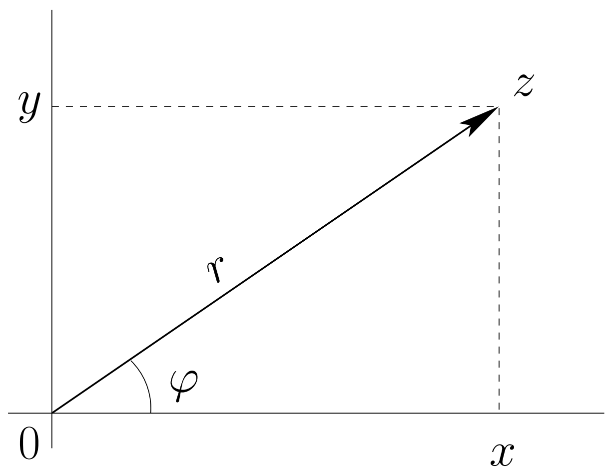
SAMENVATTING FOURIERTHEORIE DEEL I

Yuri A. Kuznetsov

1. COMPLEXE GETALLEN

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$$

met $i^2 = -1$ en Re $z := x$, Im $z := y$



$$r = |z| := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

Optellen: $z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Complex geconjugeerde: $\bar{z} := x - iy$

$$r^2 = |z|^2 = z\bar{z}$$

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2|$$

2. LIMIETEN

De rij van complexe getallen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is *begrensd* als

$$\exists M > 0 : \{\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M\}.$$

De rij van complexe getallen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *convergeert naar* a ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$) als

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0 \quad \text{ofwel}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \{\exists N \in \mathbb{N} : \{\forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon\}\}.$$

De rij van complexe getallen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is een *Cauchy-rij* als

$$\forall \varepsilon > 0 : \{\exists N \in \mathbb{N} : \{\forall m, n \geq N : |a_m - a_n| < \varepsilon\}\}.$$

Stelling: *Een rij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ van complexe getallen is convergent in $\mathbb{C}$ dan en slechts dan als $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij is.*

De rij van reële getallen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is *monotoon* als

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n \quad \text{of} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n.$$

Stelling: *Iedere monotone, begrensde rij van reële getallen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is convergent in $\mathbb{R}$.*

Stelling: *Als* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ *en* $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ *dan geldt*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$$

O-symbool: $f(a_n) = O(b_n)$ voor $n \to \infty$ als

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = L < \infty$$

De Standaardlimieten van rijen:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0$ als $s > 0$

(2) $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0$ als $|\lambda| < 1$

(3) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^s} = 0$ als $s > 0$

(5) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ als $x > 0$

(6) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(7) $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma = 0.5772156649\ldots$
(*de constante van Euler*)

Limieten van functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Men schrijft $\lim\limits_{z \to a} f(z) = w$ als

$\forall \varepsilon > 0 : \{\exists \delta > 0 : \{\forall z : |z - a| \leq \delta\} : |f(z) - w| < \varepsilon\}$

De functie f is *continu in* a als $w = f(a)$.

$$
\begin{aligned}
f(x^+) &:= \lim_{y \downarrow x} f(y) := \lim_{y \to x, y > x} f(y), \\
f(x^-) &:= \lim_{y \uparrow x} f(y) := \lim_{y \to x, y < x} f(y).
\end{aligned}
$$

O-symbool: $f(x) = O(g(x))$ voor $x \to a$ als

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = L < \infty$$

De Standaardlimieten van functies:

(1) $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad$ als $a > 0$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

