5.5.2) en (5.5.3) voor $\mathrm{d} = d_\kappa$, dat voor willekeurige differentieerbare functies f, $f_1, \ldots, f_p$ geldt dat

$$d_\kappa(f\, \mathrm{d}f_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_p) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}f_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_p. \tag{5.5.5}$$

Als we nu ω uitschrijven ten aanzien van een kaart λ,

$$\omega = \sum_{i\in I_p} \omega_i^\lambda \mathrm{d}\lambda_{i(1)} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\lambda_{i(p)}$$

en hierop d_κ loslaten, dan geeft (5.5.5), gecombineerd met de lineariteit van d_κ, dat

$$d_\kappa \omega = d_\lambda \omega \;\text{ in }\; X_\kappa \cap X_\lambda.$$

Dit bewijst dat de operator d onafhankelijk is van de keuze van lokale coördinaten en daarmee een eenduidig gedefinieerde differentiaaloperator is, werkend op differentieerbare differentiaalvormen in X.

Voor de laatste uitspraak hoeven we alleen het geval te bekijken dat $\omega = f \cdot \mathrm{d}f_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_p$, waarin f, $f_1, \ldots,$ f_p differentieerbare functies in Y zijn. Gebruik makend van (5.5.5), (5.4.7) en de kettingregel $\Phi^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\Phi^* f)$ voor de afgeleide van functies, zie (5.1.6), krijgen we

$$\begin{aligned}\Phi^*(\mathrm{d}\omega) &= \Phi^*(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}f_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_p) = \Phi^*(\mathrm{d}f) \wedge \Phi^*(\mathrm{d}f_1) \wedge \ldots \wedge \Phi^*(\mathrm{d}f_p)\\ &= \mathrm{d}(\Phi^* f) \wedge \mathrm{d}(\Phi^* f_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}(\Phi^* f_p) = \mathrm{d}(\Phi^* f \cdot \mathrm{d}(\Phi^* f_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}(\Phi^* f_p))\\ &= \mathrm{d}(\Phi^* f \cdot \Phi^*(\mathrm{d}f_1) \wedge \ldots \wedge \Phi^*(\mathrm{d}f_p)) = \mathrm{d}(\Phi^* \omega).\end{aligned}$$

□

De operator d in Stelling 5.5.1 heet de *uitwendige afgeleide van differentiaalvormen van de graad p.* $\omega \in \Omega^p(X)$ heet *gesloten* als $\mathrm{d}\omega = 0$. Zij heet *exact*, als er een $\nu \in \Omega^{p-1}(X)$ is, waarvoor $\omega = \mathrm{d}\nu$. Uit 5.5.3) lezen we af dat iedere exacte p-vorm gesloten is, één van onze volgende doelen zal zijn om te onderzoeken in hoeverre ook de omkering geldt.

Merk op dat als Φ een lokale coördinatentransformatie is, dan drukt (5.5.4) de invariantie van d onder coördinatentransformaties uit. (5.5.4) is echter veel algemener: er is niet geëist dat Φ een (lokaal) diffeomorfisme is; zelfs mag $\dim X < \dim Y$ of $\dim X > \dim Y$.

Is v een C^1-vectorveld in X dan kunnen we de stroming $e^{t\,v} : X^t \to X$ van v na tijd t gebruiken om de p-vorm ω in X terug te trekken tot p-vorm in X^t. Neem nu aan dat ω differentieerbaar is. Bij iedere $a \in X$ is er een open omgeving U van a in X en een $\varepsilon > 0$, waarvoor $U \subset X^t$ zodra $|t| < \varepsilon$. Dientengevolge definieert

$$\mathcal{L}_v \omega := \tfrac{d}{dt}|_{t=0} (e^{t\,v})^* \,\omega \tag{5.5.6}$$

een p-vorm $\mathcal{L}_v \omega$ in X, die de *Lie-afgeleide van ω naar het vectorveld v* genoemd wordt.

Lemma 5.5.2 *Zij ω een p-vorm in X en v een vectorveld in X, beiden continu differentieerbaar. Dan geldt $(e^{t\,v})^* \omega = \omega$ in X^t voor iedere $t \in \mathbf{R}$, dan en slechts dan als $\mathcal{L}_v \omega = 0$.*

Bewijs Als $(e^{t\,v})^* \omega = \omega$ voor alle t, dan geeft differentiatie naar t in $t = 0$ dat $\mathcal{L}_v \omega = 0$. Omgekeerd, als $\mathcal{L}_v \omega = 0$, dan gebruiken we Stelling 4.4.2 en (4.6.3) om te schrijven

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}(e^{t\,v})^* \omega = \tfrac{d}{dh}|_{h=0} (e^{(h+t)\,v})^* \omega = \tfrac{d}{dh}|_{h=0} (e^{h\,v} \circ e^{t\,v})^* \omega\\ &= \tfrac{d}{dh}|_{h=0} (e^{t\,v})^* ((e^{h\,v})^* \omega)) = (e^{t\,v})^* (\tfrac{d}{dh}|_{h=0} (e^{h\,v})^* \omega) = (e^{t\,v})^* \mathcal{L}_v \omega = 0.\end{aligned}$$

Hierin is in de vierde identiteit gebruikt dat $(e^{t\,v})^*$, in ieder punt $x \in X$ uitgeschreven, een continue lineaire operator is. De conclusie is dat de functie $t \mapsto (e^{t\,v})^* \omega$ constant is, dus gelijk aan zijn waarde voor $t = 0$, ofwel $(e^{t\,v})^* \omega = \omega$ voor alle t. □

Men noemt ω *invariant onder het diffeomorfisme* Φ, als $\Phi^* \omega = \omega$. Lemma 5.5.2 zegt dus dat ω invariant is onder de stroming van het vectorveld v, dan en slechts dan als $\mathcal{L}_v \omega = 0$. Men zegt in het laatste geval ook wel dat ω *invariant is onder het vectorveld v.*

Substitueren we $\Phi = e^{t\,v}$ in (5.4.7), resp. (5.5.4) en differentiëren we naar t in $t = 0$, dan zien we dat

$$\mathcal{L}_v(\omega \wedge \nu) = (\mathcal{L}_v \omega) \wedge \nu + \omega \wedge (\mathcal{L}_v \nu), \tag{5.5.7}$$

$$\mathcal{L}_v(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\mathcal{L}_v \omega). \tag{5.5.8}$$

Hierin is $v \in \mathcal{V}^1(X)$, $\omega \in \Omega^{p,\,1}(X)$, $\nu \in^{q,\,1}(X)$. Voor (5.5.8) nemen we aan dat $\omega \in \Omega^{p,\,2}(X)$ en gebruiken we de continuïteit van d, beschouwd als lineaire differentiaaloperator van $\Omega^{p,\,k+1}(X)$ naar $\Omega^{p+1,\,k}(X)$.

Is u een C^1-vectorveld, dan zouden we analoog de Lie-afgeleide van u naar v kunnen definiëren. Gebruik makend van (4.6.7) en (4.7.1), krijgen we echter:

$$\mathcal{L}_v u := \frac{d}{dt}_{t=0}(e^{t\,v})^*\,u = \frac{d}{dt}(e^{-t\,v})_*\,u = -[v,\,u] = [u,\,v], \tag{5.5.9}$$

hetgeen leidt tot een interpretatie van de Lie-haakjes $[u,\,v]$ als Lie-afgeleide van u naar v.

Is Φ een lokaal diffeomorfisme, dan is

$$e^{t\,v} \circ \Phi = \Phi \circ e^{t\,\Phi^* v},$$

zie (4.6.6). Hiermee ω terugtrekkend en differentiërend naar t in $t = 0$, geeft

$$\Phi^*(\mathcal{L}_v\omega) = \mathcal{L}_{\Phi^* v}(\Phi^*\omega). \tag{5.5.10}$$

Meer substantieel is de volgende zogenaamde *homotopieformule*

Lemma 5.5.3 *Als ω een p-vorm in X is en v een vectorveld in X, beiden continu differentieerbaar, dan is*

$$\mathcal{L}_v\omega = \mathrm{d}(i_v\omega) + i_v(\mathrm{d}\omega), \tag{5.5.11}$$

met dien verstande dat $\mathcal{L}_v\omega = i_v(\mathrm{d}\omega)$ als $p = 0$.

Bewijs Met inductie naar p. Voor $p = 0$ is dit de kettingregel, toegepast op $t \mapsto f(e^{t\,v}(x))$. We veronderstellen nu dat de formule geldt voor alle $\omega \in \Omega^{k-1,\,1}(X)$. Als $\beta = \mathrm{d}\alpha$, $\alpha \in \Omega^{k-1,\,2}(X)$, dan is, vanwege (5.5.8) en (5.5.3):

$$\mathcal{L}_v\beta = \mathrm{d}(\mathcal{L}_v\alpha) = \mathrm{d}\circ\mathrm{d}\circ i_v\alpha + \mathrm{d}\circ i_v\circ\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\circ i_v\beta.$$

Als $\gamma = f\,\beta$ met $f \in \mathrm{C}^1(X)$, dan krijgen, gebruik makend van (5.5.7), (5.3.14) en (5.5.2):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_v(\gamma) &= (\mathcal{L}_v f)\,\beta + f\,(\mathcal{L}_v\beta) = (i_v\mathrm{d}f)\,\beta + f\,\mathrm{d}\circ i_v\beta\\ &= i_v((\mathrm{d}f)\wedge\beta) + (\mathrm{d}f)\wedge(i_v\beta) + f\,\mathrm{d}(i_v\beta) = i_v(\mathrm{d}(f\,\beta)) + \mathrm{d}(f\,i_v\beta) = i_v(\mathrm{d}\gamma) + \mathrm{d}(i_v\gamma).\end{aligned}$$

Hierbij is in de vierde identiteit nog $\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0$ gebruikt. Nu is $\mathcal{L}_v$ een lineaire differentiaaloperator en lokaal is iedere $\omega \in \Omega^{k,\,1}(X)$ gelijk aan een som van eindig veel γ's als boven, omdat

$$\mathrm{d}x_{i(1)} \wedge \mathrm{d}x_{i(2)} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i(p)} = \mathrm{d}(x_{i(1)} \cdot \mathrm{d}x_{i(2)} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i(p)}).$$

Daarmee is (5.5.11) geldig voor alle $\omega \in \Omega^{k,\,1}(X)$. $\square$

De formule (5.5.11) is gemakkelijk te onthouden: $i_v : \Omega^p \to \Omega^{p-1}$ en $\mathrm{d} : \Omega^{p-1} \to \Omega^p$ geeft $\mathrm{d}\circ i_v : \Omega^p \to \Omega^p$, terwijl $\mathrm{d} : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$ en $i_v : \Omega^{p+1} \to \Omega^p$ geeft dat ook $i_v \circ \mathrm{d} : \Omega^p \to \Omega^p$. Blijkbaar is de differentiaaloperator $\mathcal{L}_v : \Omega^p \to \Omega^p$ de som van beide.

(5.5.11) kan gebruikt worden om de uitwendige afgeleide van p-vormen met inductie naar p in termen van de Lie-afgeleide te berekenen. Immers $i_v\omega$ is een $(p-1)$-vorm, waarvan de uitwendige afgeleide bekend verondersteld wordt en dan lezen we $\mathrm{d}\omega$ uit

$$i_v(\mathrm{d}\omega) = \mathcal{L}_v\omega - \mathrm{d}(i_v\omega)$$

af door voor iedere $x \in X$ en $w \in \mathrm{T}_x X$ een lokaal C^1-vectorveld v in te vullen met $v(x) = w$.

De naam homotopieformule komt van de volgende toepassing. Zij φ_s, $s \in [0, 1]$, een homotopie van afbeeldingen van een willekeurige variëteit T naar X, we nemen aan dat

$$\Phi : (s, t) \mapsto \varphi_s(t)$$

een C^2-afbeelding is van $[0, 1] \times T$ naar X. Anders dan in §5.2 hoeft t hier niet één-dimensionaal te zijn; om niet-triviale resultaten te verkrijgen is zelfs nodig dat $\dim T \geq p$. Merk op dat

$$\varphi_s = \Phi \circ \iota_s,$$

waarin

$$\iota_s : t \mapsto (s, t) : T \to [0, 1] \times T.$$

Verder is

$$\iota_{s+h} = \tau_h \circ \iota_s,$$

waarin $\tau_h : (s, t) \mapsto (s + h, t)$ de stroming na tijd h in $\mathbf{R} \times X$ is van het vectorveld $\partial/\partial s$. Dit geeft:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{ds}{\varphi_s}^*\omega = \tfrac{d}{ds}\,(\Phi \circ \iota_s)^*\,\omega = \tfrac{d}{ds}{\iota_s}^*(\Phi^*\omega) \\
&= \tfrac{d}{dh}\big|_{h=0}(\tau_h \circ \iota_s)^*(\Phi^*\omega) = {\iota_s}^*(\mathcal{L}_{\partial/\partial s}(\Phi^*\omega)) \\
&= {\iota_s}^* \circ [\mathrm{d} \circ i_{\partial/\partial s} + i_{\partial/\partial s} \circ \mathrm{d}] \circ \Phi^*\omega \\
&= \mathrm{d} \circ {\iota_s}^* \circ i_{\partial/\partial s} \circ \Phi^*\omega + {\iota_s}^* \circ i_{\partial/\partial s} \circ \Phi^* \circ \mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

Definiëren we nu de *homotopie-operator* $H : \Omega^q(X) \to \Omega^{q-1}(T)$ door

$$H\alpha = \int_0^1 {\iota_s}^* \circ i_{\partial/\partial s} \circ \Phi^*\alpha\, ds, \tag{5.5.12}$$

dan krijgen we uit het bovenstaande door integratie over s van $s = 0$ naar $s = 1$, dat

$${\varphi_1}^*\omega - {\varphi_0}^*\omega = \mathrm{d}(H\omega) + H(\mathrm{d}\omega). \tag{5.5.13}$$

Dit impliceert het volgende *homotopieprincipe*:

Stelling 5.5.4 *Is ω een gesloten differentiaalvorm in X en is zijn de afbeeldingen $\varphi_0 : T \to X$ en $\varphi_1 : T \to X$ homotoop, dan is het verschil van ${\varphi_1}^*\omega$ en ${\varphi_0}^*\omega$ een exacte differentiaalvorm in T.*

De variëteit X heet *samentrekbaar*, indien er een homotopie Φ als boven bestaat, met $T = X$, $\varphi_0(X) = \{a\}$ voor een punt a in X en $\varphi_1 = \mathrm{id}$, de identiteit in X. Merk op dat hierbij, voor iedere $x \in X$, $\varphi_s(x)$ in X van x naar a loopt als s van 1 naar 0 gaat, dus X trekt "in X naar het punt a als s van 1 naar 0 gaat". Omdat in dit geval $\mathrm{T}_x\,\varphi_0 = 0$ voor iedere $x \in X$, is ${\varphi_0}^*\omega = 0$ voor iedere differentiaalvorm ω van graad $p > 0$. Dit leidt tot:

Stelling 5.5.5 *Zij X een samentrekbare variëteit en ω een p-vorm in X van de klasse C^k. Veronderstel dat $p > 0$, $k \geq 1$ en $\mathrm{d}\omega = 0$. Dan is er een $(p-1)$-vorm ν in X van de klasse C^k, waarvoor $\omega = \mathrm{d}\nu$.*

Iedere $a \in X$ heeft een open omgeving U in X heeft die in U samentrekbaar is. Dus, als $\mathrm{d}\omega = 0$, dan is de vergelijking $\mathrm{d}\nu = \omega$ in U oplosbaar. De uitspraak

Lokaal is iedere gesloten differentiaalvorm exact.

heet het *Poincaré-lemma*.

Anders dan in §5.2, krijgen we hier niet dat noodzakelijkerwijze ν van de klasse C^{k+1} is, dit komt omdat d, werkend op p-vormen met $p > 1$, verre van de totale afgeleide is.

Opmerking 5.5.1 Zij X een willekeurige variëteit, waaraan alleen de zwakke technische voorwaarde wordt opgelegd dat zij de vereniging is van aftelbaar veel compacte deelverzamelingen. Beschouwen we $\mathrm{d} = \mathrm{d}_p$ als lineaire afbeelding van $\Omega^p(X)$ naar $\Omega^{p+1}(X)$, dan geeft (5.5.3) dat het beeld van d_{p-1} bevat is in de nulruimte van d_p. De quotiëntruimte

$$H^p_{\mathrm{deRham}}(X) := \ker(\mathrm{d}_p) / \operatorname{beeld}(\mathrm{d}_{p-1}) \tag{5.5.14}$$

heet de *de Rham-cohomologie* van de variëteit X. Het is een ontdekking van Georges de Rham uit de 1930-er jaren, dat deze op kanonieke wijze isomorf is met cohomologie-ruimten van X, zoals die in de algebraïsche topologie worden ingevoerd, op een meer combinatorische manier. Zie [13, Ch. 4]. $\oslash$

5.6 Integratie

Zij φ een C^1-diffeomorfisme van een open deelverzameling U van $\mathbf{R}^n$ naar een open deelverzameling V van $\mathbf{R}^n$. Zij f een integreerbare reëelwaardige functie in V, hierbij mag naar verkiezing voor "integreerbaar" Riemann-integreerbaar of Lebesgue-integreerbaar gelezen worden. Dan geldt de volgende *formule voor substitutie van variabelen in een n-dimensionale integraal*:

$$\int_V f(y)\, dy = \int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det(\mathrm{D}\,\varphi(x))|\, dx, \tag{5.6.1}$$

waarbij de integrand in het rechterlid integreerbaar is in U. Zie bijvoorbeeld Analyse C, §5.6.

Men noemt de coördinatentransformatie φ *oriëntatiebehoudend*, als $\det(\mathrm{D}\,\varphi(x)) > 0$ voor alle $x \in U$; in dat geval kunnen de absolute-waardestrepen in (5.6.1) weggelaten worden. Noteren we de *standaard n-vorm in $\mathbf{R}^n$* met

$$\mathrm{d}_n x := \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n, \tag{5.6.2}$$

dan geven (5.4.3) en (5.3.16) dat

$$f(\varphi(x)) \det(\mathrm{D}\,\varphi(x))\, \mathrm{d}_n x = \varphi^*(f\, \mathrm{d}_n x).$$

Bijgevolg kunnen we (5.6.1) schrijven als

$$\int_V \omega = \int_U \varphi^* \omega, \tag{5.6.3}$$

als we de integraal $\int_V \omega$ over V van de n-vorm $\omega := f\, \mathrm{d}_n x$ definiëren als $\int_V f(x)\, dx$. Men zegt:

Integratie van n-vormen is invariant is onder oriëntatiebehoudende coördinatentransformaties.

Deze invariantie maakt het mogelijk om een integratie van n-vormen over een n-dimensionale variëteit X te definiëren, die niet afhangt van de keuze van lokale coördinaten. Daartoe maken we eerst nog een paar voorbereidingen. De opmerkingen ertussendoor kunnen bij eerste lezing worden overgeslagen.

Definitie 5.6.1 Een atlas $\mathcal{A}$ voor X heet *georiënteerd*, als voor iedere $\kappa, \lambda \in \mathcal{A}$ de coördinatentransformatie $\varphi = \lambda \circ \kappa^{-1}$ oriëntatiebehoudend is. Een *georiënteerde variëteit* is een paar $(X, \mathcal{A})$ bestaande uit een variëteit X en een georiënteerde atlas $\mathcal{A}$ voor X. Hierbij worden twee georiënteerde atlassen als equivalent beschouwd, als ze samen weer een georiënteerde atlas vormen. De maximale georiënteerde atlas $\mathcal{B}$ voor X, die met $\mathcal{A}$ equivalent is, bestaat dan uit alle kaarten μ waarvoor $\mu \circ \kappa^{-1}$ oriëntatiebehoudend is voor iedere $\kappa \in \mathcal{A}$. Een variëteit X heet *oriënteerbaar*, als zij van een georiënteerde atlas kan worden voorzien, men noemt de keuze van een georiënteerde atlas ook wel een *oriëntatie* van X. $\oslash$

Opmerking 5.6.1 Zij X een n-dimensionale variëteit en ω een continue n-vorm in X, met $\omega_x \neq 0$ voor iedere $x \in X$. Voor iedere kaart κ voor X geldt dan

$$\omega = f_\kappa \, \kappa^* \mathrm{d}_n x,$$

voor een continue functie f_κ in X_κ. Omdat

$$\lambda^*(\mathrm{d}_n x) = \kappa^*(\lambda \circ \kappa^{-1})^* \mathrm{d}_n x = \det \mathrm{D}(\lambda \circ \kappa^{-1})(\kappa(x)) \cdot \kappa^* \mathrm{d}_n x,$$

zien we dat

$$f_\kappa(x) = f_\lambda(x) \cdot \det \mathrm{D}(\lambda \circ \kappa^{-1})(\kappa(x)), \quad x \in X_\kappa \cap X_\lambda. \tag{5.6.4}$$

Omdat $\omega_x \neq 0$ is $f_\kappa(x) \neq 0$ voor alle $x \in X_\kappa$. Omdat f_κ continu is, is

$$X_\kappa^{\pm} := \{x \in X_\kappa \mid \pm f_\kappa(x) > 0\}$$

een open deelverzameling van X_κ. We hebben $X_\kappa = X_\kappa^+ \cup X_\kappa^-$.

Zij nu S een coördinatentransformatie in $\mathbf{R}^n$, waarvoor $S^* \mathrm{d}_n x = -\mathrm{d}_n x$, bijvoorbeeld

$$S : (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n). \tag{5.6.5}$$

Definieer de kaart κ^+ in X_κ door $\kappa^+(x) = \kappa(x)$ als $x \in X_\kappa^+$ en $\kappa^+(x) = S \circ \kappa(x)$ als $x \in X_\kappa^-$. De kaarten κ^+, waarbij κ een willekeurige atlas voor X doorlopen, vormen dan een atlas $\mathcal{A}^+$ voor X met de eigenschap dat

$$f_\mu(x) > 0, \quad x \in X_\mu, \ \mu \in \mathcal{A}^+.$$

Uit (5.6.4) lezen we af dat $\mathcal{A}^+$ een georiënteerde atlas is. Men noemt deze oriëntatie van X de *positieve oriëntatie met betrekking tot de volume-vorm* ω en omgekeerd de n-vorm ω *positief ten opzichte van de oriëntatie* $\mathcal{A}_+$. Merk op, dat een willekeurige volume-vorm ν positief is ten opzichte van $\mathcal{A}^+$, dan en slechts dan als $\nu = f \cdot \omega$ en $f(x) > 0$ voor alle $x \in X$.

In het bijzonder hebben we bewezen:

Is er in de n-dimensionale variëteit X een continue n-vorm ω met $\omega_x \neq 0$ voor iedere $x \in X$, dan is X oriënteerbaar.

$\oslash$

Opmerking 5.6.2 Om het combinatorisch-topologische karakter van oriënteerbaarheid te illustreren, beschouwen we voor ieder paar kaarten κ, λ voor X de functie $o_{\lambda,\kappa}(x) : X_\kappa \cap X_\lambda \to \{+1, -1\}$, gedefinieerd door

$$o_{\lambda,\kappa}(x) := \operatorname{sgn}\det \mathrm{D}(\lambda \circ \kappa^{-1})(\kappa(x)), \quad x \in X_\kappa \cap X_\lambda.$$

Deze functie is continu = lokaal constant = constant in de samenhangscomponenten van $X_{\lambda,\kappa}$. Verder lezen we uit de kettingregel en (5.3.17) af dat

$$o_{\mu,\kappa} = o_{\mu,\lambda} \cdot o_{\lambda,\kappa} \ \text{ in } \ X_\kappa \cap X_\lambda \cap X_\mu. \tag{5.6.6}$$

Een atlas $\mathcal{A}_o$ is georiënteerd, dan en slechts dan als $o_{\lambda,\kappa} = 1$ voor alle κ, $\lambda \in \mathcal{A}_o$. De volgende uitspraken a)-c) zijn nu equivalent.

a) X is oriënteerbaar.

b) Voor iedere atlas $\mathcal{A}$ voor X is er een collectie van lokaal constante functies $o_\kappa : X_\kappa \to \{+1, -1\}$, $\kappa \in \mathcal{A}$, met de eigenschap dat

$$o_{\lambda,\kappa} = o_\lambda / o_\kappa \ \text{ in } \ X_\kappa \cap X_\lambda, \tag{5.6.7}$$

voor alle κ, $\lambda \in \mathcal{A}$.

c) Er is een atlas $\mathcal{A}$ voor X met de in b) genoemde eigenschap.

Bewijs a) $\Rightarrow$ b) Als $\mathcal{A}_o$ een georiënteerde atlas voor X is, dan is er bij iedere $\mu \in \mathcal{A}$, $x \in X_\mu$, een $\kappa \in \mathcal{A}_o$ met $x \in X_\kappa$; daarvoor definiëren we

$$o_\mu(x) := o_{\mu,\kappa}(x).$$

Deze definitie is onafhankelijk van de keuze van κ, want als $\lambda \in \mathcal{A}_o$, $x \in X_\lambda$, dan geven $o_{\lambda,\kappa} = 1$ en (5.6.6) dat $o_{\mu,\kappa}(x) = o_{\mu,\lambda}(x)$. Is anderzijds $\lambda \in \mathcal{A}$, dan impliceert (5.6.6) meteen (5.6.7).

b) $\Rightarrow$ c) is evident.

c) $\Rightarrow$ a) Stel $\mathcal{A}$ is een atlas voor X, met functies o_κ, $\kappa \in \mathcal{A}$ als genoemd in b). Zij $S \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ met $\det S = -1$, bijvoorbeeld

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n).$$

Voor $\kappa \in \mathcal{A}$, $x \in X_\kappa$, definiëren we $\tilde{\kappa}(x) = \kappa(x)$ als $o_\kappa(x) = 1$ en $\tilde{\kappa}(x) = S \circ \kappa(x)$ als $o_\kappa(x) = -1$. Met deze constructie is $o_{\kappa,\tilde{\kappa}} = o_\kappa$, dus

$$o_{\tilde{\lambda},\tilde{\kappa}} = o_{\tilde{\lambda},\lambda} \cdot o_{\lambda,\kappa} \cdot o_{\kappa,\tilde{\kappa}} = o_\lambda^{-1} \cdot o_{\lambda,\kappa} \cdot o_\kappa = 1$$

in $X_\kappa \cap X_\lambda = X_{\tilde{\kappa}} \cap X_{\tilde{\lambda}}$. Dit betekent dat de $\tilde{\kappa}$, met $\kappa \in \mathcal{A}$, een georiënteerde atlas voor X vormen. $\square$

De lezer die schovencohomologie kent, zal opgemerkt hebben dat de $o_{\lambda,\kappa}$ een element $[o]$ definieert van de eerste cohomologiegroep van X met waarden in $\{\pm 1\}$ en dat X oriënteerbaar is, dan en slechts dan als $[o] = 1$.

Het is duidelijk dat iedere open deelverzameling van $\mathbf{R}^n$ oriënteerbaar is. Ook is de cirkel en de n-dimensionale torus oriënteerbaar. Dat de n-dimensionale sfeer oriënteerbaar is, kan ingezien worden door c) op de stereografische projecties toe te passen. Door b) toe te passen ziet men dat het projectieve vlak, de Möbiusband en de Klein'se fles niet oriënteerbaar zijn. $\oslash$

De tweede voorbereiding betreft een techniek om differentiaalvormen te schrijven als som van eindig veel differentiaalvormen die alleen maar "leven", dat is niet gelijk aan nul zijn, in vooraf gekozen coördinaatomgevingen. Dit zal het mogelijk maken om de definitie van integratie van differentiaalvormen en het bewijs van formules hiervoor terug te brengen tot berekeningen in geschikt gekozen lokale coördinaten.