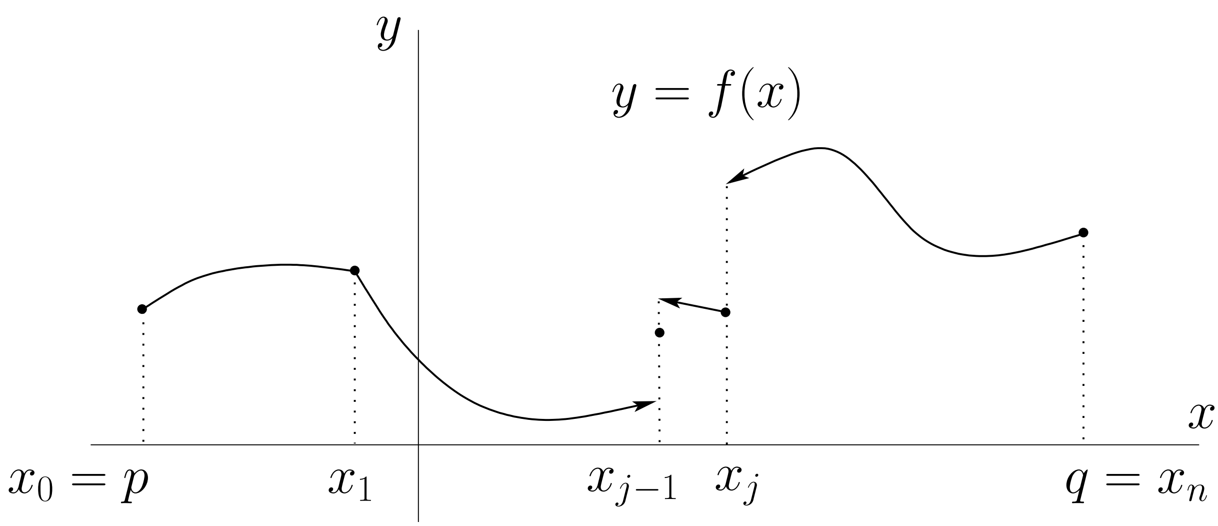
(4) $\lim\limits_{x \downarrow 0} x \ln x = 0$

De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heet *stuksgewijs continu (differentieerbaar)* als voor ieder interval $[p, q] \subset \mathbb{R}$ er eindig veel punten

$$p = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = q$$

zijn, zodat

- f continu (differentieerbaar) is op (x_{j-1}, x_j) voor $j = 1, 2, \ldots, n$;
- $f(x_0^+), f(x_n^-), f(x_j^\pm), j = 1, 2, \ldots, n-1$ (en $f'(x_0^+), f'(x_n^-), f'(x_j^\pm), j = 1, 2, \ldots, n-1$) bestaan.



Integraal:

$$\int_p^q f(x)\ dx := \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\ dx$$

3. REEKSEN

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} A_n \quad \text{waarin} \quad A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

en

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heet *convergent* als $\lim_{n\to\infty} A_n$ bestaat.

Stelling: *Als* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *convergeert dan* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is *absoluut convergent* als $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Stelling: *Iedere absoluut convergente reeks is convergent.*

Stelling: *Zij* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *een bijectieve afbeelding (herrangschikking). Als* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absoluut convergent is dan*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}.$$

Stelling: *Laat* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *en* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *convergente reeksen zijn en* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Dan convergeert* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \lambda b_n)$ *en geldt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \lambda b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} b_n \ .$$

De Standaardreeksen:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ als $|x| < 1$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (divergent)

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Kenmerken voor convergentie van reeksen:

1. Alternerende: *Zij* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *een monotone rij. Als* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *dan is de reeks* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *convergent.*

2. *De reeks* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *is absoluut convergent als*

- *of* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ (**Quotiëntcriterium**)
- *of* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ (**Wortelcriterium**)
- *of* $|a_n| \leq ct_n$ met $t_n \geq 0$ en $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n$ convergeert (**Majorantiecriterium**)
- *of* $a_n = O(t_n)$ voor $n \to \infty$ met $t_n > 0$ en $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n$ convergeert (**Limietcriterium**)

3. Integraal: *Als* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een monotoon dalende functie is waarvoor* $f(x) \geq 0$ *voor* $x \geq 0$ *en* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n f(x)dx < \infty$, *dan is de reeks* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$ *convergent.*

Kenmerken voor divergentie van reeksen:

1. *De reeks* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *is divergent als*

- *of* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$
- *of* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ (**Quotiëntcriterium**)
- *of* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ (**Wortelcriterium**)

2. *De reeks* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *is divergent als*

- *of* $|a_n| \geq ct_n$ met $c > 0, t_n \geq 0$ en $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$ divergeert
- *of* $a_n = O(t_n)$ voor $n \to \infty$ met $t_n > 0, L \neq 0$ en $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$ divergeert.