Als ω een p-vorm is in X, dan wordt de *drager* $\operatorname{supp}\omega$ van ω gedefinieerd als de afsluiting in X van de verzameling der $x \in X$, waarvoor $\omega_x \neq 0$. Anders gezegd, $a \notin \operatorname{supp}\omega$ betekent dat er een open omgeving U van a in X is, met de eigenschap dat $\omega_x = 0$ voor alle $x \in U$.

Lemma 5.6.1 *Zij X een variëteit, K een compacte deelverzameling van X en U_j, $j \in J$ een open overdekking van K. Dan zijn er eindig veel $f_1, \dots, f_N \in \mathrm{C}^\infty(X)$ met de volgende eigenschappen.*

a) Bij iedere $1 \leq i \leq N$ is er een $j = j(i)$, waarvoor $\operatorname{supp} f_i$ *een compacte deelverzameling is van U_j.*

b) $f_i(x) \geq 0$ voor iedere $x \in X$, $1 \leq i \leq N$.

c) Er is een open omgeving U van K in X, waarvoor

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(x) = 1 \quad \text{voor alle} \quad x \in U.$$

Als de variëteit X compact is, dan kunnen we in het bovenstaande $K = U = X$ nemen.

Bewijs Bij iedere $a \in K$ is er een $j = j_a$, waarvoor $a \in U_j$. Het bewijs van Lemma 4.5.1 gaf bij iedere $a \in K$ een $\chi_a \in \mathrm{C}^\infty(X)$, waarvoor $\chi_a \geq 0$, $\operatorname{supp}\chi_a$ is een compacte deelverzameling van U_j en $\chi_a(a) > 0$. Dan is

$$V_a := \{x \in X \mid \chi_a(x) > 0\}$$

een open omgeving van a in K. De V_a, $a \in K$ vormen een open overdekking van K, er zijn daarom eindig veel $a(1), \dots, a(N) \in K$, waarvoor

$$K \subset V := \bigcup_{i=1}^{N} V_{a(i)}.$$

Beschouw nu

$$\chi := \sum_{i=1}^{N} \chi_{a(i)} \in \mathrm{C}^\infty(X).$$

Als $x \in V$, dan is er een i met $x \in V_{a(i)}$, dus $\chi_{a(i)}(x) > 0$. Omdat de bijdrage van de andere summanden ≥ 0 is, is de conclusie dat $\chi(x) > 0$. Het is nu verleidelijk om te definiëren

$$f_i(x) = \tfrac{\chi_{a(i)}(x)}{\chi(x)}$$

als $x \in V$ en $f_i(x) = 0$ als $x \in X \setminus V$. Immers, dan is $f_i|_V \in \mathrm{C}^\infty(V)$,

$$\mathrm{supp}\ f_i = \mathrm{supp}\ \chi_{a(i)} \subset U_{j_{a(i)}}$$

en $\sum f_i = 1$ in V. Het probleem met deze definitie is echter dat $\sum f_i = 0$ in $X \setminus V$, dus $\sum f_i$ is discontinu aan de rand van V in X. Deze rand is niet-leeg, als bijvoorbeeld X samenhangend is en niet compact. Dit betekent dat er i zijn waarvoor f_i zelfs niet continu is.

Om dit probleempje op te lossen, merken we op dat de afsluiting supp $\chi_{a(i)}$ van $V_{a(i)}$ compact is, dus ook $\bar{V}$ en daarmee ook de rand ∂V van V. De voorgaande constructie herhalend met K vervangen door ∂V en de U_j, $j \in J$ door de éne open verzameling $X \setminus K$, krijgen we in de rol van χ een $\psi \in \mathrm{C}^\infty(X)$ met $\psi \geq 0$, $\psi > 0$ in een open omgeving W van ∂V en supp $\psi \subset X \setminus K$. We definiëren nu

$$\begin{aligned} f_i(x) &:= \tfrac{\chi_{a(i)}(x)}{\chi(x)+\psi(x)}, \quad x \in V \cup W, \\ f_i(x) &:= 0, \quad x \in X \setminus \bar{V}. \end{aligned}$$

Beide functies zijn C^∞ in hun open definitiegebieden en komen overeen (zijn allebei nul) in de doorsnede daarvan, dus hun gemeenschappelijke uitbreiding is een C^∞-functie in $V \cup W \cup (X \setminus \bar{V}) = X$. We hebben verder dat $\sum f_i(x) = 1$ als $x \in U := V \setminus \mathrm{supp}\ \psi$; U is een open deelverzameling van X en $K \subset U$. □

Een collectie functies $f_i \in \mathrm{C}^\infty(X)$ met de eigenschappen a)-c) in Lemma 5.6.1 heet een C^∞-*opdeling van één over* K *en onderworpen aan de open overdekking* U_j, $j \in J$. Een toepassing hievan is, dat als ω een p-vorm is van de klasse C^k in X, $k \leq \infty$, dan voldoen de $\omega_i := f_i \cdot \omega$, $i \in I$ aan:

$$\omega_i \in \Omega^{p,\,k}(X), \tag{5.6.8}$$

$$\mathrm{supp}\ \omega_i \subset U_j \text{ voor zekere } j = j(i) \in J, \tag{5.6.9}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = \omega \text{ in een open omgeving van } K. \tag{5.6.10}$$

In de toepassingen zal men voor U_j coördinaatomgevingen nemen, eigenschap (5.6.9) zegt dat de ω_i alleen in de coördinaatomgeving $U_{j(i)}$ "leeft".

Opmerking 5.6.3 Zij X oriënteerbaar. Een toepassing van Lemma 5.6.1 is de existentie, voor iedere compacte deelverzameling K van X, van een C^∞ n-vorm ω in X met $\omega_x \neq 0$ voor alle x in een open omgeving U van K in X. Als X compact is en $K = U = X$, dan is dit een omkering van Opmerking 5.6.1.

Voor het bewijs, zij $\mathcal{A}$ een georiënteerde atlas voor X. Zij f_i een C^∞ opdeling van één, onderworpen aan de overdekking X_κ, $\kappa \in \mathcal{A}$, dus supp $f_i \subset X_{\kappa(i)}$. De n-vorm

$$\omega_i := f_i\, \kappa(i)^* (\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n)$$

is van de klasse C^∞ en $K_i := \mathrm{supp}\ \omega_i \subset X_{\kappa(i)}$, deze uitbreidend met $\omega_i(x) = 0$ voor $x \in X \setminus K_i$, krijgen we een C^∞ n-vorm ω_i in X. De n-vorm

$$\omega := \sum_{i=1}^{N} \omega_i$$

heeft nu de gewenste eigenschappen. Dat $\omega_x \neq 0$ volgt uit het feit dat in lokale coördinaten iedere summand van de vorm $g_i \, \mathrm{d}_n x$ is, met $g_i \geq 0$, terwijl voor minstens één i geldt dat $g_i(\kappa(x)) > 0$. Dit maakt dat $\left(\kappa^{-1}\right)^* \omega = g \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ met $g(\kappa(x)) > 0$, dus $\omega_x \neq 0$. Hier hebben we gebruikt dat $\left(\kappa^{-1}\right)^* \kappa(i)^* \mathrm{d}_n x = h \, \mathrm{d}_n x$ voor een strikt positieve functie h, dankzij de georiënteerdheid van de atlas waar κ en $\kappa(i)$ toe behoren.

$\oslash$

Opmerking 5.6.4 De variëteit X heet *paracompact* als iedere samenhangscomponent S geschreven kan worden als de vereniging van een aftelbare collectie van compacte deelverzamelingen. (Voor algemene topologische ruimten ziet de definitie van paracompactheid er anders uit, maar voor variëteiten is die definitie met de bovenstaande equivalent.) Alle in de praktijk optredende variëteiten zijn paracompact.

Is X niet compact, maar wel paracompact, dan bestaan er opdelingen van één over X in de volgende zin.

Een collectie A_i, $i \in I$, van deelverzamelingen van X heet *lokaal eindig* als er bij iedere $a \in X$ een open omgeving U van a in X is, met de eigenschap dat er maar eindig veel i in de indexverzameling I zijn, waarvoor $A_i \cap U \neq \emptyset$.

Is ω_i, $i \in I$, een collectie van p-vormen in X, waarvoor de collectie van dragers $\operatorname{supp} \omega_i$, $i \in I$, lokaal eindig is, dan is er voor iedere $a \in X$ een open omgeving U van a in X, waarvoor de som

$$\sum_{i \in I} \omega_i(x) := \sum_{i \in I, \, \operatorname{supp} \omega_i \cap U \neq \emptyset} \omega_i(x), \quad x \in U$$

eindig is. Dit geeft dat $\sum_{i \in I} \omega_i$ niet alleen een goed gedefinieerde p-vorm in X is, maar ook van de klasse C^k is, als ω_i van de klasse C^k is voor iedere $i \in I$.

De stelling is nu, dat als X paracompact is en U_j, $j \in J$ is een open overdekking is van X, dan is er een collectie $f_i \in \mathrm{C}^\infty(X)$, $i \in I$, met de volgende eigenschappen α)-δ).

α) Bij iedere $i \in I$ is er een $j = j(i) \in J$, waarvoor $\operatorname{supp} f_i$ een compacte deelverzameling is van U_j.

β) $f_i(x) \geq 0$ als $i \in I$, $x \in X$.

γ) De $\operatorname{supp} f_i$, $i \in I$, vormen een lokaal eindige collectie van deelverzamelingen van X.

δ) Voor iedere $x \in X$ geldt

$$\sum_{i \in I} f_i(x) = 1.$$

Een collectie $f_i \in \mathrm{C}^\infty(X)$ met deze eigenschappen heet een *opdeling van één in X, onderworpen aan de open overdekking U_j, $j \in J$.* Voor een bewijs van deze stelling, zie bijvoorbeeld §5.5 in [1].

Net als in Opmerking 5.6.3 krijgen we dat als X een paracompacte oriënteerbare variëteit is, dan is er een C^∞ volume-vorm ω in X, waarvoor $\omega_x \neq 0$ voor alle $x \in X$. Dit is een omkering van Opmerking 5.6.1 voor paracompacte variëteiten. $\oslash$

Definitie 5.6.2 Zij X een georiënteerde n-dimensionale variëteit, met maximale georiënteerde atlas $\mathcal{A}$. Als $\kappa \in \mathcal{A}$ en ω een n-vorm in X is met compacte drager, $\operatorname{supp} \omega \subset X_\kappa$, dan heet ω

integreerbaar met betrekking tot κ, als $(\kappa^{-1})^*\omega = f \cdot \mathrm{d}_n x$ voor een integreerbare functie f in de open deelverzameling $\kappa(X_\kappa)$ van $\mathbf{R}^n$. De integraal

$$\int_{X,\,\kappa} \omega = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx$$

noemen we provisorisch de *integraal van* ω *met betrekking tot* κ.

Een willekeurige n-vorm ω in X met compacte drager in X heet *integreerbaar*, indien er een opdeling van één $f_1, \dots, f_N$ over $\operatorname{supp}\omega$ is, met bijbehorende $\kappa(i) \in \mathcal{A}$, met de eigenschap dat, voor iedere $1 \le i \le N$, $\operatorname{supp} f_i$ een compacte deelverzameling is van $X_{\kappa(i)}$ en $f_i \cdot \omega$ integreerbaar is met betrekking tot $\kappa(i)$. Is dit het geval, dan heet

$$\int_X \omega = \sum_{i=1}^{N} \int_{X,\,\kappa(i)} f_i \cdot \omega$$

de *integraal van* ω *over de georiënteerde variëteit* X. $\oslash$

Stelling 5.6.2 *Definitie 5.6.2 is onafhankelijk van de keuze van de opdeling* f_i *van één en de kaarten* $\kappa(i) \in \mathcal{A}$.

Bewijs Als $\kappa, \lambda \in \mathcal{A}$ en ω is een n-vorm met compacte drager bevat in $X_\kappa \cap X_\lambda$, dan is

$$(\lambda^{-1})^*\omega = (\kappa \circ \lambda^{-1})^* \circ (\kappa^{-1})^*\omega.$$

Uit (5.6.3) volgt daarom dat ω integreerbaar is met betrekking tot λ, dan en slechts dan als ω integreerbaar is met betrekking tot κ en, is dit het geval, dan is

$$\int_{X,\,\lambda} \omega = \int_{X,\,\kappa} \omega.$$

Stel nu dat ω integreerbaar is als in Definitie 5.6.2. Zij g_j, $1 \le j \le M$ een andere opdeling van één over $\operatorname{supp}\omega$, $\lambda(j) \in \mathcal{A}$ en $\operatorname{supp} g_j$ is een compacte deelverzameling van $X_{\lambda(j)}$. Omdat $f_i \cdot \omega$ integreerbaar is met betrekking tot $\kappa(i)$ en g_j een begrensde continue functie is, geeft Lemma 5.6.3 hieronder dat $g_j \cdot f_i \cdot \omega$ integreerbaar is met betrekking tot $\kappa(i)$. De drager hiervan is bevat in $\operatorname{supp} g_j \cap \operatorname{supp} f_i$ en is daarmee een compacte deelverzameling van $X_{\lambda(j)} \cap X_{\kappa(i)}$. Bijgevolg is $g_j \cdot f_i \cdot \omega$ integreerbaar met betrekking tot $\lambda(j)$. Sommatie over i geeft dat $g_j \cdot \omega$ integreerbaar is met betrekking tot $\lambda(j)$. Sommatie over j geeft vervolgens dat

$$\sum_{j=1}^{M} \int_{X,\,\lambda(j)} g_j \cdot \omega = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} \int_{X,\,\lambda(j)} g_j \cdot f_i \cdot \omega = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \int_{X,\,\kappa(i)} g_j \cdot f_i \cdot \omega = \sum_{i=1}^{N} \int_{X,\,\kappa(i)} f_i.$$

$\square$

Is D een deelverzameling van X, dan is de *karakteristieke functie van* D de functie 1_D in X, waarvoor $1_D(x) = 1$ als $x \in K$ en $1_D(x) = 0$ als $x \in X \setminus D$. Uit de theorie van Lebesgue-integratie is bekend :

Lemma 5.6.3 *Zijn f en g (Riemann-, resp. Lebesgue-)integreerbare functies in $\mathbf{R}^n$ en is g begrensd, dan is $g \cdot f$ (Riemann-, resp. Lebesgue-)integreerbaar in $\mathbf{R}^n$. Iedere continue functie met compacte drager is integreerbaar. Is K een compacte deelverzameling van $\mathbf{R}^n$, dan is 1_K Lebesgue-integreerbaar (en begrensd).*

In het vervolg kan voor "integreerbaar" naar verkiezing Riemann-integreerbaar of Lebesgue-integreerbaar gelezen worden.

Stelling 5.6.4 *Zij X een n-dimensionale georiënteerde variëteit. Dan geldt:*

a) Voor iedere continue n-vorm ω in X en compacte deelverzameling K van X is $1_K \cdot \omega$ integreerbaar over X.

b) De afbeelding $\omega \mapsto \int_X \omega$ is lineair, van de lineaire ruimte der integreerbare n-vormen in X met compacte drager, naar $\mathbf{R}$.

c) Is $-X$ dezelfde variëteit, maar voorzien van de tegengestelde oriëntatie, dan is

$$\int_{-X} \omega = -\int_X \omega,$$

voor iedere integreerbare n-vorm ω in X met compacte drager.

d) Is Φ een oriëntatiebehoudend diffeomorfisme van X naar een georiënteerde variëteit Y en is ω een integreerbare n-vorm in Y met compacte drager, dan is $\Phi^*\omega$ een integreerbare n-vorm in X met compacte drager en

$$\int_X \Phi^*\omega = \int_Y \omega.$$

Bewijs Voor a) merken we op dat $\text{supp}\,(1_K \cdot \omega)$ bevat is in K, dus compact is. Verder is

$$(\kappa(i)^{-1})^*(f_i \cdot 1_K \cdot \omega)/\mathrm{d}_n x$$

gelijk aan het product van de continue functie

$$(\kappa(i)^{-1})^*(f_i \cdot \omega)/\mathrm{d}_n x$$

en de karakteristieke functie van de compacte deelverzameling

$$\kappa(i)(K \cap \text{supp } f_i)$$

van $\kappa(i)\,(X_{\kappa(i)})$, zo'n functie is integreerbaar vanwege Lemma 5.6.3.

In d) betekent de voorwaarde dat Φ oriëntatie-behoudend is, dat $\lambda \circ \Phi \circ \kappa^{-1}$ oriëntatie-behoudend is, voor iedere κ in de georiënteerde atlas $\mathcal{A}$ voor X en λ in de georiënteerde atlas $\mathcal{B}$ voor Y. Als

$$\text{supp } \omega \subset Y_\lambda \cap \Phi(X_\kappa),$$

dan is

$$\begin{aligned}\int_Y \omega &= \int_{\mathbf{R}^n} (\lambda^{-1})^*\omega \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} (\lambda\circ\Phi\circ\kappa^{-1})^* \circ (\lambda^{-1})^*\omega \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} (\kappa^{-1})^*\Phi^*\omega = \int_X \Phi^*\omega,\end{aligned}$$

waarin de tweede identiteit een gevolg is van (5.6.3). Een willekeurige integreerbare ω met compacte drager kunnen we, door middel van een geschikte opdeling van één, schrijven als een som van eindig veel ω_i's als boven, dus

$$\begin{aligned}&\int_Y \omega = \int_Y \sum_{i=1}^N \omega_i = \sum_{i=1}^N \int_Y \omega_i \\ &\sum_{i=1}^N \int_X \Phi^*\omega_i = \int_X \sum_{i=1}^N \Phi^*\omega_i = \int_X \Phi^* \sum_{i=1}^N \omega_i = \int_X \Phi^*\omega.\end{aligned}$$

$\square$

Is K een compacte deelverzameling van X, en is ω integreerbaar met compacte drager, dan is ook $1_K \cdot \omega$ integreerbaar met compacte drager. Dit volgt uit de corresponderende uitspraak in lokale coördinaten, gecombineerd met Lemma 5.6.3. Zie Stelling 5.6.4 en het bewijs daarvan. Men noemt

$$\int_K \omega := \int_X 1_K \cdot \omega$$

de *integraal van ω over K*, waarbij in de gaten gehouden moet worden dat hierbij de oriëntatie van X niet in de notatie is uitgedrukt, terwijl die toch essentieel is. Merk op dat d) in Stelling 5.6.4 geeft dat

$$\int_K \Phi^*\omega = \int_{\Phi(K)} \omega, \tag{5.6.11}$$

omdat

$$1_K \cdot \Phi^*\omega = \Phi^*(1_{\Phi(K)} \cdot \omega),$$

immers $\Phi(x) \in \Phi(K) \Leftrightarrow x \in K$, dus $\Phi^*(1_{\Phi(K)}) = 1_K$.

Is ω een continue, positieve volume-vorm in X met betrekking tot de oriëntatie van X, en is K een compacte deelverzameling van X, dan heet

$$\mathrm{vol}_\omega(K) := \int_K \omega$$

het *n-dimensionale volume van K met betrekking tot ω*. Er geldt dat $\mathrm{vol}_\omega(K) \geq 0$ en $\mathrm{vol}_\omega(K) > 0$ als K een niet-leeg inwendige heeft.

De beperking dat ω een compacte drager heeft, dat wil zeggen, dat slechts over compacte deelverzamelingen van X geïntegreerd wordt, kan met behulp van limietprocedures weggewerkt worden. Net zoals bij de definitie van oneigenlijke integralen in $\mathbf{R}^n$, welke ruimte tenslotte ook niet compact is. We schrijven de details hiervan niet verder uit.

In de praktijk worden integralen *niet* uitgerekend met behulp van C^∞-opdelingen van één, maar door een overdekking van supp ω met eindig veel coördinaatomgevingen $X_{\kappa(i)}$ te nemen en te schrijven

$$\int_X \omega = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} (\kappa(i)^{-1})^*\omega, \quad \text{waarin} \tag{5.6.12}$$

$$V_i := \kappa(i)(D_i), \quad D_i := X_{\kappa(i)} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_{\kappa(j)}). \tag{5.6.13}$$

Probleem: $D_i \cap \operatorname{supp} \omega$ is weliswaar een gesloten deelverzameling van $X_{\kappa(i)}$, maar in het algemeen niet compact. Bijvoorbeeld, als X compact is en $\operatorname{supp}\omega = X$, dan is $D_1 \cap \operatorname{supp}\omega = X_{\kappa(1)}$ homeomorf met een open deelverzameling van $\mathbf{R}^n$, dus niet compact. Bijgevolg hoeft ook

$$1_{V_i} \cdot (\kappa(i)^{-1})^*\omega$$

geen compacte drager te hebben en moet de integraal hiervan als oneigenlijke integraal opgevat worden.

(5.6.13) is in deze zin geldig. Bewijsidee: neem een C^∞-opdeling f_i van één met supp $f_i \subset X_{\kappa(i)}$, waarbij f_i de karakteristieke functie van D_i benadert.

Voorbeeld 5.6.1 Zij S de $(n-1)$-dimensionale sfeer met straal 1 in $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. De inverse van de stereografische projectie κ^+ is de afbeelding

$$\varphi : y \mapsto \tfrac{1}{\|y\|^2+1}(2y,\, \|y\|^2 - 1) : \mathbf{R}^{n-1} \to S.$$

Dit is een rationaal diffeomorfisme van $\mathbf{R}^{n-1}$ naar het complement in S van het punt e_n. Omdat de $(n-1)$-dimensionale integraal van een functie met drager in één enkel punt gelijk aan nul is, is de conclusie dat de $(n-1)$-vorm ω in S integreerbaar is, dan en slechts dan als $\varphi^*\omega$ integreerbaar is in $\mathbf{R}^{n-1}$; in dit geval is bovendien

$$\int_S \omega = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi^*\omega.$$

Hierbij is S van de georiënteerde atlas voorzien waar κ^+ toe behoort. $\oslash$

Opmerking 5.6.5 Als X een n-dimensionale deelvariëteit van $\mathbf{R}^p$ is en f een reëelwaardige functie in X, dan heeft men ook de *Euclidische n-dimensionale integraal $\int_X f(x)\,dx$ van f over X*, zie bijvoorbeeld Analyse C, Hoofdstuk 6.

Is X georiënteerd, dan is er precies één n-vorm ω in X met de volgende eigenschappen:

a) ω is positief met betrekking tot de gegeven oriëntatie van X, als in Opmerking 5.6.1.

b) Voor iedere $x \in X$ en iedere orthonormale basis $e_1, \ldots, e_n$ van de n-dimensionale lineaire deelruimte $\mathrm{T}_x X$ van $\mathbf{R}^p$, is
$$|\omega_x(e_1, \ldots, e_n)| = 1.$$

Men noemt deze standaard n-vorm ω in X ook wel de *Euclidische n-vorm in de georiënteerde n-dimensionale deelvariëteit X van $\mathbf{R}^p$.*

Het verband tussen Euclidische integratie en integratie van differentiaalvormen over georiënteerde deelvariëteiten van $\mathbf{R}^p$ is nu, dat $f(x)$ Euclidisch integreerbaar is over X, dan en slechts dan als de n-vorm $f \cdot \omega$ integreerbaar is over X; in dit geval is bovendien

$$\int_X f(x)\, dx = \int_X f \cdot \omega.$$

Is $(X,\, \beta)$ een pseudo-Riemann-variëteit als in §6.1 en is X georiënteerd, dan heeft men een analoge standaard volume-vorm ω in X. Deze is vastgelegd door de eisen dat ω positief is met betrekking tot de oriëntatie en voldoet aan

$$|\omega_x(v_1, \ldots, v_n)| = 1$$

als $v_j \in \mathrm{T}_x\, X$, $\beta_x(v_i,\, v_j) = 0$ als $i \neq j$ en $|\beta_x(v_i,\, v_i)| = 1$.

$\oslash$

5.7 De Stelling van Stokes

Zij X een n-dimensionale georiënteerde variëteit, α een gladde $(n-1)$-vorm in X, K een compacte deelverzameling van X waarvan de rand ∂K een $(n-1)$-dimensionale gladde deelvariëteit van X is. Als i de identiteit is, beschouwd als afbeelding van ∂K naar X, dan is $i^*\alpha$ een volume-vorm in de $(n-1)$-dimensionale variëteit ∂K. We zullen zien dat ∂K een oriëntatie "erft" van X; de $(n-1)$-dimensionale integraal van $i^*\alpha$ over ∂K wordt de integraal $\int_{\partial K} \alpha$ van α over ∂K genoemd. De stelling van Stokes zegt nu dat deze integraal gelijk is aan de integraal over K van de continue n-vorm $\mathrm{d}\alpha$.

Als voorbereiding onderzoeken we eerst wat het betekent dat van een deelverzameling D van X de rand ∂D bevat is in een $(n-1)$-dimensionale C^k-deelvariëteit S van X. Hierin nemen we aan dat $k \geq 1$.

Voor iedere $a \in S$ is er een C^k-kaart κ in een open omgeving X_κ van a in X, waarvoor:

a) $A := \kappa(X_\kappa) = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, met I_j een open interval in $\mathbf{R}$, $0 \in I_1$.

b) $\kappa(S) = A_0 := \{0\} \times B$, waarin $B = I_2 \times \ldots \times I_n$.

Zie Definitie 2.6.1.

Schrijf

$$A_\pm = \{x \in A \mid \pm x_1 > 0\}.$$

We gebruiken nu dat κ een homeomorfisme is van X_κ naar A. Dan is

$$V_\pm := \kappa(D^{\text{int}} \cap X_\kappa) \cap A_\pm$$

een open deelverzameling van $A_\pm$. De afsluiting van $V_\pm$ in A is bevat in

$$\kappa(\bar{D} \cap X_\kappa) \subset \kappa(D^{\text{int}} \cap X_\kappa) \cup \kappa(\partial D \cap X_\kappa) \subset V_+ \cup V_- \cup A_0.$$

Hieruit lezen we af dat $V_\pm$ ook gesloten is in $A_\pm$. Omdat $A_\pm$ samenhangend is, concluderen we dat $V_\pm = \emptyset$ of $V_\pm = A_\pm$. In het geval dat $V_+ = \emptyset$ en $V_- = \emptyset$ concluderen we dat $D \cap X_\kappa \subset S$. Is anderzijds $V_+ = A_+$ en $V_- = A_-$, dan is $X_\kappa \subset \bar{D}$. Is tenslotte $V_+ = A_+$ en $V_- = \emptyset$, dan kunnen we, door een spiegeling in de eerste variabele uit te voeren, ervoor zorgen dat $V_- = A_-$ en $V_+ = \emptyset$. Is $n \geq 2$, dan kunnen we bovendien daarbij de oriëntatie behouden, door ook in de laatste variabele een spiegeling uit te voeren. We hebben bewezen:

Lemma 5.7.1 *Zij D een deelverzameling van een n-dimensionale variëteit X en veronderstel dat de rand ∂D van D in X bevat is in een $(n-1)$-dimensionale C^k-deelvariëteit S van X, met $k \geq 1$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

a) Bij iedere $a \in \partial D$ is er een C^k-kaart in een open omgeving X_κ van a in X, met de eigenschap dat

$$A := \kappa(X_\kappa) = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n,$$

met I_j open intervallen in $\mathbf{R}$, $0 \in I_1$ en

$$\begin{aligned} \kappa(D^{\mathrm{int}} \cap X_\kappa) &= \{x \in A \mid x_1 < 0\}, \\ \kappa(\bar{D} \cap X_\kappa) &= \{x \in A \mid x_1 \leq 0\}, \\ \kappa(\partial D \cap X_\kappa) &= \{x \in A \mid x_1 = 0\}. \end{aligned}$$

b) $\bar{D}$ is gelijk aan de afsluiting van D^{int} en D^{int} is gelijk aan het inwendige van $\bar{D}$.