3. Integraal: *Als* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een functie is waarvoor* $f(x) \geq 0$ *voor* $x \geq 0$ *en* $\lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)dx$ *niet bestaat, dan is de reeks* $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ *ook divergent.*

4. FOURIERREEKSEN

Stelling: *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een 2π-periodieke stuksgewijs continue functie en*

$$\widehat{f}_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

1. *Als f stuksgewijs continu-differentieerbaar is dan*

$$\lim_{N \to \infty} \left[\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}_n e^{inx} \right] = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$$

2. *Als f continu en stuksgewijs continu-differentieerbaar is dan*

$$\lim_{N \to \infty} \left[\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}_n e^{inx} \right] = f(x)$$

3. *Als f continu en stuksgewijs continu-differentieerbaar is en $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{inx}$ convergeert (bijv. als f twee keer continu-differentieerbaar is), dan*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{inx} = f(x)$$

Stelling: *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een 2π-periodieke continue en stuksgewijs continu-differentieerbare functie. Dan*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

waarin

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt$$

en

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\ dt, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\ dt, \end{aligned}$$

voor $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *even* is dan $b_n = 0$ voor $n = 1, 2, \ldots$ en

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *oneven* is dan $a_n = 0$ voor $n = 1, 2, \ldots$ en

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Stelling: *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *een* T*-periodieke continue en stuksgewijs continu-differentieerbare functie. Dan*

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}_n e^{i\omega n x} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x), \end{aligned}$$

waarin

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

en

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega n t}dt,$$

voor $n \in \mathbb{Z}$ *of*

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ dt,$$

en

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega n t)\ dt, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega n t)\ dt, \end{aligned}$$

voor $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Fourierreeksen en lineaire differentiaalvergelijkingen (LDV)

$$\frac{d^n v}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dv}{dt} + a_0 v = u(t), a_j \in \mathbb{R}$$

Zijn $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een T-periodieke continue en stuksgewijs continu-differentieerbare functie met

$$\widehat{u}_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{als} \quad k \to \pm\infty$$

en

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Dan is een speciale oplossing van de LDV gegeven door

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{u}_k}{P(i\omega k)} e^{i\omega kt}$$

waarin

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

de *karakteristieke veelterm* van

$$\frac{d^n v}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dv}{dt} + a_0 v = 0$$

5. ONEIGENLIJKE INTEGRALEN

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue functie. De *oneigenlijke integraal* is

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{p \downarrow a} \int_p^c f(x)dx + \lim_{q \uparrow b} \int_c^q f(x)dx$$

(mogelijk $a = -\infty$ en/of $b = \infty$).

Stelling: $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Stelling: *Zij $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ een continue functie. Als $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ een continue functie is waarvoor*

- $g(x) \geq 0$,
- $|f(x)| \leq Cg(x)$ *voor alle $x \in [R,b)$ met een $R \in [a,b)$*
  ($f(x) = O(g(x))$ als $x \uparrow b$ is voldoende),
- $\int_a^b g(x)dx$ *convergeert,*

dan is $\int_a^b f(x)dx$ ook convergent.

Stelling:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\nu} = \begin{cases} \frac{1}{1-\nu} & \text{als} \quad 0 < \nu < 1 \\ \infty & \text{als} \quad \nu \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\nu} = \begin{cases} \frac{1}{\nu-1} & \text{als} \quad \nu > 1 \\ \infty & \text{als} \quad 0 < \nu \leq 1 \end{cases}$$

De Standaardintegralen:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\; dx = \pi$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\; dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

6. GAMMA-FUNCTIE

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

Stelling:

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= s\Gamma(s), \quad s > 0 \\ \Gamma(n+1) &= n!, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Stelling:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s-1} dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} \\ &= \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{s}{n}}}{1+\frac{s}{n}} \end{aligned}$$

Stelling:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

Speciale waarden:

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},\ \Gamma'(1) = -\gamma$$

7. FOURIERTRANSFORMATIE

$$(\mathcal{F}f)(s) := \widehat{f}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt$$

Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue functie zijn, waarvoor

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty \quad \text{(absoluut integreerbaar)}$$

1. $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is continu en $\lim\limits_{s \to \pm\infty} \widehat{f}(s) = 0$;

2. $\widehat{g}(s) = \sum\limits_{j=1}^{N} \lambda_j \widehat{f_j}(s)$ voor $g(t) = \sum\limits_{j=1}^{N} \lambda_j f_j(t)$;

3. $\widehat{g}(s) = i\widehat{f}\,'(s)$ als $g(t) = tf(t)$ absoluut integreerbaar is;

4. $\widehat{f'}(s) = is\widehat{f}(s)$ als f continu en stuksgewijs continu-differentieerbaar is en $\lim\limits_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$;

5. $\widehat{g}(s) = \widehat{f}(s - c)$ voor $g(t) = e^{ict}f(t)$;

6. $\widehat{g}(s) = e^{ics}\widehat{f}(s)$ voor $g(t) = f(t + c)$;

7. $\widehat{g}(s) = \dfrac{1}{|c|}\widehat{f}\left(\dfrac{s}{c}\right)$ voor $g(t) = f(ct)$ met $c \neq 0$;

8. $\widehat{g}(s) = \overline{\widehat{f}(-s)}$ voor $g(t) = \overline{f(t)}$.