We zeggen dat D een *deelverzameling met C^k-rand ∂D van X* is, als aan de voorwaarde a), resp. b) van Lemma 5.7.1 is voldaan. Dit impliceert dat ∂D een $(n-1)$-dimensionale C^k-deelvariëteit is van X. Merk ook op dat $\partial D = \bar{D} \setminus D^{\mathrm{int}}$ een gesloten deelverzameling van X is. De voorwaarde b) van Lemma 5.7.1 sluit het geval uit dat bijvoorbeeld D zèlf een $(n-1)$-dimensionale deelvariëteit van X is, in welk geval $\partial D = D$. Of dat D het complement is van een $(n-1)$-dimensionale deelvariëteit van X is, in welk geval $\partial D = X \setminus D$.

Is $a \in \partial D$ en κ een kaart als in Lemma 5.7.1, a), dan is

$$\mathrm{T}_a(\partial D) = \ker \mathrm{d}\kappa_1(a).$$

Dit impliceert dat, als $v \in \mathrm{T}_a X$, $v \notin \mathrm{T}_a(\partial D)$, dan is $\mathrm{d}\kappa_1(a) \cdot v > 0$ of $\mathrm{d}\kappa_1(a) \cdot v < 0$. In het eerste geval is er bij iedere differentieerbare kromme γ met $\gamma(0) = a$ en $\gamma'(0) = v$ een $\varepsilon > 0$, waarvoor $\gamma(t) \in D^{\mathrm{int}}$ als $-\varepsilon < t < 0$ en $\gamma(t) \notin \bar{D}$ als $0 < t < \varepsilon$; in het tweede geval is het net andersom. Dit zien we uit Lemma 5.7.1, a) door het teken van $\kappa_1(\gamma(t))$ te onderzoeken, daarbij gebruikend dat

$$\tfrac{d}{dt}\kappa_1(\gamma(t))\big|_{t=0} = \mathrm{d}\kappa_1(a) \cdot v.$$

In het eerste geval zeggen we dat v *bij D naar buiten prikt* en in het tweede geval dat v *bij D naar binnen prikt.*

De *oriëntatie van ∂D* is nu die, waarvoor de $(n-1)$-vorm $i^*(\omega \cdot v)$ in ∂D positief is, als de n-vorm ω in X positief is ten opzichte van de oriëntatie van X en v naar buiten prikt. Hierbij gebruiken we de terminologie van Opmerking 5.6.1. De definities daarin kunnen ook per punt $a \in \partial D$ gegeven worden, voor $(n-1)$-vormen in $\mathrm{T}_a(\partial D)$ en n-vormen in $\mathrm{T}_a X$.

Merk op dat als ook $\tilde{\omega}$ een positieve n-vorm in X is en $\tilde{v}$ bij D naar buiten prikt, dan is

$$i^*(\tilde{\omega} \cdot \tilde{v}) = c \cdot i^*(\omega \cdot v) \tag{5.7.1}$$

voor een $c > 0$, dus de oriëntatie van ∂D hangt niet af van de keuze van ω en v, alleen van "aan welke kant van ∂D de verzameling D^{int} ligt". Voor het bewijs gebruiken we dat $\tilde{\omega} = a \cdot \omega$ voor een $a > 0$ en $\tilde{v} = b \cdot v + w$ met $w \in \mathrm{T}_a(\partial D)$. Omdat $i^*(\omega \cdot w) = 0$, krijgen we (5.7.1) met $c = a \cdot b$.

Met deze definities geldt nu de volgende *stelling van Stokes*:

Stelling 5.7.2 *Zij X een n-dimensionale georiënteerde C^2-variëteit, K een compacte deelverzameling met C^2-rand ∂K in X, α een continu differentieerbare $(n-1)$-vorm in X. Dan geldt*

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K \mathrm{d}\alpha. \tag{5.7.2}$$

Is X compact, dan is $\int_X \mathrm{d}\alpha = 0$.

Bewijs Zij $\mathcal{A}$ de georiënteerde C^2-atlas van X. Als $a \in \partial K$, dan is er een $\kappa = \kappa_a \in \mathcal{A}$ als in Lemma 5.7.1, a). (Als $n = 1$, dan moeten we oriëntatie-omkerende kaarten toelaten, we laten de uitwerking hiervan aan de lezer over.) Als $a \in K^{\mathrm{int}}$, dan is er een $\kappa = \kappa_a \in \mathcal{A}$ met $X_\kappa \subset K^{\mathrm{int}}$; dit kan opgevat worden als een kaart als in Lemma 5.7.1, a), maar nu met $I_1 \subset]-\infty, 0[$.

De X_{κ_a}, $a \in K$, vormen een open overdekking $\mathcal{U}$ van K, zij f_i een C^1-opdeling van één over K, onderworpen aan $\mathcal{U}$, zie Lemma 5.6.1. De $\alpha_i := f_i \cdot \alpha$ zijn dan continu differentieerbare $(n-1)$-vormen in X met compacte drager,

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp} \alpha_i \subset X_{\kappa_{a(i)}} \ \text{ en} \\ &\sum_{i=1}^N \alpha_i = \alpha \ \text{ in een open omgeving van } \ K. \end{aligned}$$

De lineariteit gebruikend van de uitwendige differentiatie en van integratie over K, resp. ∂K, volgt (5.7.2) uit (5.7.2) met α vervangen door α_i. We mogen daarom in het vervolg aannemen dat $\operatorname{supp} \alpha \subset X_\kappa$, met κ een C^2-kaart als in Lemma 5.7.1, a).

Omdat κ een C^2-diffeomorfisme is en α een C^1-differentiaalvorm, is $\beta := (\kappa^{-1})^* \alpha$ een C^1-differentiaalvorm in $\mathbf{R}^n$, die we kunnen schrijven in de gedaante

$$\beta := \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \beta_j(x)\, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n, \tag{5.7.3}$$

met C^1-functies β_j. Hierin betekent het dakje dat de desbetreffende factor wordt weggelaten. De eerste basisvector e_1 prikt naar buiten, dus

$$\mathrm{d}_n x \cdot e_1 = \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$$

is positief met betrekking tot de oriëntatie van de rand $x_1 = 0$. Dit geeft dat

$$\int_{x_1=0} i^*\beta = \int_{x_1=0} \beta_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \beta_1(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Anderzijds hebben we

$$\mathrm{d}\beta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \beta_j}{\partial x_j}(x)\mathrm{d}_n x. \tag{5.7.4}$$

We gebruiken nu bij de berekening van de integraal van β over $\mathbf{R}^n$, dat de β_j C^1-functies zijn met compacte drager in $\mathbf{R}^n$. Voor $j \neq 1$ krijgen we dat de integraal van $\partial\beta_j/\partial x_j$ over $x_j \in \mathbf{R}$ gelijk is aan het verschil van de waarden van β_j voor $x_j \to \infty$ en voor $x_j \to -\infty$, dus gelijk aan 0. Voor $j = 1$ krijgen we

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1}(x)\, dx_1 = \beta_1(0,\, x_2, \ldots,\, x_n).$$

Dit bewijst (5.7.2).

De laatste uitspraak volgt uit $\partial K = \emptyset$ als $K = X$.

$\square$

Opmerking 5.7.1 Wij hebben hier gekozen voor integratie over compacte deelverzamelingen K met C^1 rand ∂K in een differentieerbare variëteit X. In de literatuur ziet men ook de definitie van *variëteit met rand*. Dit is een object als K, maar zonder dat het als deelverzameling worden gedefinieerd van een variëteit X, welke laatste dan als “variëteit zonder rand” wordt opgevat. De stelling van Stokes wordt dan gepresenteerd als een stelling voor variëteiten met rand. In de praktijk is er niet veel verschil met de hier gegeven stelling. $\oslash$

Is β als in (5.7.3) en is v het vectorveld in $\mathbf{R}^n$ met coördinaatsfuncties gelijk aan $\beta_i(x)$, dan is

$$\beta = \mathrm{d}_n x \cdot v.$$

Deze opmerking in lokale coördinaten laat zien dat algemener, als ω een C^k n-vorm in X is met $\omega_x \neq 0$ voor alle $x \in X$, dan is er bij iedere $(n-1)$-vorm α in X een eenduidig bepaald vectorveld v in X, waarvoor

$$\alpha = \omega \cdot v. \tag{5.7.5}$$

v is van de klasse C^k als $\alpha \in \mathrm{C}^k$.

Omdat $\mathrm{d}\omega$ een $(n+1)$-vorm is, is $\mathrm{d}\omega = 0$ en lezen we uit (5.5.11) af dat

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d} \circ i_v \omega = \mathcal{L}_v \omega$$

Anderzijds is

$$\mathcal{L}_v \omega = f \cdot \omega$$

voor een eenduidig bepaalde reëelwaardige functie f, deze is C^{k-1}. Men noemt $f = \mathcal{L}_v\omega/\omega$ de *divergentie* $\operatorname{div}_\omega v$ *van het vectorveld* v *met betrekking tot de volume-vorm* ω.

Als X een open deelverzameling is in $\mathbf{R}^n$ en $\omega = \mathrm{d}_n x$, de standaard n-vorm in $\mathbf{R}^n$, dan spreekt men over de divergentie zonder meer en laat men ω uit de notatie weg. Uit (5.7.4) lezen we af:

$$\operatorname{div} v(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x), \tag{5.7.6}$$

als de $v_j(x)$ de coördinaatsfuncties van v zijn. Lemma (5.5.2) geeft:

Lemma 5.7.3 *De volume-vorm ω is invariant onder de v-stroming dan en slechts dan als* $\operatorname{div}_\omega v = 0$.

Met deze relatie tussen vectorvelden en $(n-1)$-vormen wordt de stelling van Stokes vertaald in volgende *stelling van Gauss*:

Stelling 5.7.4 *Zij X een georiënteerde n-dimensionale C^2-variëteit, ω een continu differentieerbare n-vorm in X met $\omega_x \neq 0$ voor iedere $x \in X$. Zij verder v een continu differentieerbaar vectorveld in X en K een compacte deelverzameling met C^2 rand ∂K in X. Dan geldt:*

$$\int_{\partial K} \omega \cdot v = \int_K \operatorname{div}_\omega v \cdot \omega = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \int_{e^{t\,v}(K)} \omega. \tag{5.7.7}$$

Bewijs Voor de tweede identiteit merken we op dat

$$\begin{aligned}\int_K \mathcal{L}_v\omega &= \int_K \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} (e^{t\,v})^*\omega \\ &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \int_K (e^{t\,v})^*\omega = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \int_{e^{t\,v}(K)} \omega,\end{aligned}$$

zie (5.6.11). □

Men beschouwt (5.7.7) ook wel als een *wet van massabehoud*, door ω als een massadichtheid op te vatten, $\operatorname{div}_\omega v(x)$ als de relatieve productie van massa in het punt x en $i^*(\omega \cdot v)$ als de massastroomdichtheid door de rand naar buiten.

Dikwijls gebruikt men een variant van de stelling van Stokes, waarbij γ een C^2-afbeelding is van K naar een variëteit Y van willekeurige dimensie $p \geq n$. De beperking van γ tot ∂K wordt met $\partial\gamma$ aangeduid. Voor een continue n-vorm μ in Y schrijven we

$$\int_\gamma \mu := \int_K \gamma^*\mu$$

voor de *integraal van μ over γ*. Analoog hebben we

$$\int_{\partial\gamma} \alpha = \int_{\partial K} \gamma^*\alpha$$

voor een continue $(n-1)$-vorm α in Y.

De regel (5.5.4) gebruikend leidt (5.7.2) nu tot de volgende *stelling van Stokes voor integratie over afbeeldingen*:

Stelling 5.7.5 *Zij K een compacte deelverzameling met C^2-rand ∂K in een n-dimensionale georiënteerde C^2-variëteit. Zij verder γ een C^2-afbeelding van K naar een variëteit Y van willekeurige dimensie; noteer $\partial\gamma = \gamma|_{\partial K}$. Dan geldt*

$$\int_{\partial\gamma} \alpha = \int_\gamma \mathrm{d}\alpha, \tag{5.7.8}$$

voor iedere continu differentieerbare $(n-1)$-vorm α in Y.

Is X een C^2-deelvariëteit van Y, dan schrijft men (5.7.8) weer in de gedaante (5.7.2), waarbij men voor γ de identiteit neemt, beschouwd als afbeelding van X naar Y. Ook voor algemene afbeeldingen γ denkt men bij de integraal over γ, resp. $\partial\gamma$ meer aan het beeld $\gamma(K)$, resp. $\gamma(\partial K)$ in Y, dan aan de afbeelding γ. Dit hangt samen met de opmerking dat (5.6.11) ertoe leidt dat

$$\int_{\gamma\circ\Phi} \mu = \int_\gamma \mu$$

voor ieder diffeomorfisme Φ.

De stelling van Stokes voor integratie over afbeeldingen zijn we in Stelling 5.2.1 al tegengekomen met de X in (5.7.8) vervangen door $\mathbf{R}^2$, Y door X, γ door Γ en K door de rechthoek $R = [0,\,\sigma]\times[0,\,\tau]$. Nu heeft R geen C^1 rand, maar het is gemakkelijk na te gaan dat de vier hoekpunten geen problemen vormen. Dit illustreert dat het nuttig kan zijn om generalisaties van de stelling van Stokes te beschouwen, waarbij randen worden toegelaten die niet al te wilde verzamelingen van singuliere punten hebben.

5.8 In $\mathbf{R}^2$ en in $\mathbf{R}^3$

Als X een open deelverzameling is van $\mathbf{R}^2$, dus $n = 2$, dan is een $(n-1)$-vorm een differentiaalvorm g als in §5.1. In termen hiervan wordt (5.7.2) de klassieke *formule van Green*:

$$\int_{\partial K} (g_1\,\mathrm{d}x_1 + g_2\,\mathrm{d}x_2) = \int_K \left(\tfrac{\partial g_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2. \tag{5.8.1}$$

Men noemt de functie

$$\operatorname{rot} g := \tfrac{\partial g_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial g_1}{\partial x_2}$$

de *rotatie* van de differentiaalvorm g in het vlak. Men gebruikt dezelfde naam ook voor een vectorveld g in het vlak met coördinaatsfuncties g_1 en g_2. In dit geval dient het linkerlid geïnterpreteerd te worden als

$$\int_a^b \langle g(\gamma(t)),\, \gamma'(t)\rangle\, dt,$$

als γ een gesloten kromme is die ∂K in de positieve richting doorloopt. Men ziet dit vaak genoteerd als

$$\int_{\partial K} g(x)\cdot dx = \int_K \operatorname{rot} g(x)\, dx, \tag{5.8.2}$$

waarbij de integratie links 1-dimensionaal en rechts 2-dimensionaal is. De punt $\cdot$ in de linkerintegraal herinnert aan het inproduct. De naam rotatie herinnert aan het rondlopen op de rand ∂K, die uit eindig veel gesloten krommen bestaat.

In de gedaante van (5.7.7) geeft

$$\mathrm{d}_2x\cdot v = v_1\cdot \mathrm{d}x_2 - v_2\cdot \mathrm{d}x_1$$

de *formule van Gauss in* $\mathbf{R}^2$:

$$\int_{\partial K} (v_1\cdot \mathrm{d}x_2 - v_2\cdot \mathrm{d}x_1) = \int_K \operatorname{div} v(x)\, dx. \tag{5.8.3}$$

Beschouwen we X als een open verzameling van het complexe vlak $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$ en is $f(z)$, $z = x+iy$, een complexwaardige functie in X, dan definieert men de *complexe* 1-*vorm* $f(z)\,\mathrm{d}z$ in X door

$$f(z)\,\mathrm{d}z := f(z)\,(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = f(z)\,\mathrm{d}x + i f(z)\,\mathrm{d}y. \tag{5.8.4}$$

Deze onderscheidt zich van de algemene complexwaardige 1-vorm $f_1(z)\,\mathrm{d}x + f_2(z)\,\mathrm{d}y$ door de eigenschap dat (5.8.4) in ieder punt $z \in X$ een complex-lineaire vorm in de raakruimte is.

Is $f(z)$ continu differentieerbaar, dan geeft (5.8.1):

$$\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_K (i\tfrac{\partial}{\partial x} - \tfrac{\partial}{\partial y})\,f(z)\,dx\,dy. \tag{5.8.5}$$

Is $f(z)$ complex-differentieerbaar, dat wil zeggen

$$\tfrac{\partial f}{\partial y} = i\tfrac{\partial f}{\partial x},$$

dan concluderen we hieruit de *integraalstelling van Cauchy voor complex-analytische functies*:

$$\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{5.8.6}$$

Blijkbaar geldt voor complex-analytische functies $f(z)$ dat $\mathrm{d}(f(z)\mathrm{d}z) = 0$. De integraal van $f(z)\mathrm{d}z$ over krommen is dus ook homotopie-invariant is, zoals in §5.2.

In $\mathbf{R}^3$ luidt (5.7.7):

$$\begin{aligned}&\int_K (\tfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \tfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + \tfrac{\partial v_3}{\partial x_3})\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &= \int_{\partial K} (v_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + v_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + v_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2),\end{aligned} \tag{5.8.7}$$

dit heet ook wel de *divergentiestelling*.

Is K een compacte deelverzameling van een twee-dimensionale gladde deelvariëteit X van $\mathbf{R}^3$ en heeft K een één-dimensionale gladde rand ∂K in X, dan is (5.7.2) de *klassieke stelling van Stokes*:

$$\int_{\partial K} (g_1\,\mathrm{d}x_1 + g_2\,\mathrm{d}x_2 + g_3\,\mathrm{d}x_3) = \int_K (r_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + r_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + r_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2), \tag{5.8.8}$$

waarin de vector

$$\begin{aligned} r_1 &:= \partial_2 g_3 - \partial_3 g_2 \\ r_2 &:= \partial_3 g_1 - \partial_1 g_3 \\ r_3 &:= \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 \end{aligned} \tag{5.8.9}$$

de *rotatie* $\operatorname{rot} g$ *van* g voorstelt.

Men ziet (5.8.8) vaak geschreven in termen van Euclidische integratie over K. Daartoe hebben we nog een paar extra begrippen nodig.

Zij X een n-dimensionale georiënteerde variëteit, ω een n-vorm in X die positief is met betrekking tot de oriëntatie van X. Een basis $e_1, \ldots, e_n$ in $\mathrm{T}_x X$ heet *positief georiënteerd*, als $\omega_x(e_1, \ldots, e_n) > 0$.

Voor X als in (5.8.8) voert men nu, voor iedere $x \in X$, de vector $n(x) \in \mathbf{R}^3$ in, met de eigenschap dat als e_1, e_2 een positief georiënteerde orthonormale basis is van $\mathrm{T}_x X$, dan is $n(x)$, e_1, e_2

een positief georiënteerde orthonormale basis in $\mathbf{R}^3$. Merk op dat $n(x)$ loodrecht staat op (de raakruimte in x aan) het opppervlak X en lengte gelijk aan 1 heeft. Er zijn twee vectoren met deze eigenschappen, de keuze hiertussen is gemaakt op grond van de oriëntatie van X. Men noemt $n(x)$ de *positief georiënteerde normaal op* X.

Anderzijds voeren we voor iedere $t \in \partial K$ in de vector $e(t) \in \mathrm{T}_t\, \partial K$ in ter lengte 1, die positief georiënteerd is met betrekking tot de oriëntatie van ∂K. Dit is de snelheidsvector van het op ∂K rondlopen in de positieve richting en met constante snelheid gelijk aan 1. Nu luidt (5.8.8) in termen van Euclidische integratie:

$$\int_{\partial K} \langle g(t),\, e(t)\rangle\, dt = \int_K \langle \operatorname{rot} g(x),\, n(x)\rangle\, dx. \tag{5.8.10}$$

Hier staat links 1-dimensionale Euclidische integratie en rechts 2-dimensionale Euclidische integratie. Immers, als $u,\, v \in \mathrm{T}_x\, K$, dan is de integrand in het rechterlid van (5.8.8), toegepast op $(u,\, v)$, gelijk aan

$$r_1\, (u_2\, v_3 - v_2\, u_3) + r_2\, (u_3\, v_1 - v_3\, u_1) + r_3\, (u_1\, v_2 - v_1\, u_2),$$

het inproduct van $\operatorname{rot} g(x)$ met het uitwendige product $u \times v$ van u en v. Kiezen we voor $u,\, v$ een orthonormale basis van $\mathrm{T}_x\, K$ met de goede oriëntatie, dan is $u \times v = n(x)$, terwijl het Euclidische oppervlak van het parallellogram opgespannen door u en v gelijk is aan 1. Dit bewijst (5.8.10).

In de praktijk is (5.8.8) handiger dan (5.8.10), omdat voor een diffeomorfisme φ van een open deel V van $\mathbf{R}^2$ naar X de 2-vorm $\varphi^*(\mathrm{d}g) = \mathrm{d}(\varphi^* g)$ gemakkelijk uitgerekend en geïntegreerd kan worden. Het uitrekenen van $n(x)$, het inproduct hiervan met $\operatorname{rot} g(x)$ en tenslotte de Euclidische integraal over K is meestal bewerkelijker.

5.9 Opgaven

5.9.1 Zij $v = v_1(x,\, y)\, \partial/\partial x + v_2(x, y)\, \partial/\partial y$, resp. $g = g_1(x,\, y)\, \mathrm{d}x + g_2(x,\, y)\, \mathrm{d}y$ een vectorveld, resp. differentiaalvorm in een open deelverzameling van $\mathbf{R}^n$, met coördinaten $(x,\, y)$. Bereken v en g in poolcoördinaten. En het inproduct $v \cdot g$. Bepaal het vectorveld $v(x,\, y)$ dat in poolcoördinaten gelijk is aan $\partial/\partial r$, resp. $\partial/\partial \varphi$. En de differentiaalvorm $g(x,\, y)$ die in poolcoördinaten gelijk is aan $\mathrm{d}r$, resp. $\mathrm{d}\varphi$.

5.9.2 De *multiplicatorenmethode van Lagrange* kan in de volgende vorm geformuleerd worden. Zij Z de gemeenschappelijke nulpuntsverzameling in de variëteit X van de functies $f_j \in C^1(X,\, \mathbf{R})$, $1 \leq j \leq k$. Zij $x \in Z$ en neem aan dat de vectoren $\mathrm{d}f_j(x)$ lineair onafhankelijk zijn in $(\mathrm{T}_x\, X)^*$. Is $i : Z \to X$ de identiteit en is φ een 1-vorm in X, dan is $(i^*\varphi)_x = 0$, dan en slechts dan als φ_x een lineaire combinatie is van de $\mathrm{d}f_j(x)$, $1 \leq j \leq k$. Bewijs dit.

Lagrange past dit toe in de statica, waar φ een krachtveld is en de voorwaarde $(i^*\varphi)_x = 0$ betekent dat x een evenwichtspunt is, als de bewegingen van het mechanische systeem beperkt zijn tot Z.

Bewijs ook dat voor een C^1-functie f geldt dat $f|_Z$ een stationair punt heeft in x, dan en slechts dan als $\mathrm{d}f(x)$ een lineaire combinatie is van de $\mathrm{d}f_j(x)$, $1 \leq j \leq k$.

5.9.3 Zij E een eindig-dimensionale lineaire ruimte, $\alpha \in E^*$, $\alpha \neq 0$. Zij $\omega \in \bigwedge^p E^*$. Bewijs dat de volgende uitspraken a), b) equivalent zijn.

a) $\omega(v_1, \ldots, v_p) = 0$ voor alle $v_1, \ldots, v_p \in \ker \alpha$.

b) Er is een $\nu \in \bigwedge^{p-1} E^*$, waarvoor $\omega = \alpha \wedge \nu$.

Hint: beschouw α als eerste element van een basis van E^*.

Zij nu α een C^k-differentiaalvorm van de graad 1 in een variëteit X, met $\alpha(x) \neq 0$ voor iedere $x \in X$ en ω een C^k-differentiaalvorm van de graad p in X. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn.

a) $\omega \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = 0$ voor alle C^k-vectorvelden v_i die in $\ker \alpha$ liggen.

b) Bij iedere $a \in X$ is er een open omgeving U van a in X en een C^k-differentiaalvorm ν in U van de graad $p-1$, waarvoor $\omega = \alpha \wedge \nu$ in U.

Bewijs ook dat als a) geldt en $\ker \alpha$ is integreerbaar, dan geldt a) met ω vervangen door $\mathrm{d}\omega$.

5.9.4 Zij E een eindig-dimensionale lineaire ruimte, $\omega_i \in E^*$, $v_j \in E$, $1 \leq i, j \leq p$. Bewijs dat

$$(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p)(v_1, \ldots, v_p) = \det\,(\omega_i(v_j))_{i,j=1}^p.$$

Bewijs dat $\omega_1, \ldots, \omega_p$ lineair afhankelijk zijn, dan en slechts dan als $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p = 0$.

5.9.5 Zij H een C^k-deelvectorbundel van $\mathrm{T}\,X$ van codimensie c. Bewijs dat er voor iedere $a \in X$ een open omgeving U van a in X is en C^k-differentiaalvormen α_i, $1 \leq i \leq c$ van de graad 1 in U met de eigenschap dat

$$H_x = \bigcap_{i=1}^{c} \ker \alpha_i(x), \quad x \in U.$$

Bewijs, voor iedere α_i als boven, dat H integreerbaar is, dan en slechts dan als er 1-vormen β_{ij} zijn, waarvoor

$$\mathrm{d}\alpha_i = \sum_{j=1}^{c} \beta_{ij} \wedge \alpha_j, \quad 1 \leq i \leq c.$$

Tenslotte, als $\omega = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_c$, dan is H integreerbaar, dan en slechts dan als er een 1-vorm β is, waarvoor $\mathrm{d}\omega = \beta \wedge \omega$.

5.9.6 Zij H_c^i het hypervlak in $\mathbf{R}^n$ dat bepaald wordt door de vergelijking $x_i = c$. Parametriseer H_c met de x_j, $j \neq i$. Bewijs dat als g een p-vorm in $\mathbf{R}^n$ is als in (5.4.10), dan wordt g in H_c gegeven door $x_i = c$ in te vullen in de functies $g_{i(1),\ldots,i(p)}$ $x_i = c$ en alle termen waarin $i(j) = i$ voor zekere j te schrappen.

Zij nu $S(R)$ de sfeer in $\mathbf{R}^3$ om de oorsprong met straal R. Bewijs dat g in S_R berekend kan worden door bij de berekening van g in poolcoördinaten in de functies $r = R$ in te vullen en alle termen waarin $\mathrm{d}r$ voorkomt weg te laten. Bereken

$$x_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + x_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$$

in S_R en bereken de integraal hiervan over S_R.

5.9.7 Bewijs: zijn ω en ν invariant onder het diffeomorfisme Φ, resp. het vectorveld v, dan zijn ook $\omega \wedge \nu$ en $\mathrm{d}\omega$ invariant onder Φ, resp. v.

5.9.8 Bewijs dat
$$\mathcal{L}_u(i_v\omega) - i_v(\mathcal{L}_u\omega) = i_{[v,\,u]}\omega$$
als $\omega \in \Omega^{p,\,1}(X)$ en $u,\, v \in \mathcal{V}^1(X)$. En dat
$$\mathcal{L}_u(\mathcal{L}_v\omega) - \mathcal{L}_v(\mathcal{L}_u\omega) = \mathcal{L}_{[v,\,u]}\omega$$
als ω, u en v van de klasse C^2 zijn.

5.9.9 Zij ω een p-vorm in X en $v_1, \ldots,\, v_{p+1}$ vectorvelden in X, allemaal continu differentieerbaar. Bewijs dat
$$\mathrm{d}\omega \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_{p+1} = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \mathrm{d}_{v_j}(\omega \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot \hat{v_j} \cdot \ldots \cdot v_{p+1})$$
$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \omega \cdot [v_j,\, v_i] \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot \hat{v_i} \cdot \ldots \cdot \hat{v_j} \cdot \ldots \cdot v_{p+1}.$$
Hint: gebruik inductie naar p en de homotopieformule.

5.9.10 Zij $0 < n < p$. Bewijs dat er geen n-vorm ω in $\mathbf{R}^p$ bestaat met de eigenschap dat $\omega(e_1, \ldots,\, e_n) \neq 0$ voor ieder orthonormaal stelsel vectoren $e_1, \ldots,\, e_n$ in $\mathbf{R}^p$. Hint: houd $e_1, \ldots,\, e_{n-1}$ vast en beschouw de lineaire vorm $\omega \cdot e_1 \cdot \ldots \cdot e_{n-1}$ in het orthogonale complement.

5.9.11 Zij S de sfeer met straal 1 om de oorsprong in $\mathbf{R}^n$. Zij v het vectorveld in $\mathbf{R}^n$ met $v(x) = x$ voor alle $x \in \mathbf{R}^n$.

Bewijs dat
$$\omega := \mathrm{id}_S{}^*(\mathrm{d}_n x \cdot v)$$
een reëel-analytische volume-vorm in S is, met de eigenschappen dat $\omega_x \neq 0$ voor alle $x \in S$ en dat ω invariant is onder alle draaiïngen in $\mathbf{R}^n$. (Een draaiïng in $\mathbf{R}^n$ is een orthogonale lineaire transformatie A in $\mathbf{R}^n$ met $\det A = 1$.)

Bewijs verder, dat als ν een $(n-1)$-vorm in S is, die invariant is onder alle draaiïngen, dan is er een constante $c \in \mathbf{R}$, waarvoor $\nu = c \cdot \omega$. Hierbij mag U gebruiken dat er voor iedere $x,\, y \in S$ een draaiïng A is met $A(x) = y$.

5.9.12 In de situatie van de stelling van Gauss, zij X^t het definitiegebied van de v-stroming $e^{t\,v}$ na tijd t. Bewijs dat, voor alle $t \in \mathbf{R}$ met $K \subset X^t$:
$$\int_{e^{t\,v}(\partial K)} \omega \cdot v = \tfrac{d}{dt} \int_{e^{t\,v}(K)} \omega.$$

5.9.13 Bepaal de differentieerbare functies $f(r)$, $r > 0$, waarvoor $\operatorname{div} v = 0$ in $X := \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, als v het vectorveld in X voorstelt met als coördinaatsfuncties $v_j(x) = f(\|x\|)\, x_j$. Zij K een compacte deelverzameling met C^2-rand ∂K in $\mathbf{R}^n$, $0 \notin \partial K$. Bereken

$$\int_{\partial K} \mathrm{d}_n x \cdot v,$$

eerst als $0 \notin K$ en dan als $0 \in K$. Hint in het tweede geval: vervang K door $K \setminus B$, waarin B een open bol om 0 is, waarvoor $\bar{B} \subset K^{\mathrm{int}}$. Verklaar de uitspraak dat $\operatorname{div} v$ een puntbron in de oorsprong voorstelt.

5.9.14 Zij C de cirkel met straal 1 om de oorsprong in $\mathbf{R}^2$ en zij

$$H = \{(r,\, z) \in \mathbf{R}^2 \mid r > 0\}$$

het rechter halfvlak. Bewijs dat

$$\Phi : (c,\, r,\, z) \mapsto (r \cdot c,\, z)$$

een reëel-analytisch diffeomorfisme is van $C \times H$ naar

$$\{(x,\, y,\, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x,\, y) \neq (0,\, 0)\},$$

het complement van de z-as in $\mathbf{R}^3$.

Zij K een compacte deelverzameling van H, $R = \Phi(C \times K)$. Zij f een continue functie in R, die invariant is onder alle draaiïngen om de z-as. Bewijs de *regel van Guldin*:

$$\int_R f(x,\, y,\, z)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \int_K 2\pi r\, f(r,\, 0,\, z)\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}r.$$

Stel nu dat K een C^2-rand heeft. Bewijs dat

$$\operatorname{vol}(R) = \int_{\partial K} \pi r^2\, \mathrm{d}z.$$

5.9.15 Zij K een compacte deelverzameling met C^2-rand in een n-dimensionale georiënteerde variëteit X. Zij S een interval in $\mathbf{R}$ en zij

$$(s,\, x) \mapsto \gamma_s(x) = \Gamma(s, x) : S \times K \to Y$$

een C^1-familie van C^1-afbeeldingen van K naar een p-dimensionale variëteit Y. Zij tenslotte α een continu differentieerbare n-vorm in Y.

Bewijs dat

$$\tfrac{d}{ds} \int_{\gamma_s} \alpha = \int_K i_s^*((\Gamma^* \mathrm{d}\alpha) \cdot \tfrac{\partial}{\partial s}) + \int_{\partial K} i_s^*((\Gamma^* \alpha) \cdot \tfrac{\partial}{\partial s}).$$

Bewijs dat $s \mapsto \int_{\gamma_s} \alpha$ constant is, wanneer $K = X$ en $\mathrm{d}\alpha = 0$. En dat $\mathrm{d}\alpha = 0$ als $p = n$.

5.9.16 Zij X een compacte, georiënteerde twee-dimensionale variëteit en γ een C^2-immersie van X naar $\mathbf{R}^3$. Bewijs dat er voor iedere $x \in X$ precies één vector $n(x) \in \mathbf{R}^3$ is ter lengte 1, die loodrecht staat op $\mathrm{T}_x\,\gamma(\mathrm{T}_x\,X)$ en waarvoor $\mathrm{T}_x\,\gamma(v)$, $\mathrm{T}_x\,\gamma(w)$ en $n(x)$ een positief georiënteerde basis in $\mathbf{R}^3$ vormen als v en w een positief georiënteerde basis is $\mathrm{T}_x\,X$ vormen. Bewijs dat n een C^1-afbeelding definieert van X naar de eenheidssfeer S in $\mathbf{R}^3$. Als ω de Euclidische oppervlaktevorm van S voorstelt, dan heet de oppervlaktevorm $\kappa := n^*\omega$ in X de *Gausskromming* en n de *Gaussafbeelding* van de immersie $\gamma : X \to \mathbf{R}^3$.

Neem nu aan dat $s \mapsto \gamma_s$ een C^1-familie is van C^2-immersies van X in $\mathbf{R}^3$ en zij κ_s de Gausskromming van γ_s. Bewijs, gebruikmakend van Opgave 5.9.15, dat $\int_X \kappa_s$ niet van s afhangt.

Opmerking: men kan bewijzen dat $\int_X \kappa = m \cdot 4\pi$, waarin m een geheel getal is, gelijk aan de zogenaamde afbeeldingsgraad van de Gaussafbeelding. Dit is de beroemde *stelling van Gauss-Bonnet*. Een bewijs kan gegeven worden door de immersie te laten convergeren naar een stuksgewijs lineaire afbeelding.

Hoofdstuk 6

Toepassingen

In dit hoofdstuk geven we een aantal toepassingen in de meetkunde, analyse en de natuurkunde. Aan ieder onderwerp, hier vrij schetsmatig behandeld, kan gemakkelijk een apart college besteed worden.

6.1 Riemann-variëteiten

Het ligt voor de hand om de afstand tussen twee punten p en q in een variëteit X te definiëren als het minimum van alle lengten $l(\gamma)$ van krommen γ in X, die van p naar q lopen.

Als $\gamma \in \mathrm{C}^1([a,\, b],\, X)$, $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$, dan ligt het voor de hand om $l(\gamma)$ te definiëren als

$$l(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Hierin is $\gamma'(t)$ een element van de lineaire ruimte $\mathrm{T}_{\gamma(t)}\, X$; voor deze definitie is het blijkbaar nodig om iedere raakruimte aan X van een norm te voorzien.

Het is gebruikelijk om hiervoor de norm te nemen, gedefinieerd door een inprodukt

$$(u,\, v) \mapsto \langle u,\, v\rangle_x : \mathrm{T}_x\, X \times \mathrm{T}_x\, X \to \mathbf{R}$$

in $\mathrm{T}_x\, X$, dat wil zeggen

$$\|v\|_x := \sqrt{\langle v,\, v\rangle_x}, \quad x \in X, \ v \in \mathrm{T}_x\, X.$$

We hebben in de notatie het punt x als index toegevoegd, om aan te geven dat de raakruimten, en daarmee ook de inprodukten en normen, van het punt x afhangen. Alleen als X een triviale raakbundel heeft, bijvoorbeeld als X een open deelverzameling is van $\mathbf{R}^n$, worden alle raakruimten met één en dezelfde lineaire ruimte $\mathbf{R}^n$ geïdentificeerd en heeft het zin om te zeggen dat het inprodukt en de norm van raakvectoren niet van x afhangen.

Het idee, om in algemene variëteiten iedere raakruimte van een inprodukt te voorzien, werd zo'n anderhalve eeuw geleden door Riemann in zijn "Habilitationsvortrag" naar voren gebracht. Hij kon hiermee het begrip van kromming generaliseren dat Gauss voor oppervlakken in een coördinaat-onafhankelijke vorm had weten te brengen.

Definitie 6.1.1 Zij X een n-dimensionale variëteit. Een *Riemann-structuur in* X is een afbeelding β, die aan iedere $x \in X$ een inprodukt $\beta(x) = \beta_x$ in $\mathrm{T}_x\, X$ toevoegt. Vervangen we hierin het woord "inprodukt" door "niet-gedegenereerde symmetrische bilineaire vorm", dan heet β een *pseudo-Riemann-structuur in X*. Een *(pseudo-)Riemann-variëteit* is een paar (X, β), waarin X een variëteit is en β een (pseudo-)Riemann-structuur in X. $\oslash$

Is β een bilineaire vorm in een eindig-dimensionale lineaire ruimte E en is $e_1, \ldots, e_n$ een basis in E, dan zien we uit

$$\beta(u, v) = \beta(\sum_{i=1}^{n} u_i\, e_i, \sum_{j=1}^{n} v_j\, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} u_i\, v_j\, \beta(e_i, e_j)$$

dat β bepaald is door de matrixcoëfficiënten

$$\beta_{ij} := \beta(e_i, e_j).$$

De bilineaire vorm β is symmetrisch, respectievelijk antisymmetrisch, als de matrix β_{ij} symmetrisch, respectievelijk antisymmetrisch is.

In lokale coördinaten κ voor X, met inverse $\mu = \kappa^{-1} : V_\kappa \to X_\kappa$, wordt β gegeven door de bilineaire vorm

$$\beta_\kappa(x) = \beta_{\kappa,\, x} := (\mathrm{D}\, \mu_x)^* \beta_{\mu(x)}$$

in $\mathbf{R}^n$, die van het punt $x \in V_\kappa$ afhangt. Hierin gebruiken we de definitie (5.3.8) voor het terugtrekken van willekeurige (niet noodzakelijk antisymmetrische) p-lineaire vormen door middel van lineaire afbeeldingen.

We zeggen dat β van de klasse C^k is, als de matrixcoëfficiënten van $\beta_\kappa(x)$ C^k-functies van x zijn. Is λ een andere kaart, dan is

$$\beta_\lambda(y) = (\mathrm{D}\, \psi_y)^* \beta_\kappa(\psi(y)), \quad \psi := \kappa \circ \lambda^{-1}, \tag{6.1.1}$$

dit volgt door toepassing van de kettingregel en (5.3.10), welke laatste regel voor willekeurige p-lineaire vormen ω geldt. Uit deze transformatieformule zien we ook dat β_λ een C^k-functie is in $\lambda(X_\kappa \cap X_\lambda)$, zodra β_κ een C^k-functie is in $\kappa(X_\kappa \cap X_\lambda)$ en $\psi \in \mathrm{C}^{k+1}$.

Is f een reëelwaardige C^2-functie in een open deelverzameling U van een eindig-dimensionale lineaire ruimte E, dan is, voor iedere $a \in U$, $\mathrm{D}^2 f(a)$ een symmetrische bilineaire vorm in E, zie Lemma 1.8.1. Omgekeerd is iedere symmetrische bilineaire vorm β in E van de vorm $\beta = \mathrm{D}^2 f(a)$, zelfs voor een tweedegraadsveelterm f. Immers, als we nemen

$$q(x) = q_\beta(x) := \tfrac{1}{2}\beta(x, x), \tag{6.1.2}$$

dan zien we, de symmetrie van β gebruikend, dat $\mathrm{D}\, q(x) = \beta \cdot x$ voor alle $x \in E$, dus $\mathrm{D}^2 q(a) = \beta$, voor iedere $a \in E$. De tweedegraadsveelterm $q = q_\beta$ in (6.1.2) heet de *kwadratische vorm behorend bij de symmetrische bilineaire vorm β*. We kunnen β ook uit q terugvinden met de formule

$$\beta(u, v) = q(u + v) - q(u) - q(v).$$

De differentieerbaarheidseigenschappen van β kunnen nu ook uitgedrukt worden in termen van de reëelwaardige functie $q = q_\beta$ in $\mathrm{T}\, X$, gedefinieerd door

$$q(x, v) = q_{\beta,\, x}(v) := \tfrac{1}{2}\beta_x(v, v), \quad x \in X,\ v \in \mathrm{T}_x\, X. \tag{6.1.3}$$

Uitschrijven in lokale coördinaten laat nu zien dat β van de klasse C^k is, dan en slechts dan als $q_\beta \in \mathrm{C}^k(\mathrm{T}\, X)$.

In deze beschouwingen speelt de voorwaarde dat β_x niet-gedegenereerd is, of een inprodukt, nog geen rol. Is Φ een differentieerbare afbeelding van X naar een variëteit Y en is β een familie van symmetrische bilineaire vormen in de raakruimten van Y, dan definieert

$$\Phi^*\beta(x) := (\mathrm{T}_x\, \Phi)^* \beta_{\Phi(x)}, \quad x \in X \tag{6.1.4}$$

een familie van symmetrische bilineaire vormen in de raakruimten van X, de *door Φ teruggetrokken familie* genoemd.

Lemma 6.1.1 *Is A een* injectieve *lineaire afbeelding van E naar F en is β een inprodukt in F, dan is $A^*\beta$ een inprodukt in E. Is A bijectief en β niet-gedegenereerd, dan is $A^*\beta$ niet-gedegenereerd.*

Bewijs Als $v \in E$, $v \neq 0$, dan is $A(v) \neq 0$, dus

$$A^*\beta(v,\, v) = \beta(A(v),\, A(v)) > 0.$$

$\square$

Opmerking 6.1.1 Als E een lineaire deelruimte is van F, dan hoeft de tweede uitspraak in Lemma 6.1.1 niet waar te zijn voor A gelijk aan de identiteit van E naar F. Voorbeeld: nemen we in $\mathbf{R}^2$

$$\beta(u,\, v) := u_1\, v_1 - u_2\, v_2,$$

dan is $\beta|_{E\times E} = 0$ als $E = \mathbf{R}\cdot(1,\, 1)$ en als $E = \mathbf{R}\cdot(1,\, -1)$. $\oslash$

Uit Lemma 6.1.1 volgt nu dat $\Phi^*\beta$ een Riemann-structuur in X is, als β een Riemann-structuur is in Y en Φ een immersie is, dat wil zeggen als $\mathrm{T}_x\, \Phi$ injectief is voor iedere $x \in X$. Dit geldt in het bijzonder als X een deelvariëteit is van Y en $\Phi = \mathrm{id}$, de identiteit van X naar Y. Zo krijgen we op een deelvariëteit X van $\mathbf{R}^p$ de Riemann-structuur door het standaard inproduct in $\mathbf{R}^p$ te beperken tot de raakruimten aan X, beschouwd als lineaire deelruimten van $\mathbf{R}^p$.

Opmerking 6.1.2 Stel X is paracompact, zie Opmerking 5.6.4. Dan zegt de inbeddingsstelling van Grauert [8], dat iedere samenhangscomponent S diffeomorf is met een gesloten, reëel-analytische deelvariëteit van een $\mathbf{R}^p$, zie Opmerking 3.3.1. De standaard Riemann-structuur in $\mathbf{R}^p$ terugtrekkend met dit diffeomorfisme krijgen we een reëel-analytische Riemann-structuur in S. Daarmee heeft X een reëel-analytische Riemann-structuur, één voor iedere samenhangscomponent.

Men kan ook met behulp van een C^∞-opdeling van één, onderworpen aan een overdekking met coördinaatomgevingen, bewijzen dat iedere paracompacte X een C^∞ Riemann-structuur bezit. Hoewel het resultaat iets zwakker is, heeft dit bewijs het voordeel dat het geen beroep doet op de diepe inbeddingsstelling van Grauert. $\oslash$

Terugkerend tot algemene afbeeldingen $\Phi : X \to Y$, merken we nog op dat $\Phi^*\beta$ een pseudo-Riemann-structuur in X is, als β een pseudo-Riemann-structuur is in Y en Φ een lokaal diffeomorfisme is. Tenslotte is $\Phi^*\beta$ van de klasse C^k als $\Phi \in \mathrm{C}^{k+1}$ en $\beta \in \mathrm{C}^k$. Dit volgt bijvoorbeeld door op te merken dat

$$q_{\Phi^*\beta} = q_\beta \circ \mathrm{T}\,\Phi : \mathrm{T}\, X \to \mathbf{R}. \tag{6.1.5}$$

Definitie 6.1.2 Zij β een continue Riemann-structuur in de variëteit X. Voor iedere $x \in X$, $v \in \mathrm{T}_x X$ noteren we de *β-norm van v* als

$$\|v\|_x := \sqrt{\beta_x(v,\, v)}.$$

Voor een C^1-kromme $\gamma : [a,\, b] \to X$ definiëren we de *lengte van γ* als

$$l(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\, dt.$$

$\oslash$

Deze lengte hangt niet af van de parametrisering van de kromme:

Lemma 6.1.2 *Is $\gamma \in \mathrm{C}^1([a,\, b],\, X)$ en is φ een C^1-diffeomorfisme van $[\alpha,\, \beta]$ naar $[a,\, b]$, dan is $l(\gamma) = l(\gamma \circ \varphi)$.*

Bewijs

$$\begin{aligned} l(\gamma \circ \varphi) &= \int_\alpha^\beta \|(\gamma \circ \varphi)'(\tau)\|_{\gamma\circ\varphi(\tau)}\, d\tau = \int_\alpha^\beta \|\varphi'(\tau) \cdot \gamma'(\varphi(\tau))\|_{\gamma\circ\varphi(\tau)}\, d\tau \\ &= \int_\alpha^\beta \|\gamma'(\varphi(\tau))\|_{\gamma(\varphi(\tau))} \cdot |\varphi'(\tau)|\, d\tau = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\, dt = l(\gamma). \end{aligned}$$

Hierin hebben we in de voorlaatste identiteit gebruik gemaakt van de formule voor de substitutie van variabelen $t = \varphi(\tau)$, in de integraal van de continue reëelwaardige functie $t \mapsto \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}$. $\square$

Definitie 6.1.3 Een stelsel $\gamma_i \in \mathrm{C}^k([a_i,\, b_i],\, X)$, $1 \leq i \leq N$, met $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$ voor alle $1 \leq i \leq N-1$, heet een *stuksgewijs C^k-kromme γ van $p := \gamma_1(a_1)$ naar $q := \gamma_N(b_N)$*. Als $k \geq 1$, dan wordt de lengte $l(\gamma)$ hiervan gedefinieerd als

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^N l(\gamma_i).$$

Voor iedere $p,\, q \in X$ definieert men de *afstand $d(p,\, q) = d_\beta(p,\, q)$ van p naar q met betrekking tot* β als het infimum van de $l(\gamma)$, waarbij γ alle stuksgewijs C^1-krommen van p naar q doorloopt. $\oslash$

Voor $\mathbf{R}^n$, voorzien van de standaard Riemann-structuur, hebben we dat $d(p,\, q) = \|q - p\|$. Dit berust op

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt,$$

hetgeen op zijn beurt volgt uit de driehoeksongelijkheid voor de norm, toegepast op de benaderende Riemannsommen voor de integraal in het rechterlid. Voor een algemene Riemann-variëteit hebben we de volgende stelling.

Stelling 6.1.3 *Is X een samenhangende variëteit en β een continue Riemann-structuur in X, dan is d_β een metriek in X, waarvan de topologie gelijk is aan de variëteitstopolologie van X.*

Bewijs Is γ een stuksgewijs C^1-kromme van p naar q en δ een stuksgewijs C^1-kromme van q naar r, dan is de samenstelling ε van γ en δ een stuksgewijze C^1-kromme van p naar r en

$$d_\beta(p,\, r) \leq l_\beta(\varepsilon) = l_\beta(\gamma) + l_\beta(\delta).$$

Het infimum over alle γ en δ nemend, krijgen we $d_\beta(p,\, r) \leq d_\beta(p,\, q) + d_\beta(q,\, r)$.

Zij V een coördinaatomgeving van p, die we met een open deelverzameling van $\mathbf{R}^n$ identificeren. De continuïteit van β gebruikend, krijgen we de existentie van een $\delta > 0$ en $0 < c \leq C$, met de eigenschap dat als $\|x - p\| < \delta$, dan is $x \in V$ en

$$c \cdot \|v\| \leq \|v\|_{\beta,\, x} \leq C \cdot \|v\|$$

voor alle $v \in \mathbf{R}^n$. Dit impliceert dat

$$c \cdot r \leq d_\beta(p,\, q) \leq C \cdot r$$

als $q \in V$ en $r := \|p - q\| < \delta$. Voor de eerste ongelijkheid bedenken we daarbij dat een kromme van p naar q in X in ieder geval een beginstuk heeft in de r-bol, eindigend in een punt op afstand r van p. Is $q \in X$, $q \notin V$, dan geldt het voorgaande met $r = \delta$, dus is $d_\beta(p,\, q) \geq c \cdot \delta$. Hieruit volgt zowel dat $d_\beta(p,\, q) > 0$ als $q \in X$, $q \neq p$, alsook dat de d_β-topologie gelijk is aan de variëteitstopologie. $\square$

Zij $(X,\, \beta)$, resp. $(\tilde{X},\, \tilde{\beta})$ pseudo-Riemann-variëteiten. Een natuurlijke vraag is, onder welke voorwaarden voor β en $\tilde{\beta}$ er een diffeomorfisme Φ van X naar $\tilde{X}$ is met $\beta = \Phi^* \tilde{\beta}$. Als β en $\tilde{\beta}$ Riemann-structuren zijn, dan impliceert dit dat Φ afstandsbewarend is in de zin dat

$$d_{\tilde{\beta}}(\Phi(x),\, \Phi(y)) = d_\beta(x,\, y)$$

voor alle $x,\, y \in X$. Een afbeelding Φ met deze eigenschap heet een *isometrie* van $(X,\, \beta)$ naar $(\tilde{X},\, \tilde{\beta})$. Men kan bewijzen dat omgekeerd iedere isometrie Φ een diffeomorfisme is waarvoor $\Phi^* \tilde{\beta} = \beta$. Dit is de achtergrond van de gewoonte om, ook voor pseudo-Riemann-variëteiten, een diffeomorfisme $\Phi : X \to \tilde{X}$ dat voldoet aan $\Phi^* \tilde{\beta} = \beta$, een isometrie van $(X,\, \beta)$ naar $(\tilde{X},\, \tilde{\beta})$ te noemen.

We onderzoeken de isometrie-eigenschap hier slechts lokaal, dat wil zeggen in een omgeving van een gegeven punt $x \in X$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$, met $\tilde{x} = \Phi(x)$. Deze lokalisering staat het toe om aan te nemen dat X en $\tilde{X}$ open deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$ zijn. Een nog bescheidener voorlopig doel is dan, om te onderzoeken onder welke voorwaarden voor de Taylor-ontwikkelingen in x, resp. $\tilde{x}$, van de matrixcoëfficiënten van β, resp. $\tilde{\beta}$, er een diffeomorfisme Φ is met $\Phi(x) = \tilde{x}$ en waarvoor de Taylor-ontwikkeling van $\Phi^* \tilde{\beta}$ in x tot en met de orde r overeenstemt met die van β.

Voor $r = 0$ komt dit neer op de vraag of er een inverteerbare $A \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n,\, \mathbf{R}^n)$ is, waarvoor $A * \tilde{\beta}_{\tilde{x}} = \beta_x$. In termen van $n \times n$-matrices betekent dit, dat

$$A^* \circ \tilde{\beta}_{\tilde{x}} \circ A = \beta_x.$$

Nu is voor symmetrische matrices S bekend dat ze reële eigenwaarden hebben, met een orthonormale basis van eigenvectoren. Dit betekent, dat er een orthogonale matrix A is, waarvoor

$$D := A^{-1} \circ S \circ A$$

een diagonaalmatrix is. Dat A orthogonaal is, betekent dat $A^{-1} = A^*$, dit komt dus goed uit. Verder kunnen we, door eventueel nog een permutatie-matrix toe te passen, ervoor zorgen dat in de diagonaal van D wordt begonnen met de eventueel aanwezige negatieve eigenwaarden. Vervolgens is het gemakkelijk om na te gaan, dat er een diagonaal-matrix B is, waarvoor $B^* \circ D \circ B = DB^2$ een diagonaal-matrix is met alleen maar ± 1 in de diagonaal. Het aantal -1'en hierin, dat wil zeggen het aantal negatieve eigenwaarden van S, heet de *index* van de symmetrische bilineaire vorm

$$(u,\, v) \mapsto \langle S(u),\, v\rangle.$$

We hebben bewezen:

Stelling 6.1.4 *Er een diffeomorfisme Φ van een open omgeving van x in X naar een open omgeving van $\tilde{x}$ in $\tilde{X}$, waarvoor $\Phi(x) = \tilde{x}$ en $(\Phi^*\tilde{\beta})_x = \beta_x$, dan en slechts dan als $\tilde{\beta}_{\tilde{x}}$ dezelfde index heeft als β_x.*

Merk op dat de index van β_x als functie van x lokaal constant is, dus constant in iedere samenhangscomponent. Om die reden spreekt men, als X samenhangend is, van de index van de pseudo-Riemann-structuur β in X, in plaats van de index van β_x in ieder punt $x \in X$. Riemann-structuren zijn de pseudo-Riemann-structuren met index gelijk aan nul. We nemen van nu af aan dat β en $\tilde{\beta}$ dezelfde index hebben.

Voor een pseudo-Riemann-structuur β in $\mathbf{R}^n$ met matrix $\beta_{ij}(x)$ voert men in:

$$\beta^{ij}(x) := \text{ de } i, j\text{-de coördinaat van } {\beta_x}^{-1} \tag{6.1.6}$$

en de *Christoffel-symbolen*

$$\Gamma^i_{jk}(x) := \tfrac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \beta^{li}(x)\, [\partial_k \beta_{jl}(x) - \partial_l \beta_{kj}(x) + \partial_j \beta_{lk}(x)] \tag{6.1.7}$$

voor $i,\, j,\, k = 1, \ldots, n$. Als we β vervangen door $\tilde{\beta}$, dan krijgen we soortgelijke definities van $\tilde{\beta}^{ij}$ en $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$. De bovenstaande vraag voor $r = 1$ wordt nu beantwoord in het volgende *lemma van Christoffel* [5].