Stelling:

1. *Als f stuksgewijs continu-differentieerbaar en absoluut integreerbaar is dan*

$$\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\widehat{f}(s)e^{ixs}ds\right]=\frac{1}{2}[f(x^{+})+f(x^{-})]$$

2. *Als f continu, stuksgewijs continu-differentieerbaar en absoluut integreerbaar is dan*

$$\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\widehat{f}(s)e^{ixs}ds\right]=f(x)$$

3. *Als f continu, stuksgewijs continu-differentieerbaar en absoluut integreerbaar is en*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{ixs}ds$$

bestaat (bv. als f tweemaal continu-differentieerbaar en f, f', f'' absoluut integreerbaar zijn), dan

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{ixs}ds=f(x)$$

ofwel

$$(\mathcal{F}\widehat{f})(x)=2\pi f(-x)\quad\text{en}\quad(\mathcal{F}^{-1}f)(s)=\frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-s)$$

Stelling: *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *een continue, stuksgewijs continu-differentieerbare en absoluut integreerbare functie. Dan*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [a(s)\cos(xs) + b(s)\sin(xs)]ds,$$

waarin

$$\begin{aligned} a(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(st)\ dt, \\ b(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(st)\ dt. \end{aligned}$$

Als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *even* is dan $b(s) = 0$ en

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty a(s)\cos(xs)ds$$

Als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *oneven* is dan $a(s) = 0$ en

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty a(s)\sin(xs)ds$$

Gelijkheid van Parseval:

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een 2π-periodieke stuksgewijs continu-differentieerbare functie. Dan geldt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_n|^2$$

waarin

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt$$

Gelijkheid van Plancherel:

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue functie, waarvoor

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt\right) < \infty.$$

Dan geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2 ds$$

waarin

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt$$

Fouriertransformatie en LDV

$$\frac{d^n v}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dv}{dt}+a_0 v=u(t), a_j\in\mathbb{R}$$

Zij

$$P(z):=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0$$

de *karakteristieke veelterm* van

$$\frac{d^n v}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dv}{dt}+a_0 v=0.$$

Stell dat $P(z)$ geen nulpunten op de imaginaire as heeft en dat $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ een continue, stuksgewijs continu-differentieerbare en absoluut integreerbare functie is met

$$\widehat{u}(s)=O\left(\frac{1}{s^2}\right)\quad \text{als}\quad s\to\pm\infty.$$

Dan is een speciale oplossing van de LDV gegeven door

$$v(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{u}(s)}{P(is)}e^{its}ds$$

8. DISCRETE FOURIERTRANSFORMATIE

$$\widehat{y}_k := \sum_{j=0}^{N-1} y_j \bar{\omega}^{jk}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

waarin $\omega = e^{\left(\frac{2\pi i}{N}\right)}$, $\omega^N = 1$.

$$\widehat{y} = Fy, \quad \widehat{y}, y \in \mathbb{C}^N, \ (F)_{kj} = \bar{\omega}^{kj}.$$

Stelling: $F^T = F$ en $F^{-1} = \dfrac{1}{N}\overline{F}$.

Discrete gelijkheid van Parseval:

$$\sum_{j=0}^{N-1} |y_j|^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |\widehat{y}_j|^2$$

FFT: Als $N = pq$, $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q > 1$ dan

$$\widehat{y}_k = \sum_{\beta=0}^{p-1} \widehat{y}_{\beta,k}\ \bar{\omega}^{\beta k}, k = 0, 1, \ldots, N-1$$

met

$$\widehat{y}_{\beta,k} = \sum_{\alpha=0}^{q-1} y_{\alpha p+\beta}\ \bar{\omega}^{\alpha p k}, k = 0, 1, \ldots, q-1.$$

Omdat $\widehat{y}_{\beta,k+q} = \widehat{y}_{\beta,k}$, moeten we slechts

$$O(N(p+q)) \qquad \text{(niet } \ O(N^2))$$

keer vermenigvuldigen om DFT te berekenen.