Lemma 6.1.5 *Stel β en $\tilde{\beta}$ zijn pseudo-Riemann-structuren in een open omgeving van de oorsprong in $\mathbf{R}^n$, van de klasse C^1. Veronderstel dat Φ een C^2-diffeomorfisme is van een open omgeving van x in $\mathbf{R}^n$ naar een open omgeving van $\tilde{x}$ in $\mathbf{R}^n$, met de eigenschap dat $\Phi(x) = \tilde{x}$ en $(\Phi^*\tilde{\beta})_x = \beta_x$. Dan is*

$$\partial_m (\Phi^*\tilde{\beta})_{kl}(x) = \partial_m \beta_{kl}(x) \tag{6.1.8}$$

voor alle $m,\, k,\, l = 1, \ldots, n$ dan en slechts dan als de coördinaatsfuncties $\Phi^i(x)$ van $\Phi(x)$ voldoen aan

$$\partial_j \partial_k \Phi^i(x) = \sum_{l=1}^{n} \partial_l \Phi^i(x) \cdot \Gamma^l_{jk}(x) - \sum_{l,m=1}^{n} \tilde{\Gamma}^i_{lm}(\tilde{x}) \cdot \partial_j \Phi^l(x) \cdot \partial_k \Phi^m(x) \tag{6.1.9}$$

voor alle $i,\, j,\, k = 1, \ldots, n$.

Bewijs We gebruiken de volgende afkortingen:

$$\begin{aligned}
&B_{kl} := \beta_{kl}(x), \ \ \tilde{B}_{ij} := \tilde{\beta}_{ij}(\tilde{x}), \\
&C_{klm} := \partial_m \beta_{kl}(x), \ \ \tilde{C}_{ijp} := \partial_p \tilde{\beta}_{ij}(\tilde{x}), \\
&L^i_j := \partial_j \Phi^i(x), \\
&Q^i_{jk} := \partial_j \partial_k \Phi^i(x).
\end{aligned}$$

Omdat

$$(\Phi^* \tilde{\beta})_{kl} = \sum_{i,j=1}^n \tilde{\beta}_{ij} \circ \Phi \cdot \partial_k \Phi^i \cdot \partial_l \Phi^j,$$

is (6.1.8) equivalent aan

$$\sum_{i,j,p=1}^n \tilde{C}_{ijp} \cdot L^p_m \cdot L^i_k \cdot L^j_l + \sum_{i,j=1}^n \tilde{B}_{ij} \cdot [Q^i_{mk} \cdot L^j_l + L^i_k \cdot Q^j_{ml}] = C_{klm}.$$

Het gaat er om, hier de Q's uit op te lossen.

Met de notatie

$$S_{klm} := \sum_{i,j=1}^n \tilde{B}_{ij} \cdot Q^i_{mk} \cdot L^j_l$$

is de tweede som in het linkerlid gelijk aan

$$T_{klm} := S_{klm} + S_{lkm}.$$

De symmetrie $Q^i_{mk} = Q^i_{km}$ geeft de symmetrie $S_{klm} = S_{mlk}$ en daarmee krijgen we

$$T_{klm} - T_{mkl} + T_{lkm} = S_{klm} + S_{lkm} - S_{mkl} - S_{kml} + S_{lmk} + S_{mlk} = 2S_{klm}.$$

Het linkerlid hierin is gelijk aan

$$\begin{aligned}
&C_{klm} - C_{mkl} + C_{lmk} - \sum_{i,j,p=1}^n \tilde{C}_{ijp} \, [L^p_m \, L^i_k \, L^j_l - L^p_l \, L^i_m \, L^j_k + L^p_k \, L^i_l \, L^j_m] \\
&= C_{klm} - C_{mkl} + C_{lmk} - \sum_{i,j,p=1}^n [\tilde{C}_{ijp} - \tilde{C}_{pij} + \tilde{C}_{jpi}] \cdot L^p_m \, L^i_k \, L^j_l.
\end{aligned}$$

Vermenigvuldigen we dit met $(L^{-1})^l_q$ en sommeren we over l, dan krijgen we

$$\begin{aligned}
&2 \sum_{i=1}^n \tilde{B}_{iq} \cdot Q^i_{km} \\
&= \sum_{l=1}^n (L^{-1})^l_q \, [C_{klm} - C_{mkl} + C_{lmk}] - \sum_{i,p=1}^n [\tilde{C}_{iqp} - \tilde{C}_{piq} + \tilde{C}_{qpi}] \, L^p_m \, L^i_k.
\end{aligned}$$

Dit vermenigvuldigend met $\tilde{\beta}^{qr}(\tilde{x}) = (\tilde{B}^{-1})^{qr}$ en sommerend over q krijgen we (6.1.9). Hierbij gebruiken we $(\Phi^* \tilde{\beta})_x = \beta_x$, hetgeen betekent dat $L^* \circ \tilde{B} \circ L = B$, ofwel $L^{-1} \circ \tilde{B}^{-1} = B^{-1} \circ L^*$. $\square$

Een eerste opmerkelijke conclusie hieruit is, dat $\Phi^* \tilde{\beta} = \beta$ impliceert dat $\mathrm{D}(\mathrm{D}\,\Phi)(x)$ voorgeschreven is als functie van $\mathrm{D}\,\Phi(x)$ en $\Phi(x)$. Anders gezegd, voor de $n + n^2$ coördinaatsfuncties van $(\Phi(x),\, \mathrm{D}\,\Phi(x))$ krijgen we een totaal stelsel van partiële differentiaalvergelijkingen. Men kan hieruit bewijzen dat, als X samenhangend is, de hele afbeelding Φ eenduidig bepaald is door de waarden van $\Phi(a)$ en $\mathrm{T}_a\,\Phi$ in één enkel punt $a \in X$. Ook leest men uit de differentiaalvergelijkingen af dat $\Phi \in \mathrm{C}^{k+1}$ als $\beta \in \mathrm{C}^k$, $k \geq 1$.

Omgekeerd merken we op dat de symmetrie

$$\Gamma^i_{jk}(x) = \Gamma^i_{kj}(x) \tag{6.1.10}$$

impliceert dat het rechterlid in (6.1.9) symmetrisch is in j en k. Dit maakt dat we bij iedere matrix L met $L^* \circ \tilde{B} \circ L = B$ de Taylorontwikkeling van Φ in x tot en met de orde 2 zó kunnen kiezen, dat $\Phi(x) = \tilde{x}$, $\mathrm{D}\,\Phi(x) = L$ en dat (6.1.8) geldt. Nemen we voor $\tilde{\beta}$ een pseudo-Riemann-structuur in $\mathbf{R}^n$ met constante coëfficiënten, dan geeft dit:

Gevolg 6.1.6 *Zij β een continu differentieerbare pseudo-Riemann-structuur in de n-dimensionale variëteit X. Zij $x \in X$ en L een bijectieve lineaire afbeelding L van $\mathrm{T}_x\,X$ naar $\mathbf{R}^n$. Dan is er een kaart κ voor X met $x \in X_\kappa$, $\mathrm{D}\,\kappa(x) = L$ en, met de notatie $\mu = \kappa^{-1}$, $\tilde{x} = \kappa(x)$:*

$$\partial_m(\mu^*\beta)_{kl}(\tilde{x}) = 0$$

voor alle k, l, $m = 1, \ldots, n$. In het bijzonder zijn de Christoffel-symbolen van $\mu^*\beta$ in het punt $\tilde{x}$ gelijk aan nul. Tenslotte, is λ een kaart met dezelfde eigenschappen, dan is

$$\mathrm{D}^2(\lambda \circ \kappa^{-1})(\tilde{x}) = 0.$$

Dit resultaat kan gebruikt worden om een meetkundige structuur in te voeren, waarmee niet alleen het lemma van Christoffel doorzichtiger wordt, maar ook begrippen als covariante afgeleide en kromming hun intrede doen.

Definitie 6.1.4 Een *connectie in de raakbundel* $\mathrm{T}\,X$ is een deelvectorbundel H van $\mathrm{T}(\mathrm{T}\,X)$, met de eigenschap dat voor iedere $x \in X$, $v \in \mathrm{T}_x\,X$, de lineaire ruimte $H_{(x,\,v)}$ complementair is, in $\mathrm{T}_{(x,\,v)}(\mathrm{T}\,X)$, aan $\ker \mathrm{T}_{(x,\,v)}\,\pi$, de raakruimte in $(x,\,v)$ aan de vezel $\mathrm{T}_x\,X \subset \mathrm{T}\,X$. Hierin is $\mathrm{T}_x\,X$ beschouwd als deelvariëteit van $\mathrm{T}\,X$. $\oslash$

Lemma 6.1.7 *Zij β een continu differentieerbare pseudo-Riemann-structuur in de n-dimensionale variëteit X. Dan is er een eenduidig bepaalde connectie H in $\mathrm{T}\,X$, met de eigenschap dat voor iedere $x \in X$, $v \in \ T_xX$ en κ als in Gevolg 6.1.6:*

$$\mathrm{T}_{(x,\,v)}(\mathrm{T}\,\kappa)(H_{(x,\,v)}) = \mathbf{R}^n \times \{0\},$$

waarbij we de raakruimten aan $\mathrm{T}(\mathbf{R}^n) \simeq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ met $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ identificeren. In willekeurige geïnduceerde lokale coördinaten in $\mathrm{T}\,X$ is

$$H_{(x,\,v)} = \{(\delta x,\,\delta v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mid \delta v^i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(x)\,v^j\,\delta x^k = 0\}. \tag{6.1.11}$$

Bewijs We gaan uit van een willekeurig lokaal coördinatenstelsel. Is Φ een coördinatentransformatie, dan is
$$\mathrm{T}\,\Phi : (x,\, v) \mapsto (\Phi(x),\, \mathrm{D}\,\Phi(x)\cdot v),$$
hiervan is de totale afgeleide A in het punt $(x,\, v)$ gelijk aan

$$(\delta x,\, \delta v) \mapsto (\mathrm{D}\,\Phi(x)\cdot\delta x,\, \mathrm{D}^2\,\Phi(x)(v,\,\delta x) + \mathrm{D}\,\Phi(x)\cdot\delta v).$$

Is $\beta = \Phi^*\tilde{\beta}$ en $\partial_h\tilde{\beta}_{ij}(\tilde{x}) = 0$ voor alle $h,\, i,\, j$, dan is $\tilde{\Gamma}^i_{lm}(\tilde{x}) = 0$ voor alle $i,\, l,\, m$ en we concluderen uit (6.1.9) dat
$$\mathrm{D}^2\,\Phi(x)(v,\,\delta x) = \mathrm{D}\,\Phi(x)\circ\Gamma_x(v,\,\delta x).$$
Dit impliceert dat A de vector $(\delta x,\, \delta v)$ in $\tilde{H} := \mathbf{R}^n\times\{0\}$ afbeeldt, dan en slechts dan als

$$\Gamma_x(v,\,\delta x) + \delta v = 0.$$

Dit bewijst (6.1.11). De onafhankelijkheid van de keuze van κ volgt hier ook uit: is namelijk ook $\partial_m\beta_{kl}(x) = 0$ voor alle $k,\, l,\, m$, dan is $\Gamma_x = 0$ en is $A^{-1}(\tilde{H}) = \tilde{H}$. □

De connectie H in (6.1.11) heet de *Levi-Civita-connectie* van de pseudo-Riemann-variëteit $(X,\, \beta)$.

De meetkundige formulering van Lemma 6.1.5 is nu dat $\mathrm{T}_x(\Phi^*\tilde{\beta}) = \mathrm{T}_x\,\beta$ equivalent is met:

$$\mathrm{T}_v(\mathrm{T}\,\Phi)(H_v) = \tilde{H}_{\mathrm{T}\,\Phi(v)},\quad v\in\mathrm{T}_x\,X\subset\mathrm{T}\,X.$$

Hierin is $\tilde{H}$ de Levi-Civita connectie van $\tilde{\beta}$.

In wat nu volgt identificeren we de raakruimte

$$\ker\mathrm{T}_{(x,\,v)}\,\pi = \mathrm{T}_{(x,\,v)}(\mathrm{T}_x\,X)$$

aan de vezel $\mathrm{T}_x\,X\subset\mathrm{T}\,X$ met de lineaire ruimte $\mathrm{T}_x\,X$. De directe som splitsing

$$\mathrm{T}_{(x,\,v)}(\mathrm{T}\,X) = H_{(x,\,v)}\oplus\mathrm{T}_x\,X,\quad v\in\mathrm{T}_x\,X, \tag{6.1.12}$$

geeft dat we lineaire afbeeldingen

$$\begin{aligned}\mathrm{hor}_{(x,\,v)} &: \mathrm{T}_{(x,\,v)}(\mathrm{T}\,X)\to H_{(x,\,v)},\\ \mathrm{vert}_{(x,\,v)} &: \mathrm{T}_{(x,\,v)}(\mathrm{T}\,X)\to\mathrm{T}_x\,X\end{aligned}$$

hebben, waarvoor
$$w = \mathrm{hor}_{(x,\,v)}(w) + \mathrm{vert}_{(x,v)}(w)$$
voor iedere $w\in\mathrm{T}_{(x,\,v)}(\mathrm{T}\,X)$. Uit (6.1.11) lezen we af dat in lokale coördinaten:

$$\begin{aligned}\mathrm{hor}_{(x,v)}(\delta x,\,\delta v) &= (\delta x,\, -\Gamma_x(v,\,\delta x)),\\ \mathrm{vert}_{(x,\,v)}(\delta x,\,\delta v) &= \delta v + \Gamma_x(v,\,\delta x).\end{aligned}$$

Stel nu dat $t\mapsto\delta(t)$ een kromme is in $\mathrm{T}\,X$. Daarbij hebben we de kromme $\gamma := \phi\circ\delta$ in X, met de eigenschap dat
$$\delta(t)\in\mathrm{T}_{\gamma(t)}\,X$$

voor iedere t in het definitie-interval van δ en γ. Men noemt in deze situatie δ een *vectorveld langs* γ. Een speciaal geval ontstaat als γ differentieerbaar is en $\delta(t) = \gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$, $t \in I$, het *snelheidsveld van* γ.

Als δ differentieerbaar is dan is, voor iedere $t \in I$, $\delta'(t) \in \mathrm{T}_{\delta(t)}(\mathrm{T}\, X)$. De projectie $\mathrm{T}_{\delta(t)}\, \pi \cdot \delta'(t) \in \mathrm{T}_{\gamma(t)}\, X$, corresponderend met het horizontale deel van $\delta'(t)$, is gelijk aan $\gamma'(t)$. De verticale projectie

$$\nabla\delta(t) := \mathrm{vert}_{\,\delta(t)}(\delta'(t)) \in \mathrm{T}_{\gamma(t)}\, X$$

heet de *covariante afgeleide van* δ *ten tijde* t. Opgemerkt kan worden dat $\nabla\delta$ opnieuw een vectorveld langs γ is. In lokale coördinaten hebben we de formule

$$\nabla\delta(t) = \delta'(t) + \Gamma_{\gamma(t)}(\delta(t),\, \gamma'(t)), \quad t \in I. \tag{6.1.13}$$

Men noemt het vectorveld δ langs γ *parallel*, indien $\nabla\delta(t) = 0$ voor alle $t \in I$. Uit (6.1.13) lezen we af dat dit, bij gegeven basiskromme γ, neerkomt op het oplossen van een eerste-orde stelsel van gewone differentiaalvergelijkingen. Dit geeft dat er bij iedere $s \in I$, $v \in \mathrm{T}_{\gamma(s)}\, X$ precies één parallel vectorveld δ langs γ is, waarvoor $\delta(s) = v$. Men noemt de afbeelding

$$P_\gamma^{t,\,s} : \delta(s) \mapsto \delta(t) : \mathrm{T}_{\gamma(s)}\, X \to \mathrm{T}_{\gamma(t)}\, X, \quad \nabla\delta = 0,$$

het *paralleltransport langs* γ. Het is niet moeilijk om na te gaan dat dit voor iedere s en t een lineaire afbeelding is van $\mathrm{T}_{\gamma(s)}\, X$ naar $\mathrm{T}_{\gamma(t)}\, X$. Het kost wat meer rekenwerk om na te gaan dat bovendien

$$(P_\gamma^{t,\,s})^* \beta_{\gamma(t)} = \beta_{\gamma(s)}. \tag{6.1.14}$$

Een tweemaal differentieerbare kromme γ in X heet nu een *geodeet*, als $\nabla\gamma' = 0$. In woorden, als het snelheidsveld van γ parallel is. In lokale coördinaten lezen we uit (6.1.13) af dat dit betekent dat

$$\gamma''(t) + \Gamma_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\, \gamma'(t)) = 0 \tag{6.1.15}$$

voor alle $t \in I$. Dit is een tweede orde stelsel van gewone differentiaal-vergelijkingen voor γ. Dit correspondeert met een eerste-orde stelsel voor $(\gamma(t),\, \gamma'(t))$ in de raakbundel. Het corresponderende vectorveld in de raakbundel, in lokale coördinaten het rechterlid in

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= v, \\ \tfrac{dv}{dt} &= -\Gamma_x(v,\, v), \end{aligned}$$

beschouwd als functie van $(x,\, v) \in \mathrm{T}\, X$, is van de klasse C^{k-1} als de pseudo-Riemann-structuur van de klasse C^k is. Als $k \geq 2$, dan heeft dit vectorveld een stroming in $\mathrm{T}\, X$, die de *geodetische stroming in* $\mathrm{T}\, X$ genoemd wordt.

Invullen van (6.1.7) geeft na enig omschrijven de volgende vergelijking voor geodeten in termen van β:

$$\tfrac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \beta_{li}(\gamma(t))\, \tfrac{d\gamma^i}{dt}(t) = \tfrac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \partial_l \beta_{jk}(\gamma(t))\, \tfrac{d\gamma^j}{dt}(t)\, \tfrac{d\gamma^k}{dt}(t). \tag{6.1.16}$$

voor alle $1 \leq l \leq n$.

Men kan bewijzen dat in een Riemann-variëteit $(X,\, \beta)$ de geodeten lokaal de kortste krommen tussen twee gegeven punten zijn. Zie bijvoorbeeld Helgason [9, Lemma 9.3 in Ch. 1].

Voor een differentieerbaar vectorveld v definieert men de covariante afgeleide van v in het punt $x \in X$, in de richting van $u \in \mathrm{T}_x X$, als

$$(\nabla_u v)(x) := \mathrm{vert}_{(x,\, v(x))}(\mathrm{T}_x\, v \cdot u) \in \mathrm{T}_x X.$$

Is ook u een vectorveld, dan definieert

$$(\nabla_u v)(x) := (\nabla_{u(x)} v), \quad x \in X$$

een vectorveld in X, dat de *covariante afgeleide* $\nabla_u v$ *van het vectorveld* v *naar het vectorveld* u genoemd wordt. Deze covariante afgeleide wordt veel gebruikt in differentiaalmeetkundige berekeningen, wij gaan er hier echter niet verder op in.

We besluiten deze paragraaf met een bespreking van de anti-symmetrische bilineaire afbeelding $S_{(x,\, v)}$ van $H_{(x,v)} \times H_{(x,v)}$ naar $\mathrm{T}_{(x,v)}(\mathrm{T}\, X)/H_{(x,\, v)}$ uit Opmerking 4.8.1. Hiervoor is nodig dat de connectie H continu differentieerbaar is, dus we nemen aan dat $\beta \in \mathrm{C}^2$.

De beperking van $\mathrm{T}_{(x,\, v)}\, \pi : \mathrm{T}_{(x,\, v)}(\mathrm{T}\, X) \to \mathrm{T}_x X$ tot $H_{(x,\, v)}$ is een bijectieve lineaire afbeelding van $H_{(x,\, v)}$ naar $\mathrm{T}_x X$, noem $h_{(x,\, v)} : \mathrm{T}_x X \to H_{(x,\, v)}$ de inverse hiervan. Anderzijds induceert $\mathrm{vert}_{(x,\, v)} : \mathrm{T}_{(x,\, v)} \to \mathrm{T}_x X$ een bijectieve lineaire afbeelding van $\mathrm{T}_{(x,v)}(\mathrm{T}\, X)/H_{(x,\, v)}$ naar $\mathrm{T}_x X$. Deze identificaties kunnen gebruikt worden om $S_{(x,\, v)}$ te herschrijven als een bilineaire afbeelding $R_{(x,\, v)}$ van $\mathrm{T}_x X \times \mathrm{T}_x X$ naar $\mathrm{T}_x X$. In formule:

$$R_{(x,\, v)}(a,\, b) := \mathrm{vert}_{(x,\, v)}\, S_{(x,\, v)}(h_{(x,\, v)}(a),\, h_{(x,\, v)}(b)).$$

In lokale coördinaten uitgeschreven wordt dit:

$$\begin{aligned} R^k_{(x,\, v)}(a,\, b) = &\quad \sum_{h,i,j=1}^{n} R^k_{hij}(x)\, v^h\, a^i\, b^j, \quad \text{met} \\ R^k_{hij}(x) := &\quad \partial_i \Gamma^k_{hj}(x) - \partial_j \Gamma^k_{hi}(x) \\ &+ \sum_{l=1}^{n} \Gamma^k_{li}(x)\, \Gamma^l_{hj}(x) - \Gamma^k_{lj}(x)\, \Gamma^l_{hi}(x). \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

Merk op dat de kwadratische termen in Γ verdwijnen, als we lokale coördinaten gebruiken, waarin de eerste-orde afgeleiden van β in het punt x gelijk aan nul zijn.

In het bijzonder lezen we hieruit af, dat $R_{(x,\, v)}(a,\, b)$ ook lineair van $v \in \mathrm{T}_x X$ afhangt. Hiermee is

$$R(x) : (a,\, b) \mapsto (v \mapsto R_{(x,\, v)}(a,\, b))$$

een antisymmetrische bilineaire afbeelding van $\mathrm{T}_x X \times \mathrm{T}_x X$ naar $\mathrm{L}(\mathrm{T}_x X,\, \mathrm{T}_x X)$. $R(x)$ heet *Riemann's krommingstensor* of kortweg de *kromming* in het punt x van de pseudo-Riemann-structuur β.

Uit de manier waarop de kromming is gedefinieerd in termen van β is het duidelijk dat, als $\beta = \Phi^* \tilde{\beta}$ en $\tilde{R}$ is de kromming van $\tilde{\beta}$, dan is $R = \Phi^* \tilde{R}$. Uitgeschreven betekent dit dat

$$R_{(x,\, v)}(a,\, b) = \tilde{R}_{(\Phi(x),\, \mathrm{T}_x \Phi(v))}(\mathrm{T}_x\, \Phi(a),\, \mathrm{T}_x\, \Phi(b))$$

voor iedere $x \in X$, a, b, $v \in \mathrm{T}_x X$.

Verder is het duidelijk dat $\tilde{R} = 0$ als $\tilde{\beta}$ een constante pseudo-Riemann-structuur in $\mathbf{R}^n$ is, dus β kan niet isometrisch zijn met een constante pseudo-Riemann-structuur als $R \neq 0$. Men noemt de pseudo-Riemann-structuur β *vlak* als $R = 0$. Men kan bewijzen dat omgekeerd een vlakke pseudo-Riemann-structuur lokaal isometrisch is met een constante pseudo-Riemann-structuur, zie bijvoorbeeld [14, Vol. 2, Ch. 4, Thm. 13]. Dit is een illustratie van het fundamentele belang van Riemann's krommingstensor.

Opmerking 6.1.3 Er is een algemene definitie van *tensorvelden* van de graad $p + q$, die covariant zijn van de graad p en contravariant van de graad q, kortweg een $(p,\, q)$-tensorveld. Zie bijvoorbeeld [1], [14], [11] of [9]. Volgens deze definitie is een vectorveld een $(0,\, 1)$-tensorveld. Een differentiaalvorm van de graad p is een $(p,\, 0)$-tensorveld. Een pseudo-Riemann-structuur is een $(2,\, 0)$-tensorveld en de kromming daarvan is een $(3,\, 1)$-tensorveld. Daarentegen vormen de Christoffel-symbolen geen tensorveld.

In lokale coördinaten wordt een tensorveld in een n-dimensionale variëteit genoteerd als een x-afhankelijke grootheid $T_{i(1),\dots,\, i(p)}^{j(1),\dots,\, j(q)}(x)$ met p onder-indices $i(k)$ en q boven-indices $j(l)$ die van 1 tot en met n lopen. Eigenlijk zou de kaart κ ook nog in de notatie meegenomen moeten worden. De afhankelijkheid daarvan wordt gegeven door

$$S_{h(1),\dots,\, h(p)}^{k(1),\dots,\, k(q)}(y) = \sum_{i(1),\dots,\, i(p),\, j(1),\dots,\, j(q)=1}^{n} T_{i(1),\dots,\, i(p)}^{j(1),\dots,\, j(q)}(x) \cdot \prod_{a=1}^{p} L_{h(a)}^{i(a)} \cdot \prod_{b=1}^{q} M_{j(b)}^{k(b)},$$

waarin

$$\begin{aligned}
&T = T_\kappa, \quad S = T_\lambda, \\
&\varphi = \lambda \circ \kappa^{-1}, \quad \psi = \kappa \circ \lambda^{-1} = \varphi^{-1}, \\
&y = \varphi(x), \quad x = \psi(y), \\
&L_h^i = \frac{\partial \psi^i}{\partial y^h}(y), \quad M_j^k = \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^j}(x) = (L^{-1})_j^k.
\end{aligned}$$

De naam "tensor" komt uit de continuümsmechanica, waar de spanning in een punt x een lineare functie is van de eerste, of zelfs tweede orde benadering van de deformatie van het medium in dat punt, de coëficiënten daarvan worden tensoren van vrij hoge graad.

Tenslotte merken we op dat men algemene connecties in kan voeren in willekeurige bundels, zoals gedefinieerd in Opmerking 3.4.1. Ook deze algemene connecties hebben paralleltransport en kromming. Zie bijvoorbeeld [11]. $\oslash$

6.2 Hamilton-stelsels

Een differentiaalvorm van de graad één in een variëteit X was een afbeelding g van X naar de coraakbundel $\mathrm{T}^*\, X$ van X, waarvoor $\pi \circ g = \mathrm{id}$, de identiteit in X. Zie §5.1.

Stelling 6.2.1 *Zij* $\mathrm{T}^*\, X$ *de coraakbundel van een* n*-dimensionale variëteit* X*. Er is een eenduidig bepaalde differentiaalvorm* τ *van de graad één in* $\mathrm{T}^*\, X$*, met de eigenschap dat*

$$g = g^* \tau \tag{6.2.1}$$

voor iedere differentieerbare 1*-vorm* g *in* X*. Hierin is* g *in het rechterlid opgevat als differentieerbare afbeelding van* X *naar* $\mathrm{T}^* X$*. In geïnduceerde lokale coördinaten*

$$(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$$

wordt τ *gegeven door*

$$\tau = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, \mathrm{d}x_j. \tag{6.2.2}$$

Bewijs Als $(x, \xi) \in \mathrm{T}^* X$, dan is ξ een lineaire afbeelding van $\mathrm{T}_x X$ naar $\mathbf{R}$, dus is

$$\tau_{(x,\,\xi)} := \xi \circ \mathrm{T}_{(x,\,\xi)}\, \pi \tag{6.2.3}$$

een lineaire afbeelding van $\mathrm{T}_{(x,\,\xi)}(\mathrm{T}^* X)$ naar $\mathbf{R}$. Dit definieert een 1-vorm τ in $\mathrm{T}^* X$, in geïnduceerde lokale coördinaten gegeven door (6.2.2). Is g een differentieerbare 1-vorm in X, dan is

$$(g^*\tau)_x = \tau_{(x,\,g(x))} \circ \mathrm{T}_x\, g = g(x) \circ \mathrm{T}_{(x,\,g(x))}\, \pi \circ \mathrm{T}_x\, g = g(x) \circ \mathrm{T}_x(\pi \circ g) = g(x).$$

Hierin is in de derde identiteit de kettingregel gebruikt en in de laatste identiteit dat $\pi \circ g = \mathrm{id}$, de identiteit in X. □

Vanwege (6.2.1) noemen we τ de *tautologische* 1*-vorm in* $\mathrm{T}^* X$. Zijn uitwendige afgeleide $\sigma := \mathrm{d}\tau$ heet de *kanonieke* 2*-vorm in* $\mathrm{T}^* X$. Deze wordt in geïnduceerde lokale coördinaten gegeven door

$$\sigma := \mathrm{d}\tau = \sum_{j=1} \mathrm{d}\xi_j \wedge \mathrm{d}x_j, \tag{6.2.4}$$

zie (6.2.2). Dit laat zien dat τ verre van gesloten is. σ is zelfs “maximaal ongelijk aan nul”:

Lemma 6.2.2 *De kanonieke* 2*-vorm* σ *in* $P := \mathrm{T}^* X$ *is niet-gedegenereerd, in de zin dat voor iedere* $p \in P$, $u \in \mathrm{T}_p\, P$ *geldt dat* $u = 0$ *indien* $\sigma_p(u, v) = 0$ *voor alle* $v \in \mathrm{T}_p\, P$*. De afbeelding* $\sigma_p : u \mapsto \sigma_p \cdot u$ *is bijectief van* $\mathrm{T}_p\, P$ *naar* $(\mathrm{T}_p\, P)^*$*.*

Bewijs Voor de eerste bewering gebruiken we de formule (6.2.4) in geïnduceerde lokale coördinaten. Is $v \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ de basisvector met als j-de x-coördinaat een 1 en verder alle coördinaten gelijk aan 0, dan is $\sigma(u, v)$ gelijk aan de j-de ξ-coördinaat van u. Is daarentegen de j-de ξ-coördinaat van v gelijk aan -1 en zijn alle andere coördinaten van v gelijk aan 0, dan is $\sigma(u, v)$ gelijk aan de j-de x-coördinaat van u.

De eerste bewering betekent dat de lineaire afbeelding $\sigma_p : \mathrm{T}_p\, P \to (\mathrm{T}_p\, P)^*$ injectief is. Dit impliceert dat σ_p bijectief is, want $\dim T_pP = \dim(\mathrm{T}_p\, P)^*$. □

Merk ook op dat $\mathrm{d}\sigma = 0$, dit volgt zowel uit $\sigma = \mathrm{d}\tau$, als uit de formule (6.2.4) in geïnduceerde lokale coördinaten. In het algemeen heet een gladde 2-vorm σ in een willekeurige variëteit P een *symplectische vorm* als

a) σ is gesloten, dat wil zeggen $\mathrm{d}\sigma = 0$ en

b) Voor iedere $p \in P$ is σ_p een niet-gedegenereerde antisymmetrische bilineaire vorm in $\mathrm{T}_p\, P$.

Een *symplectische variëteit* is een paar (P, σ), waarin P een variëteit is en σ een symplectische vorm is in P. Het *lemma van Darboux* zegt dat als σ een symplectische vorm in P is, dan is de dimensie van P even, zeg gelijk aan $2n$, en zijn er lokale coördinaten, waarin σ gegeven wordt door (6.2.4). Een kaart waarin (6.2.4) geldt heet een *Darboux-kaart*. Zie bijvoorbeeld [1, Thm. 8.1.2].

Als $\dim P = 2$, dan is een 2-vorm σ in P vanzelf gesloten. σ is dan een symplectische vorm, dan en slechts dan als $\sigma_p \neq 0$ voor alle $p \in P$, dat wil zeggen als σ een positieve oppervlakte-vorm is met betrekking tot een oriëntatie van P. Bijvoorbeeld het boloppervlak, met zijn standaard oppervlaktevorm, is een symplectische variëteit. Deze is niet homeomorf is met de coraakbundel van een variëteit, want het boloppervlak is compact, terwijl een coraakbundel niet compact is.

Uit (6.2.4) lezen we af dat

$$\sigma^n := \sigma \wedge \ldots \wedge \sigma \ \ (n \text{ maal}) \ = n!\, \mathrm{d}\xi_1 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \mathrm{d}\xi_n \wedge \mathrm{d}x_n$$

een nergens verdwijnende volume-vorm is. Men noemt $\omega := \frac{1}{n!}\, \sigma^n$ de *kanonieke volume-vorm* in T^*X. Vanwege het lemma van Darboux is in een willekeurige symplectische variëteit (P, σ) de volume-vorm $\omega := \frac{1}{n!}\, \sigma^n$ nergens nul; in het bijzonder leidt dit tot een oriëntatie van P.

Een C^1-diffeomorfisme Φ van een symplectische variëteit (P, σ) naar een symplectische variëteit $(\tilde{P}, \tilde{\sigma})$ heet een *kanonieke transformatie*, als

$$\Phi^*\tilde{\sigma} = \sigma.$$

Bijvoorbeeld, een Darboux-kaart κ is een kanonieke transformatie van (P_κ, σ) naar een open deelverzameling van $\mathrm{T}^*(\mathbf{R}^n)$.

Is v een C^k-vectorveld in P, $k \geq 1$, dan geeft Lemma 5.5.2, dat de v-stroming $e^{t\,v}$ uit kanonieke transformaties in P bestaat, dan en slechts dan als

$$0 = \mathcal{L}_v\sigma = \mathrm{d}(\sigma \cdot v).$$

Hierin hebben we in de tweede identiteit (5.5.11) en $\mathrm{d}\sigma = 0$ gebruikt. In §5.1 en §5.2 hebben we gezien dat $\mathrm{d}(\sigma \cdot v) = 0$ lokaal equivalent met de existentie van een C^{k+1}-functie f, waarvoor

$$\sigma \cdot v = -\mathrm{d}f. \tag{6.2.5}$$

Het minteken hierin is een conventie, die maakt dat in een Darboux-kaart de differentiaalvergelijking $\frac{dp}{dt} = v(p)$ eruit ziet als:

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(x,\, \xi) \\ \frac{d\xi_j}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,\, \xi) \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

voor $1 \leq j \leq n$. Dit is het klassieke *Hamilton-stelsel.* Voor een willekeurige symplectische variëteit (P, σ) heet het eenduidig bepaalde vectorveld v in (6.2.5) het *Hamilton-vectorveld* H_f van de reëelwaardige functie f. In de klassieke mechanica is f de totale energie, zie §6.5. Eigenschappen:

Stelling 6.2.3 *De stroming van een C^k-vectorveld v in een symplectische variëteit (P, σ) bestaat uit kanonieke transformaties, dat wil zeggen laat σ invariant, dan en slechts dan als v lokaal gelijk is aan het Hamilton-vectorveld van een C^{k+1}-functie f. Is dit het geval, dan is f invariant onder de v-stroming en ook de volume-vorm $\omega = \frac{1}{n!}\, \sigma^n$ is invariant onder de v-stroming.*

Bewijs Uit de antisymmetrie van σ volgt

$$0 = (\sigma \cdot v) \cdot v = -\mathrm{d}f \cdot v = -\mathcal{L}_v f,$$

terwijl (5.5.7) impliceert dat

$$\mathcal{L}_v(\sigma^n) = n\sigma^{n-1} \wedge \mathcal{L}_v\sigma = 0.$$

□

De invariantie van f heet in de klassieke mechanica de *wet van behoud van energie*, terwijl de tweede uitspraak bekend staat als de *stelling van Liouville*. Dit laatste kan ook bewezen worden door na te gaan dat in een Darboux-kaart de divergentie van een Hamilton-vectorveld gelijk aan nul is.

Keren we terug naar de coraakbundel $P = \mathrm{T}^* X$ van een n-dimensionale variëteit X, met daarin de kanonieke symplectische vorm σ. Voor een willekeurige C^k 1-vorm g in een open deelverzameling U van X geeft combinatie van (6.2.1) met (5.5.4) en (6.2.4) dat

$$\mathrm{d}g = \mathrm{d}(g^*\tau) = g^*\mathrm{d}\tau = g^*\sigma.$$

Hieruit zien we dat $\mathrm{d}g = 0$ dan en slechts dan als $g^*\sigma = 0$. Zoals we in §5.1 hebben gezien, is de vergelijking $\mathrm{d}g = 0$ lokaal equivalent met $g = \mathrm{d}\varphi$ voor een reëelwaardige C^{k+1}-functie φ. Anders gezegd, de deelvariëteiten van $\mathrm{T}^* X$ van de vorm

$$\Lambda_\varphi := \{(x,\, \mathrm{d}\varphi(x)) \in \mathrm{T}^* X \mid x \in U\} \tag{6.2.7}$$

voor een C^{k+1}-functie φ in een open deelverzameling U van X kunnen lokaal gekarakteriseerd worden als díe n-dimensionale C^k-deelvariëteiten Λ van $\mathrm{T}^* X$, waarvoor

a) $\pi|_\Lambda$ is een diffeomorfisme van Λ naar een open deelverzameling van X en

b) $\sigma_\lambda(u,\, v) = 0$ voor iedere $\lambda \in \Lambda$ en $u,\, v \in \mathrm{T}_\lambda\, \Lambda$.

In het algemeen noemt men een deelvariëteit Λ van een $2n$-dimensionale symplectische variëteit *isotroop* als zij aan b) voldoet; Λ heet een *Lagrange-variëteit*, als Λ isotroop is en $\dim \Lambda = n$.

Een algemene eerste-orde partiële differentiaalvergelijking voor een functie φ in X is een vergelijking van de vorm

$$F(x,\, \varphi(x),\, \mathrm{d}\varphi(x)) = 0.$$

Of, in lokale coördinaten:

$$F(x_1,\, \ldots,\, x_n,\, \varphi(x),\, \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x),\, \ldots,\, \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)) = 0.$$

Wij bespreken nu dit soort vergelijkingen onder de zwakke restrictie dat F niet van $\varphi(x)$ afhangt, dat wil zeggen we kijken naar een partiële differentiaalvergelijking van de vorm

$$f(x,\, \mathrm{d}\varphi(x)) = 0. \tag{6.2.8}$$

Hierin is f een reëelwaardige gladde functie in een open deelverzameling P van $\mathrm{T}^* X$.

De karakterisering van totale afgeleiden van functies φ in termen van de symplectische structuur in $\mathrm{T}^* X$ leidt tot een oplossing van (6.2.8), in termen van de stroming van het Hamilton-vectorveld van de functie f. We formuleren eerst het resultaat, de lokale existentie- en eenduidigheidsstelling voor een beginwaardeprobleem, en vervolgens beschrijven we hoe de oplossingen geconstrueerd kunnen worden. We laten de details van het bewijs hier verder weg.

Stelling 6.2.4 *Stel f is een reëelwaardige C^k-functie in een open deelverzameling P van T^*X, $k \geq 2$. Stel $(x_0, \xi_0) \in P$, $f(x_0, \xi_0) = 0$ en veronderstel dat S een $(n-1)$-dimensionale C^k-deelvariëteit van X is, met $x_0 \in S$ en*

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{T}_{x_0} S.$$

Neem verder aan dat ψ een reëelwaardige C^k-functie is in S, waarvoor $\mathrm{d}\psi(x_0)$ gelijk is aan de beperking van ξ_0 tot $\mathrm{T}_{x_0} S$. Dan is er een open omgeving U van x_0 in X met de eigenschap dat er precies één C^2-oplossing φ in U is van de vergelijking $f(x, \mathrm{d}\varphi(x)) = 0$, waarvoor $\mathrm{d}\varphi(x_0) = \xi_0$ en $\varphi(s) = \psi(s)$ voor alle $s \in S \cap U$.

Stelling 6.2.5 *De oplossing φ in Stelling 6.2.4 wordt als volgt geconstrueerd. Er is een open omgeving S_0 van x_0 in S, met de eigenschap dat er bij iedere $x \in S_0$ precies één $\xi = \xi(x) \in (\mathrm{T}_x X)^*$ is, waarvoor:*

$$\begin{aligned}
&(x, \xi) \in P,\\
&\xi|_{\mathrm{T}_x S} = \mathrm{d}\psi(x) \quad \text{en}\\
&f(x, \xi) = 0.
\end{aligned}$$

De verzameling

$$\Lambda_0 := \{(x, \xi(x)) \mid x \in S_0\}$$

is een $(n-1)$-dimensionale, isotrope C^{k-1}-deelvariëteit van T^*X.

Noteer de stroming van H_f na tijd t met Φ^t. Dan is er een $\varepsilon > 0$, met de eigenschap dat, als we ook S_0 voldoende klein kiezen, de verzameling

$$\Lambda := \{\Phi^t(x) \mid x \in \Lambda_0,\ |t| < \varepsilon\}$$

een C^k Lagrange-deelvariëteit is van T^*X en gelijk is aan (6.2.7) voor de oplossing φ in Stelling 6.2.4.

De oplossing van (6.2.8), door gebruik te maken van de oplossingen van het Hamilton-stelsel van de functie f, staat in de literatuur bekend als de *Hamilton-Jacobi-theorie.* De meetkundige beschrijving van de oplossingen in Stelling 6.2.5 is afkomstig van Lie (omstreeks 1870).

Opmerking 6.2.1 De meeste partiële differentiaalvergelijkingen uit de mathematische fysica, zoals de Laplace-vergelijking, de golfvergelijking of de Maxwell-vergelijkingen, kunnen *niet* opgelost worden door reductie tot stelsels gewone differentiaalvergelijkingen.

Toch kan de Hamilton-Jacobi-theorie ook daaraan een bijdrage leveren, zij het op een wat indirecte manier. Neem bijvoorbeeld de *golfvergelijking*

$$\Box u := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0.$$

We proberen oplossingen van de vorm

$$u(x, t) = e^{i\omega\,(t-\varphi(x))}\, a(x),$$

waarin $\varphi(x)$ en $a(x)$ nader te bepalen reëelwaardige functies van x zijn en $\omega \in \mathbf{R}$. De exponentiële factor is een harmonische trilling als functie van t, met ω als *frequentie*. De *fase* van de trilling is constant gelijk aan c langs het oppervlak $\varphi(x) = t - c$. De factor $a(x) \neq 0$ is een *amplitude*-factor. We proberen dit type oplossingen voor hoge frequentie, dat wil zeggen voor grote waarden van ω.

We krijgen nu

$$\begin{aligned}\Box u = \; & e^{i\omega\,(t-\varphi(x))} \\ & \cdot[\omega^2 \cdot (\sum_{j=1}^{n}(\partial_j\varphi(x))^2 - 1) \cdot a(x) \\ & + i\omega \left(2\sum_{j=1}^{n} \partial_j\varphi(x) \cdot \partial_j a(x) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2\varphi(x) \cdot a(x) \right) \\ & - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 a(x)].\end{aligned}$$

Dit groeit zelfs kwadratisch als functie van ω voor $\omega \to \infty$, tenzij de fasefunctie voldoet aan de niet-lineaire eerste-orde partiële differentiaalvergelijking

$$\sum_{j=1}^{n}(\partial_j\varphi(x))^2 - 1 = 0. \tag{6.2.9}$$

Hebben we (6.2.9) opgelost met behulp van de Hamilton-Jacobi-theorie en daarmee $\varphi(x)$ vastgelegd, dan kunnen we vervolgens de lineaire term in ω gelijk aan nul krijgen, door de amplitude-factor $a(x)$ te laten voldoen aan de lineaire partiële differentiaalvergelijking

$$2\sum_{j=1}^{n} \partial_j\varphi(x) \cdot \partial_j a(x) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2\varphi(x) \cdot a(x) = 0. \tag{6.2.10}$$

Om de aard van deze vergelijking te doorzien, beschouwen we de oplossingen $x(s)$ van het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\tfrac{dx_j}{ds} = 2\partial_j\varphi(x), \quad 1 \leq j \leq n. \tag{6.2.11}$$

De oplossingskrommen hiervan staan loodrecht op de “golffronten” $\varphi(x) =$ constant. Met de notatie

$$c(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2\varphi(x)$$

is (6.2.10) dan equivalent met

$$\tfrac{d}{ds}a(x(s)) + c(x(s)) \cdot a(x(s)) = 0,$$

een lineaire eerste-orde gewone differentiaalvergelijking voor de functie $s \mapsto a(x(s))$. Dit betekent dat we $a(x)$ vrij kunnen voorschrijven in een $(n-1)$-dimensionale variëteit die de oplossingen $s \mapsto x(s)$ dwars snijdt. Kiezen we de drager daarvan in een kleine omgeving van een gegeven punt x_0, dan is de drager van $a(x)$ geconcentreerd in een dunne buis om de oplossing $x(s)$ met $x(0) = x_0$.

Men noemt (6.2.10) de *transportvergelijking* voor de amplitude $a(x)$ langs de oplossingen $x(s)$ van (6.2.11).

Met deze methode worden geen oplossingen u gevonden van de vergelijking $\Box u = 0$, alleen hoogfrequente oplossingen van de asymptotische vergelijking "$\Box u$ blijft begrensd voor $\omega \to \infty$". Op zich zijn deze echter al zeer interessant; bovendien kunnen ze gebruikt worden als bouwstenen voor de constructie van hoogfrequente oplossingen van de exacte vergelijking $\Box u = 0$.

De methode is uit te breiden tot veel algemenere lineaire partiële differentiaalvergelijkingen. De fasefunctie $\varphi(x)$ voldoet dan aan een eerste-orde niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking van de vorm (6.2.8), die we met de Hamilton-Jacobi-theorie oplossen. De amplitude $a(x)$ moet dan vervolgens voldoen aan een vergelijking van de vorm

$$\sum_{j=1}^{n} \tfrac{\partial f}{\partial \xi_j}(x,\, \mathrm{d}\varphi(x)) \cdot \tfrac{\partial a}{\partial x_j}(x) + c(x) \cdot a(x),$$

voor een geschikte functie $c(x)$. Dit is een transportvergelijking langs de oplossingen $x(s)$ van

$$\tfrac{dx_j}{ds} = \tfrac{\partial f}{\partial \xi_j}(x, \mathrm{d}\varphi(x)).$$

Dit vergelijkend met (6.2.6), zien we dat $x(s)$ de projectie in X is van díe oplossingen $(x(s),\, \xi(s))$ van het Hamilton-stelsel (6.2.6), die in de variëteit Λ_φ lopen. De beschrijving in Stelling 6.2.5 liet daarbij zien dat Λ_φ invariant is onder de H_f-stroming. Voor meer details, zie bijv. [6]. $\oslash$

6.3 De Euler-Lagrange-Vergelijkingen

Neem aan dat D een open deelverzameling is van $\mathrm{T}\, X$ en dat L een reëelwaardige C^k-functie is in D. Voor een C^1-kromme $\gamma : [a,\, b] \to X$ met $(\gamma(t),\, \gamma'(t)) \in D$ voor alle $t \in [a,\, b]$ definiëren we

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b L(\gamma(t), \gamma'(t))\, dt.$$

Dit definieert een functie $\mathcal{L}$ in de ruimte $\mathcal{C}$ van C^1-krommen in X; zo'n functie in een ruimte van functies wordt ook wel een *functionaal* genoemd. Men kan $\mathcal{C}$ voorzien van de structuur van een oneindig-dimensionale variëteit, waarvoor dan $\mathcal{L}$ een differentieerbare functie is in $\mathcal{C}$, met een totale afgeleide in γ die een lineaire vorm is op $\mathrm{T}_\gamma\, \mathcal{C}$. Omdat we de benodigde theorie hiervan niet ontwikkeld hebben, behelpen we ons hier met ad hoc definities.

Zij $\Gamma : S \times [a,\, b] \to X$ een C^1-familie van C^1-krommen in X, in de zin dat in lokale coördinaten de coördinaatsfunctie f van Γ voldoen aan de voorwaarden van Lemma 1.8.1. We noteren

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_s(t) := \Gamma(s,\, t), \\ \delta(t) &:= \tfrac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,\, t), \end{aligned}$$

Merk op dat $\delta(t) \in \mathrm{T}_{\gamma(t)}\, X$ voor iedere $t \in [a,\, b]$, dus δ is een vectorveld langs γ.

De vectorvelden langs γ vormen, met de puntsgewijze optelling en scalairvermenigvulging in de lineaire ruimten $\mathrm{T}_{\gamma(t)}\, X$, $t \in [a,\, b]$, een lineaire ruimte, die we de raakruimte $\mathrm{T}_\gamma\, \mathcal{C}$ zouden kunnen noemen. In deze filosofie is $\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\gamma_s)$ gelijk aan de afgeleide $\mathrm{d}\mathcal{L}_\gamma \cdot \delta$ van $\mathcal{L}$, in het punt $\gamma \in \mathcal{C}$, in de richting van $\delta \in \mathrm{T}_\gamma\, \mathcal{C}$.

Men zegt dat de functionaal $\mathcal{L}$ *stationair* is in γ, als $\mathrm{d}\mathcal{L}_\gamma \cdot \delta = 0$ voor iedere $\delta \in \mathrm{T}_\gamma \mathcal{C}$ met $\delta(a) = 0$, $\delta(b) = 0$. Deze laatste condities corresponderen met het vasthouden van de eindpunten bij het variëren van de kromme γ.

Stelling 6.3.1 *Zij X een variëteit, D een open deelverzameling van $\mathrm{T}\,X$ en L een reëelwaardige C^1-functie in D, met de eigenschap dat*

$$\Phi : (x,\, v) \mapsto (x,\, \tfrac{\partial L}{\partial v}(x,\, v))$$

een C^1-afbeelding is van D naar $\mathrm{T}^*\,X$. Zij $\gamma \in \mathrm{C}^2([a,\, b],\, X)$ en $(\gamma(t),\, \gamma'(t)) \in D$ voor alle $t \in [a,\, b]$. Dan is er een eenduidig bepaalde continue afbeelding $\lambda : [a,\, b] \to \mathrm{T}^*\,X$, met $\pi \circ \lambda = \gamma$ en met de eigenschap dat voor iedere C^1-familie van C^1-krommen Γ met $\gamma_s = \gamma$ en $\frac{d}{ds}\gamma_s = \delta$ geldt:

$$\tfrac{d}{ds}\mathcal{L}(\gamma_s) = \int_a^b \lambda(t) \cdot \delta(t)\, dt + [\tfrac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\, \gamma'(t)) \cdot \delta(t)]_{t=a}^{t=b}. \tag{6.3.1}$$

In geïnduceerde lokale coördinaten in $\mathrm{T}\,X$ en $\mathrm{T}^*\,X$ is

$$\lambda(t) = \tfrac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\, \gamma'(t)) - \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\, \gamma'(t)). \tag{6.3.2}$$

De functionaal $\mathcal{L}$ is stationair in γ, dan en slechts dan als $\lambda(t) = 0$ voor alle $t \in [a,\, b]$.

Bewijs Neem eerst aan dat $\gamma_s([a,\, b])$ bevat is in een coördinaatomgeving, zodat we de volgende berekening in lokale coördinaten op kunnen schrijven.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{ds}\mathcal{L}(\gamma_s) = \tfrac{d}{ds}\int_a^b L(\Gamma(s,\, t),\, \tfrac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,\, t))\, dt \\
&= \int_a^b [\tfrac{\partial L}{\partial x}(\Gamma(s,\, t),\, \tfrac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,\, t)) \cdot \tfrac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,\, t) + \tfrac{\partial L}{\partial v}(\Gamma(s,\, t),\, \tfrac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,\, t)) \cdot \tfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(s,\, t)]\, dt \\
&= \int_a^b [\tfrac{\partial L}{\partial x}(\Gamma(s,\, t),\, \tfrac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,\, t)) - \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial v}(\Gamma(s,\, t),\, \tfrac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,\, t))] \cdot \tfrac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,\, t)\, dt \\
&+ [\tfrac{\partial L}{\partial v}(\Gamma(s,\, t),\, \tfrac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,\, t)) \cdot \tfrac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,\, t)]_{t=a}^{t=b}.
\end{aligned}$$

Hierin hebben we in de tweede regel de differentiatievolgorde naar s en t verwisseld en vervolgens een partiële integratie op de desbetreffende term toegepast.

Dit bewijst (6.3.1) met (6.3.2) als γ in een coördinaatomgeving verloopt. In het algemeen krijgen we dit, zelfs voor een stuksgewijs C^2-kromme γ, door $[a,\, b]$ te verdelen in zulke kleine deelintervallen $[a_i,\, b_i]$, met $a_1 = a$, $b_i = a_{i+1}$ voor $1 \leq i \leq N - 1$ en $b_N = b$, dat de beelden $\gamma([a_i,\, b_i])$ bevat zijn in coördinaatomgevingen. De uitdrukkingen (6.3.1) met $[a,\, b]$ vervangen door $[a_i,\, b_i]$ sommeren we over i en we merken op dat de randtermen in b_i wegvallen tegen die in a_{i+1} als $1 \leq i \leq N - 1$.

Tenslotte bewijzen we de eenduidigheid van $\lambda(t)$ en daarmee ook de noodzakelijkheid van $\lambda(t) \equiv 0$ als $\mathcal{L}$ stationair is in γ. Voor gegeven $t_0 \in [a,\, b]$, $v \in \mathrm{T}_{\gamma(t_0)}\,X$, gebruiken we "testvariaties" $\delta = \delta_\varepsilon$, die drager hebben in een ε-omgeving T_ε van t_0 in $[a,\, b]$ en waarvoor in geïnduceerde lokale coördinaten geldt dat

$$\int_a^b \delta(t)\, dt = v,$$

terwijl we eisen dat

$$\int_a^b \|\delta(t)\|\,dt \le C$$

voor een constante C die onafhankelijk is van ε. De existentie hiervan is niet moeilijk om aan te tonen, deze testvariaties zijn "sterk gepiekt in de richting van v".

Ons beperkend tot bovenstaande variaties δ, betekent dat we de berekeningen in geïnduceerde lokale coördinaten kunnen uitvoeren. De continuïteit van $\lambda(t)$ in t_0 geeft dat er voor iedere $\eta > 0$ een $\varepsilon > 0$ is, met de eigenschap dat $\|\mu(t)\| \le \eta$ voor alle $t \in T_\varepsilon$ als

$$\mu(t) := \lambda(t) - \lambda(t_0).$$

Nu is de eerste integraal in

$$\tfrac{d}{ds}\mathcal{L}(\gamma_s) = \int_a^b \lambda(t_0) \cdot \delta(t)\,dt + \int_a^b \mu(t) \cdot \delta(t)\,dt$$

gelijk aan $\lambda(t_0) \cdot v$, terwijl

$$|\int_a^b \mu(t) \cdot \delta(t)\,dt| \le \int_a^b |\mu(t) \cdot \delta(t)|\,dt \le \int_a^b \|\mu(t)\| \cdot \|\delta(t)\|\,dt \le \eta \cdot C.$$

(Hierin is in de tweede ongelijkheid de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz toegepast.)

Dit betekent dat, als $\gamma_{s,\,\varepsilon}$ zó gekozen is, dat $\frac{d}{ds}\gamma_{s,\,\varepsilon} = \delta_\varepsilon$, dan is

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tfrac{d}{ds}\mathcal{L}(\gamma_{s,\,\varepsilon}) = \lambda(t_0) \cdot v.$$

Voldoet $\tilde{\lambda}(t)$ in plaats van $\lambda(t)$ ook aan de voorwaarden van de stelling dan zien we hieruit dat voor iedere $t_0 \in [a,\, b]$ geldt dat $\tilde{\lambda}(t_0) \cdot v = \lambda(t_0) \cdot v$ voor alle $v \in \mathrm{T}_{\gamma(t_0)}\, X$, dus $\tilde{\lambda}(t_0) = \lambda(t_0)$. □

De vergelijking $\lambda(t) \equiv 0$ voor het stationair zijn van $\mathcal{L}$ in γ heet de *Euler-Lagrange-vergelijking* voor de functie L. In lokale coördinaten luidt deze:

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\, \gamma'(t)) = \tfrac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\, \gamma'(t)). \tag{6.3.3}$$

Hierin kan het linkerlid herschreven worden als $\partial_x \partial_v L \cdot \gamma' + \partial_v^2 L \cdot \gamma''$. Men noemt L een *niet-gedegenereerde Lagrange-functie* als voor iedere $(x,\, v) \in D$ de symmetrische bilineaire vorm $\partial_v^2 L(x,\, v)$ in $\mathrm{T}_x\, X$ niet-gedegenereerd is. In dit geval kan (6.3.3) herschreven worden als een tweede orde stelsel gewone differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\gamma''(t) = a(\gamma(t),\, \gamma'(t))$$

voor een vectorwaardige functie $a(x,\, v)$, waarvan we het uitschrijven aan de lezer overlaten. Dit is equivalent met een eerste-orde stelsel van de vorm

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= v, \\ \tfrac{dv}{dt} &= a(x,\, v) \end{aligned}$$

in $\mathrm{T}\, X$. Het vectorveld in het rechterlid is een vectorveld $w = w_L$ in D, dat we het *Euler-Lagrange-vectorveld van de functie L* zullen noemen.

Op een aantal plaatsen hebben we de afgeleide $\frac{\partial L}{\partial v}(x,\, v)$ van de beperking van L tot $\mathrm{T}_x\, X$ zien verschijnen. De identificatie van alle raakruimten van de lineaire ruimte $\mathrm{T}_x\, X$ met $\mathrm{T}_x\, X$ gebruikend, wordt $\frac{\partial L}{\partial v}(x,\, v)$ als een lineaire vorm op $\mathrm{T}_x\, X$ beschouwd. De afbeelding

$$\Phi = \Phi_L : (x,\, v) \mapsto (x,\, \tfrac{\partial L}{\partial v}(x,\, v)) \tag{6.3.4}$$

van D naar $\mathrm{T}^*\, X$ die zo ontstaat heet de *snelheid-impulstransformatie* gedefinieerd door de Lagrange-functie L. De *energiefunctie* E *van* L in D wordt gedefinieerd door:

$$E(x,\, v) = E_L(x,\, v) := \tfrac{\partial L}{\partial v}(x,\, v) \cdot v - L(x,\, v). \tag{6.3.5}$$

Lemma 6.3.2 *Zij γ en λ als in Stelling 6.3.1, Φ de snelheid-impulstransformatie en E de energie van L. $\gamma'(t)$ als een element van $\mathrm{T}\, X$ beschouwend en $\gamma''(t)$ als een element van $\mathrm{T}_{\gamma'(t)}(\mathrm{T}\, X)$, hebben we de formule*

$$(\Phi^*\sigma)_{\gamma'(t)} \cdot \gamma''(t) + \mathrm{d}E_{\gamma'(t)} + \lambda(t) \circ \mathrm{T}_{\gamma'(t)}\, \pi = 0. \tag{6.3.6}$$

Hierin is σ de kanonieke 2-vorm in $\mathrm{T}^*\, X$.

Bewijs We bewijzen dit door een berekening in geïnduceerde lokale coördinaten in $\mathrm{T}\, X$, resp. $\mathrm{T}^*\, X$. Is $\alpha = \sum_j \xi_j\, \mathrm{d}x_j$ de kanonieke 1-vorm in $\mathrm{T}^*\, X$, dan is

$$\Phi^*\alpha = \sum_j \frac{\partial L}{\partial v_j}\, \mathrm{d}x_j,$$

dus

$$\begin{aligned} \Phi^*\sigma &= \Phi^*\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\Phi^*\alpha \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial v_j}\, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\, \mathrm{d}v_i \wedge \mathrm{d}x_j. \end{aligned}$$

Noteren we $\gamma(t) = x$, $\gamma'(t) = v$, $\gamma''(t) = a$ als elementen van $\mathbf{R}^n$, dan is $(x,\, v) = \gamma'(t)$, beschouwd als element van $\mathrm{T}\, X$ en $(v,\, a) = \gamma''(t)$, beschouwd als element van $\mathrm{T}_{\gamma'(t)}(\mathrm{T}\, X)$. Daarmee wordt de eerste term in het linkerlid van (6.3.6) gelijk aan

$$\sum_{i,j} (\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial v_j}\, v_i\, \mathrm{d}x_j - \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial v_j}\, v_j\, \mathrm{d}x_i + \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\, a_i\, \mathrm{d}x_j - \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\, v_j\, \mathrm{d}v_i).$$

De tweede term is gelijk aan

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E = &\sum_{i,j} (\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial v_j}\, v_j\, \mathrm{d}x_i + \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\, v_j\, \mathrm{d}v_i) + \sum_j \frac{\partial L}{\partial v_j}\, \mathrm{d}v_j \\ &- \sum_j (\frac{\partial L}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_j + \frac{\partial L}{\partial v_j}\, \mathrm{d}v_j) \\ = &\sum_{i,j} (\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial v_j}\, v_j\, \mathrm{d}x_i + \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\, v_j\, \mathrm{d}v_i) - \sum_j (\frac{\partial L}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_j. \end{aligned}$$

Tenslotte is de derde term gelijk aan

$$\sum_j (\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_i (\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial v_j}\, v_i + \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\, a_i))\, \mathrm{d}x_j.$$

Sommatie van de drie termen geeft nu 0. $\square$

Stelling 6.3.3 *De snelheid-impulstransformatie Φ is een lokaal diffeomorfisme, dan en slechts dan als de Lagrange-functie L niet-gedegenereerd is. Is dit het geval, dan is $\tilde{\sigma} := \Phi^* \sigma$ een symplectische vorm in D en is het Euler-Lagrange-vectorveld w in D gegeven door $\tilde{\sigma} \cdot w = -\mathrm{d}E$. Als Φ ook nog injectief is, dan is $\Phi_* w$ gelijk aan het Hamilton-vectorveld van de functie $e := E \circ \Phi^{-1}$ in de open deelverzameling $P := \Phi(D)$ van $\mathrm{T}^* X$.*

Bewijs In geïnduceerde lokale coördinaten in $\mathrm{T}\, X$, resp. $\mathrm{T}^* X$ heeft de matrix van $\mathrm{D}\, \Phi$ de identiteit in de linkerbovenhoek, 0 in de rechterbovenhoek en $\partial_v^2 L$ in de rechteronderhoek. Hieruit lezen we af dat $\mathrm{D}\, \Phi$ inverteerbaar is, dan en slechts dan als $\partial_v^2 L$ inverteerbaar is.

De tweede uitspraak volgt door in (6.3.6) $\gamma''(t) = w$ en $\lambda(t) = 0$ te substitueren.

Tenslotte volgt $\sigma \cdot (\Phi_* w) = -\mathrm{d}e$ uit

$$\Phi^*(\sigma \cdot (\Phi_* w)) = (\Phi^* \sigma) \cdot w = -\mathrm{d}E = -\mathrm{d}\Phi^* e = -\Phi^* \mathrm{d}e.$$

$\square$

Opmerking 6.3.1 Voor iedere $x \in X$, $\xi \in (\mathrm{T}_x\, X)^*$ is het getal $e(x,\, \xi)$ gelijk aan de kritieke waarde van de functie

$$v \mapsto \xi(v) - L(x,\, v) : \mathrm{T}_x\, X \to \mathbf{R}.$$

Wanneer $v \mapsto L(x,\, v)$ harder dan linear naar ∞ gaat als $\| v \| \to \infty$, dan geeft dit, dat

$$e(x,\, \xi) = \min_{v \in \mathrm{T}_x X} \xi(v) - L(x,\, v),$$

in het bijzonder geldt dan de ongelijkheid

$$e(x,\, \xi) \leq \xi(v) - L(x,\, v) \quad \text{voor alle} \quad v \in \mathrm{T}_x\, X.$$

De afbeelding $L \mapsto e$ staat bekend als de *Legendre-transformatie*. $\oslash$

Is e een voldoend gladde functie in een open deelverzameling P van $\mathrm{T}^* X$, dan definiëren we de *impuls-snelheidtransformatie* door:

$$\Psi = \Psi_e : (x,\, \xi) \mapsto (x,\, \tfrac{\partial e}{\partial \xi}(x,\, \xi)) : P \to \mathrm{T}\, X. \tag{6.3.7}$$

Verder definiëren we de functie $l = l_e$ in P door

$$l(x,\, \xi) = \xi \cdot \tfrac{\partial e}{\partial \xi}(x,\, \xi) - e(x,\, \xi).$$

We hebben dan, enigszins verrassend, de volgende omkering van Stelling 6.3.3:

Stelling 6.3.4 *Is L een niet-gedegenereerde Lagrange-functie en is de snelheid-impulstransformatie Φ_L injectief, dan heeft $e := (\Phi_L^{-1})^* E_L$ de eigenschap dat $\Phi_L^{-1} = \Psi_e$ en $L = \Phi_L^* l$. In het bijzonder is $\partial_\xi^2 e(x,\, \xi)$ niet-gedegenereerd en is Ψ_e een diffeomorfisme van $P := \Phi_L(D)$ naar D.*

Is omgekeerd e een voldoend gladde functie in de open deelverzameling P van $\mathrm{T}^* X$, $\partial_\xi^2 e(x,\, \xi)$ niet-gedegenereerd en is Ψ_e injectief, dan is Ψ_e een diffeomorfisme van P naar een open deelverzameling D van $\mathrm{T}\, X$, $L := l_e \circ \Psi_e^{-1}$ is een niet-gedegenereerde Lagrange-functie in D, $\Phi_L = \Psi_e^{-1}$ en $e = E_L \circ \Psi_e$.

Bewijs Uit

$$\sum_j \tfrac{\partial L}{\partial v_j} \cdot v_j - L(x,\, v) = e(x,\, \tfrac{\partial L}{\partial v}(x,\, v))$$

krijgen we door differentiatie naar v_i dat

$$\sum_j \tfrac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x,\, v) \cdot v_j = \sum_j \tfrac{\partial f}{\partial \xi_j}(x,\, \xi) \cdot \tfrac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x,\, v),$$

als we $\xi = \frac{\partial L}{\partial v}(x,\, v)$ noteren. Hieruit lezen we af, gebruikmakend van de niet-gedegenereerdheid van $\partial_v^2 L$, dat

$$v_j = \tfrac{\partial f}{\partial \xi_j}(x,\, \xi).$$

Het bewijs van de tweede uitspraak gaat analoog. □

Deze equivalentie tussen Euler-Lagrange-vectorvelden en Hamilton-vectorvelden kan beide kanten op worden gebruikt. Voor Euler-Lagrange-vectorvelden krijgt men als gevolg de invariantie van de energiefunctie E en van de volumevorm $\Phi^*(\frac{1}{n!}\sigma^n)$. Voor Hamilton-vectorvelden krijgen we de conclusie dat de oplossingskrommen ook verkregen kunnen worden als stationaire krommen van een functionaal $\mathcal{L}$. Gebruikmakend van functionaalanalytische technieken kunnen op deze manier bijvoorbeeld existentiestellingen verkregen worden voor oplossingen met voorgeschreven begin- en eindpunt.

Voorbeeld 6.3.1 Als β een pseudo-Riemann-structuur is in X, dan definieert

$$L(x,\, v) := \tfrac{1}{2}\beta_x(v,\, v)$$

een niet-gedegenereerde Lagrange-functie in $\mathrm{T}\, X$. Immers, $\partial_v L(x,\, v) = \beta_x \cdot v$ en $\partial_v^2 L(x,\, v) = \beta_x$. Vergelijking (6.1.16) laat zien dat de stationaire krommen de geodeten zijn. Het Euler-Lagrange-vectorveld in $\mathrm{T}\, X$ is het vectorveld van de geodetische stroming in $\mathrm{T}\, X$.

Omdat $L(x,\, c\, v) = c^2\, L(x,\, v)$, levert differentiatie naar c in $c = 1$ op dat $\partial_v L(x,\, v) \cdot v = 2\, L(x,\, v)$, dus $E(x,\, v) = L(x,\, v)$. De snelheid-impulstransformatie is gelijk aan

$$\beta : (x,\, v) \mapsto (x,\, \beta_x \cdot v) : \mathrm{T}\, X \mapsto \mathrm{T}^*\, X,$$

waarin nu β_x voor iedere $x \in X$ gezien wordt als lineaire afbeelding van $\mathrm{T}_x\, X$ naar $(\mathrm{T}_x\, X)^*$. De inverse

$$\beta_x^{-1} : (\mathrm{T}_x\, X)^* \to \mathrm{T}_x\, X \simeq ((\mathrm{T}_x\, X)^*)^*$$

kan opgevat worden als symmetrische bilineaire vorm in $(\mathrm{T}_x\, X)^*$. In termen daarvan is

$$e(x,\, \xi) = \tfrac{1}{2}\beta_x^{-1}(\xi,\, \xi).$$

De geodetische stroming in $\mathrm{T}\, X$ wordt door β geconjugeerd met de Hamilton-stroming van de functie e in $\mathrm{T}^*\, X$. De geodetische stroming laat de functie $L = E$ invariant. ⊘

6.4 Thermodynamica

De toestanden x van een thermodynamisch systeem X worden soms maar door een beperkt aantal fysische grootheden vastgelegd. Zo wordt voor een enkelvoudig gas de toestand vastgelegd door de druk p en de temperatuur T, of door het volume V en de temperatuur T, of door p en V. Tussen de drie grootheden p, V en T wordt experimenteel een relatie geconstateerd, waaruit men één van de drie als gladde functie van de andere twee kan bepalen. Zo heeft men voor een zogenaamd ideaal enkelvoudig gas de relatie $p\,V = R\,T$, met R een constante, die karakteristiek is voor het gas. Voor gasmengsels met meer dan één chemische component zijn er meer fysische grootheden nodig om de toestand te bepalen. De conclusie lijkt gerechvaardigd dat een klassieke thermodynamisch systeem opgevat wordt als een n-dimensionale differentieerbare variëteit; voor een enkelvoudig gas is dan $\dim X = 2$.

Helaas is bij nadere beschouwing de situatie niet zo eenvoudig. De statistisch-mechanische opvatting is, dat een thermodynamisch systeem bestaat uit een zeer groot aantal N van deeltjes. De macroscopische grootheden, zoals p, V en T, zijn in principe functies van de posities en snelheden van alle deeltjes. In deze opvatting zou de ruimte M van "microscopisch bepaalde toestanden" een $6N$-dimensionale variëteit zijn, de macroscopische waarnemingen leveren een projectie μ van M naar de veel lager-dimensionale variëteit X. De dynamica van het veel-deeltjes-systeem levert een stroming $t \mapsto \Phi^t(m)$ in M op. Ideaal zou zijn als de macroscopische waarneming $\mu(\Phi^t(m))$ hiervan alleen af zou hangen van $\mu(m)$, anders gezegd, als μ de stroming in M zou conjugeren met een stroming in X. Althans in een asymptotische zin voor $N \to \infty$. Er zijn weinig statistisch-mechanische modellen, waarvan de "thermodynamische limiet" is uitgerekend. Ook blijken bij sommige statistisch-mechanische modellen de macroscopische functies niet differentieerbaar met elkaar samen te hangen. Neemt men ook nog quantummechanische effecten in het model op, dan wordt M zelfs oneindig-dimensionaal.

Laten we echter terugkeren naar de interpretatie van de klassieke thermodynamische literatuur. Daarin wordt gesproken over "evenwichtstoestanden" $x \in X$. En dat men alleen maar processen toelaat, waarbij men een kleine verstoring in de evenwichtstoestand aanbrengt en dan, voor men verder gaat, eerst wacht tot het systeem opnieuw in evenwicht is. De limiet hiervan voor steeds kleinere verstoringen heet een *infinitesimaal quasistatisch proces*. We vatten dit op als een raakvector $v \in \mathrm{T}_x\,X$; dit correspondeert met het idee van raakvectoren als infinitesimale verplaatsingen in X. Formules als

$$\mathrm{d}(U\,V) = U\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}U,$$

die men veel ziet in thermodynamica, geven verder aan dat ook differentiaalvormen tot de vocabulaire van de thermodynamica behoren.

In $\mathrm{T}_x\,X$ onderscheidt men een 1-dimensionale lineaire deelruimte τ_x van *zuiver thermische processen* (verwarmen, afkoelen) en een complementaire $(n-1)$-dimensionale lineaire deelruimte μ_x van *zuiver mechanische processen.* Voor ieder zuiver thermisch proces $v \in \tau_x$ is de toename van de energie $q_x(v)$ evenredig met v, in de zin dat $q_x(c \cdot v) = c \cdot q_x(v)$ voor iedere $c \in \mathbf{R}$. De eenduidig bepaalde lineaire uitbereiding q_x hiervan naar $\mathrm{T}_x\,X$, die voldoet aan $q_x(v) = 0$ als $v \in \mu_x$, definieert zo een differentiaalvorm q van de graad één in X, de *warmte-vorm* genaamd. Aangenomen wordt dat $q_x \neq 0$ voor iedere $x \in X$, zodat $\mu_x = \ker q_x$. Men kan natuurlijk ook uitgaan van een nergens verdwijnende 1-vorm q in X en de zuiver mechanische processen definiëren als de codimensie 1 deelbundel $\ker q$.

Een differentieerbare kromme γ in X heet een thermisch, resp. mechanisch proces, als $\gamma'(t) \in$

$\tau_{\gamma(t)}$, resp. $\gamma'(t) \in \mu_{\gamma(t)}$ voor alle t. Een klassieke *Carnot-kring* is een gesloten kromme γ in X, bestaande uit een thermisch proces, gevolgd door een mechanisch proces, dan weer een thermisch proces en tenslotte weer een mechanisch proces.

De waarneming is, dat de integraal van q over een Carnot-kring γ niet gelijk aan nul hoeft te zijn. Dat wil zeggen, gedurende het proces kan er netto warmte aan het systeem toegevoerd (resp. van het systeem onttrokken) zijn. Dit wordt door afvoer (resp. toevoer) van energie bij de zuiver mechanische processen gecompenseerd, vanwege de wet van behoud van totale energie. Dit betekent dat er geen functie Q is met $q = \mathrm{d}Q$. Omdat zelfs $\int_\gamma q \neq 0$ voor kleine kringen γ, is de conclusie dat q geen gesloten differentiaalvorm is. Men ziet dit in de literatuur weergegeven doordat men in plaats van met q de warmte-vorm noteert met $\not{\mathrm{d}}Q$: een differentiaalvorm, die echter *niet* gelijk is aan $\mathrm{d}Q$ voor een "warmtefunctie" Q.

Anderzijds is de waarneming ook, dat het niet mogelijk is om een thermisch proces te realiseren door middel van een zuiver mechanisch proces. Dit betekent dat de deelvectorbundel μ_x, $x \in X$, integreerbaar is. Een en ander wordt bevestigd door het optreden van de formule

$$\not{\mathrm{d}}Q = T\,\mathrm{d}S,$$

waarin T, de *absolute temperatuur* en S, de *entropie* goedgedefinieerde functies in X zijn. Immers dit impliceert dat q een integrerende factor heeft, hetgeen equivalent is met de integreerbaarheid van $\mu = \ker q$, zie Stelling 5.2.2. De 2-vorm

$$\mathrm{d}q = \mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}S$$

kan dan geïnterpreteerd worden als de "netto warmtetoevoer bij een infinitesimale Carnot-kring", zie Stelling 5.2.1.

6.5 Klassieke Mechanica

In de Newton'se klassieke mechanica beschouwt men een systeem van N deeltjes, ieder met drie positiecoördinaten, zodat de positie van het systeem gegeven wordt door een punt $q \in \mathbf{R}^n$, met $n = 3N$. Heeft het i-de deeltje *trage massa* gelijk aan $m(i)$, dan noteren we $m_j = m(i)$ als $j = 3i - 2,\, 3i - 1,\, 3i$, zodat de gemeenschappelijke *impulsvector* $p \in \mathbf{R}^n$ van het systeem gegeven wordt door

$$p_j = m_j\, v_j = m_j\, \tfrac{dq_j}{dt}. \tag{6.5.1}$$

De *wet van Newton* luidt nu dat de dynamica van het systeem beschreven wordt door het stelsel vergelijkingen

$$\tfrac{dp_j}{dt} = k_j(q), \tag{6.5.2}$$

waarin de *kracht* $k(q) \in \mathbf{R}^n$ een gegeven functie is van de positie van het systeem. We beperken ons hier verder tot zogenaamde *conservatieve krachten*, dat wil zeggen, we nemen aan dat er een (voldoende vaak differentieerbare) reëelwaardige functie $V(q)$ van de positie is, de *potentiële energie* van het systeem genaamd, waarvoor

$$k_j(q) = -\tfrac{\partial V}{\partial q_j}(q), \quad 1 \leq j \leq n. \tag{6.5.3}$$

De *kinetische energie* van het systeem wordt gegeven door

$$T := \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j\, v_j^2 = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{m_j}\, p_j^2. \tag{6.5.4}$$

Dit correspondeert met de interpretatie van de trage massa als de energie die het kost om het systeem een bepaalde snelheid te geven. Beschouwen we T als functie van p, dan kan (6.5.1) herschreven worden als

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_j}(p). \tag{6.5.5}$$

De *totale energie* $T + V$ kunnen we schrijven in de gedaante

$$E(q,\, v) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j\, v_j^2 + V(q) \tag{6.5.6}$$

als functie van $(q,\, v)$, of

$$e(q,\, p) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j}\, p_j^2 + V(q) \tag{6.5.7}$$

als functie van $(q,\, p)$.

De vergelijkingen (6.5.5), samen (6.5.2) waarin we (6.5.3) substitueren, geven nu

$$\begin{aligned} \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial e}{\partial p_j}(q,\, p), \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial e}{\partial q_j}(q,\, p). \end{aligned}$$

Vergelijking met (6.2.6) geeft:

De bewegingsvergelijkingen van Newton zijn equivalent met het Hamilton-stelsel gedefinieerd door de totale energie, beschouwd als functie van positie en impuls.

Men concludeert hieruit meteen de wet van behoud van energie:

$$\frac{d}{dt} e(q(t),\, p(t)) = 0.$$

En de wet van Liouville, die zegt dat de stroming in de $(q,\, p)$ ruimte volumebewarend is. Zie Stelling 6.2.3. (Natuurlijk kan men deze conclusies ook door directe berekening verifiëren.)

Is Φ een kanonieke transformatie, dan is

$$\Phi^* H_f = H_{\Phi^* f}. \tag{6.5.8}$$

Omdat bij coördinatentransformaties de geïnduceerde coördinatentransformaties in de coraakbundel kanonieke transformaties zijn, zijn Hamilton-stelsels coördinaat-invariant in de zin dat in *willlekeurige* lokale coördinaten voor de positieruimte Q, de bewegingsvergelijkingen in de bijbehorende geïnduceerde lokale coördinaten voor $\mathrm{T}^*\, Q$ van de vorm (6.2.6) zijn.

Geïnduceerde coördinatentransformaties zijn overigens heel speciale kanonieke transformaties. Zo bestaat de stroming van het mechanische systeem zelf uit kanonieke transformaties die geen geïnduceerde coördinatentransformaties zijn, omdat het daarbij niet zo is dat een vezel $(\mathrm{T}_q\, Q)^*$ naar een vezel $(\mathrm{T}_{\tilde{q}}\, Q)^*$ wordt afgebeeld.

Merk op dat in deze opzet van de klassieke mechanica de impuls p als een element van $(\mathrm{T}_q\, Q)^*$ opgevat wordt, dus als een lineaire vorm in de raakruimte $\mathrm{T}_q\, Q$. In tegenstelling tot de snelheidsvectoren $v \in \mathrm{T}_q\, Q$. Analoog is de de coördinaat-invariante interpretatie van (6.5.3) dat $k = -\mathrm{d}V$, dus k is een differentiaalvorm van de graad 1 in Q, en geen vectorveld. Het is even wennen om krachtvelden als 1-vormen op te vatten, maar dit geeft wél de correcte transformatieformules.

We kunnen V uit k terugvinden met de formule

$$V(q) = V(q_0) - \int_\gamma k,$$

als γ een willekeurige stuksgewijs C^1-kromme in Q is van q_0 naar q. Ook dit is coödinaat-invariant als k opgevat wordt als 1-vorm. De voorwaarde dat het krachtveld conservatief is, is equivalent met de de voorwaarde dat $\int_\gamma k = 0$ voor iedere gesloten kromme γ in Q. Lokaal is deze voorwaarde equivalent met $\mathrm{d}k = 0$, zie §5.1 en §5.2.

De impuls-snelheidtransformatie (6.3.7) luidt hier

$$(q,\, p) \mapsto (q,\, v), \quad v_j := \tfrac{1}{m_j}\, p_j.$$

Dit is een inverteerbare transformatie, die het Hamilton-stelsel overvoert in de Euler-Lagrange-vergelijkingen voor de Lagrange-functie

$$L(x,\, v) := \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j\, v_j^2 - V(q),$$

zie Stelling 6.3.4. Merk op dat $L = T - V$ hier niet gelijk is aan de totale energie $E = T + V$. De Lagrange-functie is geen constante van beweging, tenzij $k = -\mathrm{d}V \equiv 0$.

In willekeurige geïnduceerde lokale coördinaten kan de kinetische energie $T = T(q,\, v)$, beschouwd als functie in $\mathrm{T}\, Q$, er behoorlijk ingewikkeld uitzien. Voor iedere $q \in Q$ is het een positieve tweedegraadsveelterm in $\mathrm{T}_q\, Q$, waarvan de coëfficiënten op ingewikkelde manier van q kunnen afhangen.

Opmerking 6.5.1 Nog ingewikkelder wordt het, om de transformatie van de tijdsafgeleide van de impuls, het linkerlid in de wet van Newton (6.5.2), bij willekeurige substitutie van de positievariabelen te bepalen. Dit leidde Lagrange in zijn boek "Mécanique Analytique" (± 1800) tot de ontdekking dat de grootheid

$$[T] := \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial T}{\partial v}\right) - \tfrac{\partial T}{\partial q}$$

onder willekeurige substituties van q-coördinaten *covariant* transformeert, dat wil zeggen als een element van $(\mathrm{T}_q\, Q)^*$. De wet van Newton krijgt daarbij de gedaante

$$[T] = k,$$

waarin het krachtveld k een willekeurige 1-vorm in Q voorstelt.

Als $k = -\mathrm{d}V$ voor een potentiële energie-functie V, dan krijgt de wet van Newton de gedaante

$$[L] = [T] - [V] = 0.$$

Dit zijn de Euler-Lagrange vergelijkingen voor $L = T - V$, immers $-[L]$ is gelijk aan de lineaire vorm λ in (6.3.2). Hiermee is het bovenvermelde transformatie-gedrag van $[L]$ en dus ook van $[T]$ een gevolg van Stelling 6.3.1.

Opmerkelijk genoeg legt Lagrange in de Mécanique Analytique *geen* verband tussen de bewegingsvergelijkingen voor de klassieke mechanica en de variatievergelijkingen voor de integraal van L, hoewel hij zelf een halve eeuw daarvoor de grondslagen voor de variatierekening had gelegd.

Een verklaring zou kunnen zijn, dat Lagrange geen grote fysische betekenis hechtte aan de functie $L = T - V$, in contrast met de totale energie $E = T + V$. $\oslash$

Een natuurlijke generalisatie van de klassieke mechanica is, dat men voor een willekeurige Riemann-variëteit $(X,\, \beta)$ en voldoend gladde reëelwaardige functie V in X, het *Newton-systeem met trage massa β en potentiële energie* V definieert als het Hamilton-stelsel in $\mathrm{T}^*\, X$, gedefinieerd door de totale energie functie

$$e(x,\, \xi) := \tfrac{1}{2}\, \beta_x^{-1}(\xi,\, \xi) + V(x).$$

Het systeem in $\mathrm{T}\, X$ dat door de Legendre-transformatie $(x,\, v) \mapsto (x,\, \beta_x \cdot v)$ hier naartoe geconjugeerd wordt, wordt het bijbehorende Newton-systeem in de raakbundel genoemd. Voor $V = 0$ krijgen we zo de geodetische stroming. Op deze wijze worden de geodeten van $(X,\, \beta)$ de banen in de positieruimte X van deeltjes in een klassiek mechanisch systeem, waarop geen krachten werken.

Opmerking 6.5.2 Hierboven is beargumenteerd dat krachtvelden geen vectorvelden zijn, maar differentiaalvormen. Wél kan men in een (pseudo-)Riemann-variëteit $(X,\, \beta)$ aan de 1-vorm $\mathrm{d}V$ het vectorveld

$$\mathrm{grad}_{\,\beta} V : x \mapsto \beta_x^{-1} \mathrm{d}V(x) \in \mathrm{T}_x\, X$$

toevoegen, dit heet het *gradiëntenvectorveld van de functie V met betrekking tot β.*

Voor een C^2-kromme γ in X is de tweede orde afgeleide $a := \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t)$ een coördinaat-onafhankelijk gedefinieerd element van $\mathrm{T}_x\, X$ als $x := \gamma(t)$ en $v := \frac{d\gamma}{dt}(t) = 0$. Als γ een oplossing is van het Newton-stelsel met potentiaal V, dan is $a = -\mathrm{grad}_{\,\beta} V(x)$. Op deze manier kan de gradiënt van V "fysisch waargenomen" worden.

Als β de standaard Rieman-structuur is in $\mathbf{R}^n$, dan is de gradiënt van V de vector met coördinaten $\frac{\partial V}{\partial x_j}(x)$, de coördinaten van $\mathrm{d}V(x)$. $\oslash$

Opmerking 6.5.3 In de *relativiteitstheorie van Einstein* worden positie en tijd samengevat tot een vier-dimensionale variëteit U, het ruimte-tijd-universum, die wordt voorzien van een pseudo-Riemann-structuur g met index gelijk aan 3.

De vectoren v met $g_u(v,\, v) > 0$ heten *tijd-achtig* en de die met $g_u(v,\, v) < 0$ heten *ruimte-achtig.* De vectoren $v \in \mathrm{T}_u\, U$ met $g_u(v,\, v) = 0$ vormen de *lichtkegel in* $\mathrm{T}_u\, U$.

De krommen in U die de beweging van een deeltje onder de invloed van de zwaartekracht beschrijven zijn de geodeten ten aanzien van β met tijd-achtige snelheidsvector. De banen van lichtdeeltjes zijn de geodeten waarvoor de snelheidsvector in de lichtkegel ligt. Merk op dat

$$t \mapsto g_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\, \gamma'(t))$$

constant is voor iedere geodeet $\gamma(t)$, in het bijzonder blijft het teken hiervan behouden. $\oslash$

Opmerking 6.5.4 In de quantummechanica heeft men de *Schrödinger-vergelijking*

$$S\psi := -\frac{\hbar^2}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j^2} + V(q)\, \psi(q) = E\, \psi(q).$$

Hierbij is de lineaire partiële differentiaal-operator aan de linkerkant verkregen uit de uitdrukking (6.5.7) voor de energie van een Newton-systeem, door overal formeel de impulscoördinaat p_j te vervangen door

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j}.$$

Het positieve getal $\hbar$ heet de *constante van Planck*, dit is een zeer kleine parameter als men op macroscopische schaal metingen doet.

De *WKB-methode* bestaat uit het proberen van asymptotische oplossingen van de vorm

$$\psi(q) = e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(q)}\, a(q)$$

in de zin dat $S\psi$ begrensd blijft voor $\hbar \downarrow 0$. We herkennen hierin de hoogfrequente asymptotische oplossingen uit Opmerking 6.2.1, met $\omega = \frac{1}{\hbar}$. De vergelijking voor de fasefunctie φ wordt in dit geval

$$\tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{m_j} (\tfrac{\partial\varphi}{\partial q_j})^2 + V(q) = E,$$

ofwel, de grafiek Λ_φ van $\mathrm{d}\varphi$ is bevat in het energie-oppervlak $e = E$ voor het Newton-systeem. De Hamilton-Jacobi-Lie-theorie geeft dat Λ_φ opgebouwd is uit oplossingskrommen $t \mapsto (q(t),\, p(t))$ van het Newton-systeem. Bovendien voldoet de amplitudefactor $a(x)$ aan de transportvergelijking, een lineaire gewone differentiaalvergelijking langs de projecties $q(t)$ in de positie-ruimte van de oplossingen van het Newton-systeem.

De asymptotische relatie tussen de quantummechanica en de klassieke mechanica voor $\hbar \downarrow 0$ heet het *correspondentieprincipe*. De WKB-methode is daarvan een onderdeel. $\oslash$

6.6 De Maxwell-vergelijkingen

Electromagnetische verschijnselen worden beschreven door de *Maxwell-vergelijkingen*. Deze worden gewoonlijk, na keuze van geschikte eenheden, in de volgende vorm gepresenteerd. Er zijn $\mathbf{R}^3$-waardige functies $E = E(x,\, t)$, $D = D(x,\, t)$, $H(x,\, t)$, $B(x,\, t)$, $I(x,\, t)$ en een scalairwaardige functie $\rho(x,\, t)$, voldoende vaak differentieerbaar afhangend van de positie $x \in \mathbf{R}^3$ en tijdstip $t \in \mathbf{R}$, die voldoen aan de volgende relaties:

$$\operatorname{rot} H = I + \tfrac{\partial D}{\partial t}, \tag{6.6.1}$$

$$\operatorname{rot} E = -\tfrac{\partial B}{\partial t}, \tag{6.6.2}$$

$$\operatorname{div} D = \rho, \tag{6.6.3}$$

$$\operatorname{div} B = 0, \tag{6.6.4}$$

$$D = \varepsilon\, E, \tag{6.6.5}$$

$$B = \mu H. \tag{6.6.6}$$

Namen van de diverse grootheden:

E = *electrische veldsterkte*,

D = *electrische doorschuiving*,

H = *magnetische veldsterkte*,

B = *magnetische inductie*,

I = *electrische stroomdichtheid*,

$\rho =$ *ladingsdichtheid*,

$\varepsilon =$ *diëlectrische constante*,

$\mu =$ *magnetische permeabiliteit*.

De vergelijking (6.6.1) is de *wet van Ampère*, waarbij de tweede term in het rechterlid toegevoegd is door Maxwell in het geval van tijdsafhankelijke verschijnselen. (6.6.2) is de *wet van Faraday*. (6.6.3) is de *wet van Gauss*, die zegt dat de ladingsdichtheid optreedt als bron van electrische velden, terwijl (6.6.4) weergeeft dat er geen magnetische bronnen zijn.

De relaties (6.6.5), resp. (6.6.6) geven weer dat D, resp. B lineair afhangen van E, resp. H, op een manier die karakteristiek is voor het medium. In het vacuüm en in homogene isotrope media zijn ε en μ scalairen, maar er zijn ook media, waarvoor ε een symmetrische 3×3 matrix is met drie verschillende positieve eigenwaarden. Ook mogen de matrices ε en μ, die de informatie over de electromagnetische eigenschappen van het medium bevatten, in het algemeen nog van x en t afhangen.

De relatie van de operatoren div en rot met de uitwendige afgeleide, zie §5.8, maakt het voor de hand liggend om de Maxwell-vergelijkingen te herschrijven in termen van de 1-vormen E en H, de 2-vormen D, B en I en de 3-vorm ρ, gedefinieerd door

$$E = E_1\,\mathrm{d}x_1 + E_2\,\mathrm{d}x_2 + E_3\,\mathrm{d}x_3, \tag{6.6.7}$$

$$H = H_1\,\mathrm{d}x_1 + H_2\,\mathrm{d}x_2 + H_3\,\mathrm{d}x_3, \tag{6.6.8}$$

$$D = D_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + D_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + D_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2, \tag{6.6.9}$$

$$B = B_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + B_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + B_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2, \tag{6.6.10}$$

$$I = I_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + I_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + I_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2, \tag{6.6.11}$$

$$\rho = \rho\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3. \tag{6.6.12}$$

In termen hiervan worden de Maxwell-vergelijkingen:

$$\mathrm{d}H = I + \tfrac{\partial D}{\partial t}, \tag{6.6.13}$$

$$\mathrm{d}E = -\tfrac{\partial B}{\partial t}, \tag{6.6.14}$$

$$\mathrm{d}D = \rho, \tag{6.6.15}$$

$$\mathrm{d}B = 0, \tag{6.6.16}$$

$$D = \varepsilon\, E, \tag{6.6.17}$$

$$B = \mu H. \tag{6.6.18}$$

Hiermee zijn deze vergelijkingen meteen coördinaat-invariant, in de zin dat als we bij een transformatie van de positie-coördinaten E en H als 1-vormen, D, B en I als 2-vormen en ρ als 3-vorm transformeren, de Maxwell-vergelijkingen in de nieuwe coördinaten dezelfde gedaante hebben als in de oude. Zou men deze grootheden bijvoorbeeld transformeren als vectorvelden, dan worden de differentiaaloperatoren in de Maxwell-vergelijkingen in de nieuwe coördinaten in het algemeen een onherkenbaar geheel. Wèl kunnen ε en μ er in de nieuwe coördinaten ingewikkelder uit gaan zien.

De coördinaatinvariantie maakt dat we het Maxwell-stelsel ook kunnen lezen met de positieruimte $\mathbf{R}^3$ vervangen door een willekeurige 3-dimensionale variëteit X. Alleen moeten dan $\varepsilon_{(x,\,t)}$ en $\mu_{(x,\,t)}$ opgevat worden als lineaire afbeeldingen van $(\mathrm{T}_x\, X)^*$ naar $\bigwedge^2(\mathrm{T}_x\, X)^*$.

De symmetrie en positiviteit is daarbij coördinaat-onafhankelijk als volgt te definiëren. Zij R een n-dimensionale lineaire ruimte. Voor een lineaire afbeelding L van $\bigwedge^k R^*$ naar $\bigwedge^{n-k} R^*$ is

$$\tilde{L} : (\alpha,\, \beta) \mapsto (L\,\alpha) \wedge \beta$$

een bilineaire afbeelding van $\bigwedge^k R^* \times \bigwedge^k R^*$ naar de één-dimensionale lineaire ruimte $\bigwedge^n R^*$. Na keuze van een $\omega \in \bigwedge^n R^*$ met $\omega \neq 0$, kunnen we schrijven

$$(L\,\alpha) \wedge \beta = \lambda(\alpha,\, \beta)\,\omega,$$

voor een bilineaire vorm $\lambda = \lambda_\omega$ in $\bigwedge^k R^*$.

Men noemt nu L symmetrisch als $\tilde{L}$ symmetrisch is, hetgeen equivalent is met de eis dat λ symmetrisch is. Is dit het geval, dan kunnen we $\tilde{L}$ en daarmee L terugvinden uit de tweedegraads veelterm

$$l(\alpha) := \tfrac{1}{2}(L\,\alpha) \wedge \alpha,$$

via de formule

$$\tilde{L}(\alpha,\, \beta) = l(\alpha + \beta) - l(\alpha) - l(\beta).$$

Merk op dat l een veelterm in $\bigwedge^k R^*$ is, die zijn waarden in $\bigwedge^n R^*$ aanneemt.

We zouden L positief willen noemen, als λ een inprodukt is. Echter, $\lambda_{c\cdot\omega} = \frac{1}{c}\lambda_\omega$, dus we krijgen dat dit alleen behouden blijft als we de volumevormen in dezelfde oriëntatieklasse houden. Wat wèl onafhankelijk is van de keuze van ω, is de uitspraak dat L definiet is, in de zin dat $l(\alpha) \neq 0$ zodra $\alpha \neq 0$. Is dit het geval, dan vormen de $l(\alpha)$ met $\alpha \neq 0$ een oriëntatie van R en in dit geval noemt men L positief met betrekking tot deze oriëntatie. Men eist nu dat er een oriëntatie in X is (die dan meteen eenduidig is vastgelegd), waarvoor $\varepsilon_{(x,\,t)}$ en $\mu_{(x,\,t)}$ symmetrisch en positief zijn.

De *electromagnetische energiedichtheid* is gedefinieerd als de volume-vorm

$$w := \tfrac{1}{2}(\varepsilon\, E) \wedge E + \tfrac{1}{2}(\mu\, H) \wedge H;$$

het is denkbaar dat ε en μ door metingen van w bepaald kunnen worden. De symmetrie van ε en μ gebruikend, krijgen we volgende *wet van behoud van energie*

$$\tfrac{dw}{dt} + \mathrm{d}(E \wedge H) + I \wedge E = 0,$$

als ε en μ niet van t afhangen. De 2-vorm $E \wedge H$ die hierin optreedt heet *Poynting's energieflux.*

Behalve de coördinaat-invariantie zijn er nog meer argumenten om de Maxwell-vergelijkingen in termen van differentiaalvormen te schrijven. De stelling van Stokes zegt dat (6.6.13) en (6.6.14) equivalent zijn met

$$\int_{\partial K} H = \int_K (I + \tfrac{\partial D}{\partial t}), \tag{6.6.19}$$

$$\int_{\partial K} E = -\int_K \tfrac{\partial B}{\partial t}, \tag{6.6.20}$$

als K een compacte deelverzameling is met gladde rand ∂K in een glad twee-dimensionaal georiënteerd oppervlak in de drie-dimensionale positie-ruimte. Hierin zijn de samenhangscomponenten van ∂K georiëenteerde kringen, één-dimensionaal.

Analoog zijn (6.6.15) en (6.6.16) equivalent met

$$\int_{\partial K} D = \int_K \rho, \tag{6.6.21}$$

$$\int_{\partial K} B = 0, \tag{6.6.22}$$

waarin nu K een compacte drie-dimensionale deelverzameling met twee-dimensionale georiënteerde gladde rand in de positie-ruimte is. De integraalvorm van de Maxwell-vergelijkingen staat dichter bij de fysische experimenten dan de partiële differentiaalvergelijkingen.

Maxwell zelf benadrukte, dat er twee soorten vectoren zijn: de "forces", die over één-dimensionale objecten worden geïntegreerd, zoals E en H en de "fluxions", die over twee-dimensionale objecten worden geïntegreerd, zoals D, B en I.

De krachtvelden E en H zijn 1-vormen, net als de krachtvelden in §6.5. Dit wordt nog verder bevestigd door de *wet van Lorentz.* Deze geeft de kracht $k = \frac{dp}{dt}$, die een deeltje met lading e van het electromagnetische veld ondervindt, als:

$$k = e(E - B \cdot v). \tag{6.6.23}$$

Hierin is $v = \frac{dq}{dt}$ de snelheid van het deeltje en $B \cdot v$ is de het inproduct van de 2-vorm B met de vector v, dus een 1-vorm. p is de relativistische impuls.

In de gebruikelijke notatie wordt de term $B \cdot v$ als een uitwendig product geschreven. Verklaring: als ω de standaard 3-vorm in $\mathbf{R}^3$ voorstelt, dan is $B = \omega \cdot b$ voor de vector $b = (B_1, B_2, B_3) \in \mathbf{R}^3$, dus

$$(B \cdot v) \cdot w = \omega(b, v, w) = \langle b \times v, w \rangle$$

voor iedere $w \in \mathbf{R}^3$. Hierin is $b \times v$ het klassieke uitwendige product in $\mathbf{R}^3$.

Het is belangrijk om ook tijdsafhankelijke coördinatentransformaties in het electromagnetisme toe te laten, om te zien hoe de vergelijkingen er in "bewegende coördinaten" uit zien. Om deze overzichtelijk te houden, formuleren we de Maxwell-vergelijkingen in termen van grootheden, die in de positie-tijd-variëteit U coördinaatinvariant zijn gedefinieerd.

Om te beginnen beschouwen we de 2-vorm

$$\mathcal{B} := B + E \wedge \mathrm{d}t$$

in de vier-dimensionale (x, t)-ruimte. Merk op dat *iedere* 2-vorm in de (x, t)-ruimte zo geschreven kan worden, met eenduidig bepaalde B, resp. E als in (6.6.10), resp. (6.6.7) en met coëfficiënten die van (x, t) afhangen. We zien dat

$$\mathrm{d}B = \mathrm{d}_x B + \tfrac{\partial B}{\partial t} \wedge \mathrm{d}t,$$
$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}_x E - \tfrac{\partial E}{\partial t} \wedge \mathrm{d}t,$$

dus (6.6.14) en (6.6.16) *samen* zijn equivalent met:

$$\mathrm{d}\mathcal{B} = 0. \tag{6.6.24}$$

Hierdoor aangemoedigd, introduceren we vervolgens de 2-vorm

$$\mathcal{D} := D - H \wedge \mathrm{d}t$$

en de 3-vorm

$$\mathcal{R} := \rho - I \wedge \mathrm{d}t$$

in de 4-dimensionale $(x,\, t)$-ruimte. Hiermee worden (6.6.13) en (6.6.15) *samen* equivalent met

$$\mathrm{d}\mathcal{D} = \mathcal{R}. \tag{6.6.25}$$

Tenslotte voeren we in, voor iedere $u = (x,\, t)$, de lineaire afbeelding θ_u van $M_u := \bigwedge^2(\mathrm{T}_u\, U)^*$ naar zichzelf, gegeven door

$$\theta_u : B + E \wedge \mathrm{d}t \mapsto \varepsilon_u(E) - ({\mu_u}^{-1}(B)) \wedge \mathrm{d}t. \tag{6.6.26}$$

Met deze definities zijn de “materiaalvergelijkingen” (6.6.17) en (6.6.18) *samen* equivalent met

$$\mathcal{D} = \theta\, \mathcal{B}. \tag{6.6.27}$$

Beschouwen we θ en $\mathcal{R}$ als gegeven, dan kunnen we (6.6.27) opvatten als definitie van $\mathcal{D}$ en krijgen we voor de onbekende $\mathcal{B}$ het stelsel vergelijkingen (6.6.24), gecombineerd met

$$\mathrm{d}(\theta\, \mathcal{B}) = \mathcal{R}. \tag{6.6.28}$$

Hierin is de onbekende de 2-vorm $\mathcal{B}$ in de 4-dimensionale variëteit U; in lokale coördinaten gegeven door een $\mathbf{R}^6$-waardige functie van 4 variabelen, immers $\dim M_u = 6$.

Een poging tot vereenvoudiging is de opmerking dat (6.6.24) lokaal (en globaal in een samentrekbare ruimte U) equivalent is met de existentie van een 1-vorm $\mathcal{A}$ in U, waarvoor

$$\mathcal{B} = \mathrm{d}\mathcal{A}.$$

Zo’n $\mathcal{A}$ wordt een *vectorpotentiaal* voor $\mathcal{B}$ genoemd. De vergelijking (6.6.28) voor $\mathcal{B}$ is dan equivalent met het tweede orde stelsel

$$\mathrm{d}(\theta(\mathrm{d}\mathcal{A})) = \mathcal{R}. \tag{6.6.29}$$

Hierin is de onbekende $\mathcal{A}$ in lokale coördinaten een $\mathbf{R}^4$-waardige functie van 4 variabelen, evenals het rechterlid $\mathcal{R}$ in (6.6.29), dus het stelsel (6.6.29) bestaat uit 4 partiële differentiaalvergelijkingen voor 4 onbekenden. Opgemerkt dient echter te worden, dat de vectorpotentiaal $\mathcal{A}$ verre van eenduidig is bepaald, men kan er iedere gesloten 1-vorm, dus iedere $\mathrm{d}f$ voor een functie f, bij optellen, zonder dat dit tot een ander electromagnetisch veld leidt.

Een verdere analyse verdient de lineaire afbeelding $\theta_u : M_u \mapsto M_u$ uit (6.6.26), waarin de gegevens van het medium zijn gecombineerd. De bilineaire afbeelding

$$(\mathcal{B},\, \tilde{\mathcal{B}}) \mapsto (\theta_u\, \mathcal{B}) \wedge \tilde{\mathcal{B}},$$

van $M_u \times M_u$ naar de 1-dimensionale ruimte der 4-vormen, is symmetrisch, is niet-gedegenereerd en heeft index gelijk aan 3, de helft van $\dim M_u$. Deze eigenschappen heeft zij gemeen met de bilineaire vorm

$$(\mathcal{B},\, \tilde{\mathcal{B}}) \mapsto \mathcal{B} \wedge \tilde{\mathcal{B}}.$$

Toch zijn deze beide symmetrische bilineaire vormen verre van gelijk, de afbeelding θ_u heeft zelfs zuiver imaginaire eigenwaarden.

In dit verhaal is geen aandacht besteed aan de vergelijking

$$I = \sigma E, \tag{6.6.30}$$

die men dikwijls ook nog ziet toegevoegd aan het Maxwell-stelsel. Hierin is σ de *geleidingscoëfficiënt*, een voor het medium karakteristiek grootheid van dezelfde soort als ε en μ.

Zeer interessant is de ontdekking van Maxwell en Hertz, dat licht een electromagnetisch verschijnsel is. Voor de behandeling van díe verschijnselen uit de optica die als gevolg van de Maxwell-vergelijkingen kunnen worden opgevat, zie [2] of [10]. Daarin wordt ook aandacht besteed aan de geometrische optica als hoogfrequente limiet. Deze wordt beschreven door de Hamilton-Jacobi-theorie, als in Opmerking 6.2.1.

6.7 Opgaven

6.7.1 Zij β een constante pseudo-Riemann-structuur in $\mathbf{R}^n$. Bewijs dat Φ een C^2-afbeelding is van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}^n$ met $\Phi^*\beta = \beta$, dan en slechts dan als

$$\Phi : x \mapsto A(x) + a,$$

met $a \in \mathbf{R}^n$, $A \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ en

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_k^i \, \beta_{ij} \, A_l^j = \beta_{kl}$$

voor alle k, $l = 1, \ldots, n$.

6.7.2 Zij β een continu differentieerbare pseudo-Riemann-structuur in lokale coördinaten om het punt x. Bewijs dat de volgende uitspraken a)-d) equivalent zijn.

a) $\partial_k \beta_{ij}(x) = 0$ voor alle i, j, k.

b) $\Gamma^i_{jk}(x) = 0$ voor alle i, j, k.

c) $H_{(x,\, v)} = \mathbf{R}^n \times \{0\}$ voor iedere $v \in \mathbf{R}^n$.

d) $\gamma''(s) = 0$ voor iedere geodeet $\gamma(t)$ met $\gamma(s) = x$.

6.7.3 Zij X een n-dimensionale deelvariëteit van $\mathbf{R}^p$, voorzien van de Riemann-structuur vekregen door beperking van het standaard inprodukt tot de raakruimten $\mathrm{T}_x\, X \subset \mathbf{R}^p$. Zij $x \in X$. Kies een orthonormale basis van $\mathrm{T}_x\, X$, breid deze uit tot een orthonormale basis in $\mathbf{R}^p$ en ga over op de coördinaten in $\mathbf{R}^p$ ten aanzien van deze nieuwe basis. Bewijs dat hiervoor de projectie van X naar de eerste n coördinaten een lokale kaart κ om x als in Gevolg 6.1.6 definieert.

6.7.4 Zij X een deelvariëteit van $\mathbf{R}^p$, voorzien van de Riemann-structuur die is verkregen door beperking van het standaard inprodukt tot de raakruimten $\mathrm{T}_x\, X \subset \mathbf{R}^p$. Zij δ een differentieerbaar vectorveld in X, langs een kromme γ. Bewijs dat $\nabla\delta(t)$ gelijk is aan díe vector $\alpha(t) \in \mathrm{T}_{\gamma(t)}\, X$, waarvoor het verschil van $\delta'(t) \in \mathbf{R}^p$ en $\alpha(t)$ loodrecht staat op $\mathrm{T}_{\gamma(t)}\, X$. Bewijs dat een tweemaal differentieerbare kromme γ in X een geodeet is, dan en slechts dan als $\gamma''(t)$ loodrecht staat op $\mathrm{T}_{\gamma(t)}\, X$, voor iedere t. Laat zien dat als $X = S$ de $(p-1)$-dimensionale sfeer in $\mathbf{R}^p$ is, dan zijn de geodeten de grote cirkels in S, met constante snelheid doorlopen.

6.7.5 Zij f een C^2-functie in een open deelverzameling P van T^*X. Zij

$$t \mapsto p_s(t) = (x_s(t),\, \xi_s(t))$$

een oplossing van het Hamilton-stelsel van f, die continu differentieerbaar afhangt van de parameter s. Neem aan dat p_s periodiek is, met een minimale periode $T(s)$ die ook continu differentieerbaar afhangt van s. Bewijs dat het beeld een C^1-deelvariëteit $C(s)$ van P is, diffeomorf met een cirkel. Schrijf $E(s) = f(p_s(t))$. Bewijs dat

$$\tfrac{d}{ds}\int_{C(s)} \alpha = T(s)\,\tfrac{dE}{ds}(s).$$

Hierin is α de kanonieke 1-vorm in T^*X.

6.7.6 Zij f een C^1-functie in een open deelverzameling P van T^*X en zij α de kanonieke 1-vorm in T^*X. Definieer, voor iedere C^1-kromme γ in P:

$$\mathcal{F}(\gamma) := \int (\gamma^* f \cdot \mathrm{d}t - \gamma^*\alpha).$$

Onderzoek de stationaire krommen γ voor de functionaal $\mathcal{F}$.

6.7.7 Veronderstel dat μ een positieve scalar is en ε een diagonaalmatrix met positieve eigenwaarden. Bepaal de oplossingen van het Maxwell-stelsel, met $\rho = 0$, $I = 0$ en

$$\begin{aligned} E &= e^{i(\tau\, t + \langle x,\, \xi\rangle)}\,\hat{E}, \\ H &= e^{i(\tau\, t + \langle x,\, \xi\rangle)}\,\hat{H}, \end{aligned}$$

waarin $\hat{E}$ en $\hat{H}$ niet van x of t afhangen en $\tau \in \mathbf{R}$, $\xi \in \mathbf{R}^3$ constante frequentiefactoren zijn. Laat zien dat het Maxwell-stelsel trillingen met willekeurig grote frequentie toelaat.

6.7.8 Bewijs dat $\mathrm{d}\mathcal{R} = 0$, en dat dit equivalent is met de *wet van behoud van lading*

$$\tfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{d}_x I = 0. \tag{6.7.1}$$

Bibliografie

[1] R. Abraham, J.E. Marsden and T. Ratiu: Manifolds, Tensor Analysis, and Applications. Second Edition. Springer-Verlag, New York, etc.,

[2] M. Born and E. Wolf: Principles of Optics. Pergamon Press, London, etc., 1959.

[3] S.S. Cairns: Triangulated manifolds which are not Brouwer manifolds. Annals of math. **41** (1940) 792-795.

[4] É. Cartan: Les Systèmes Différentiels Extérieurs et leurs Applications Geométriques. Hermann, Paris, 1945.

[5] E.B. Christoffel: Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. J. Reine Angew. Math. **70** (1869) 46-70.

[6] J.J. Duistermaat: Oscillatory integrals, Lagrange immersions, and unfoldings of singularities. Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974) 207-281.

[7] Daniel S. Freed and Karen K. Uhlenbeck: Instantons and Four-Manifolds. Springer-Verlag, New York, etc., 1984.

[8] H. Grauert: On Levi's problem and the embedding of real-analytic manifolds. Amer. J. of Math. **68** (1958) 460-472.

[9] S. Helgason: Differential Geometry and Symmetric Spaces. Academic Press, New York, San Fransisco, London, 1962.

[10] M. Kline and I.W. Kay: Electromagnetic Theory and Geometrical Optics. Interscience Publishers, New York, etc., 1965.

[11] S. Kobayashi and K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry, I, II. Interscience Publishers, New York, London, 1963, 1969.

[12] J. Milnor: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Annals of Math. **64** (1956) 399-405.

[13] G. de Rham: Variétés Différentiables. Hermann, Paris, 1955.

[14] M. Spivak: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, I-V. Second Edition. Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979.

[15] H. Whitney: Differentiable manifolds. Annals of Math. **37** (1936) 645-680.

Index

W