SAMENVATTING FOURIERTHEORIE II

Yuri A. Kuznetsov

1. HET CONVOLUTIEPRODUKT

Stelling: *Laat* $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *begrensde, stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functies zijn. Dan*

$$(f * g)(x) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)\,d\xi < \infty$$

en

1. $f * g = g * f$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$
3. $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
4. $f * 0 = 0$ *waarin* $0(x) \equiv 0$
5. $\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\,dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,d\xi\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)\,d\eta\right)$
6. $(\widehat{f * g}) = \widehat{f}\widehat{g}$ *en* $(\widehat{fg}) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f} * \widehat{g})$

Als bovendien f' *en* g' *stuksgewijs continu en absoluut integreerbaar zijn, dan*

$$(f * g)' = f' * g = f * g'$$

Voor $\lambda = \alpha + i\omega$ met $\alpha \neq 0$ definieer

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{ll} 0, & t < 0 \\ e^{\lambda t}, & t \geq 0 \end{array} \right\} & \text{als} \quad \alpha < 0, \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0, & t > 0 \\ -e^{\lambda t}, & t \leq 0 \end{array} \right\} & \text{als} \quad \alpha > 0. \end{cases}$$

Stelling: *Neem aan dat de veelterm*

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \prod_{j=1}^{r} (z - \lambda_j)^{m_j}$$

geen nulpunten heeft op de imaginaire as. Schrijf de breuksplitsing

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{m=1}^{m_j} \frac{c_{j,m}}{(z - \lambda_j)^m} \right).$$

Dan voor

$$g(t) = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{m=1}^{m_j} c_{j,m} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \right) f_{\lambda_j}(t)$$

geldt

$$\widehat{g}(s) = \frac{1}{P(is)}.$$

Het convolutieprodukt en LDV

De veelterm

$$P(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,\ \ a_j \in \mathbb{R},$$

heet de *karakteristieke veelterm* van de lineaire differentiaalvergelijking (LDV)

$$\frac{d^n v}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dv}{dt} + a_0 v = u(t).$$

Zijn Fouriergetransformeerde is

$$P(is)\widehat{v}(s) = \widehat{u}(s)$$

waaruit volgt dat

$$\widehat{v}(s) = \frac{1}{P(is)}\widehat{u}(s).$$

Stelling: *Veronderstel dat $P(z)$ geen nulpunten heeft op de imaginaire as. Als $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ begrensd, stuksgewijs continu en absoluut integreerbaar is, dan wordt een speciale oplossing van de LDV gegeven door*

$$v(t) = (g * u)(t).$$

2. DISTRIBUTIES

Zij V een lineaire ruimte van *testfuncties* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Een *distributie op* V is een lineaire continue afbeelding (*functionaal*)

$$\mathcal{D} : V \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \mathcal{D}(f)$$

d.w.z.

$$\mathcal{D}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{D}(f_1) + c_2 \mathcal{D}(f_2)$$

voor alle $c_{1,2} \in \mathbb{C}$ en $f_{1,2} \in V$, en $\mathcal{D}(f_n) \to \mathcal{D}(g)$ als $f_n \to g$ in V.

Voor de ruimte V, nemen we in het vervolg

$$\mathcal{C} \;:=\; \{f \in C^\infty : f(x) = 0 \;\text{ voor alle }\; |x| \geq r_f\}$$

of

$$\mathcal{S} \;:=\; \left\{ f \in C^\infty : \left| f^{(k)}(x) \right| = O\left(\frac{1}{|x|^j}\right) \text{ als } |x| \to \infty \;\forall k, j \in \mathbb{N} \right\}$$

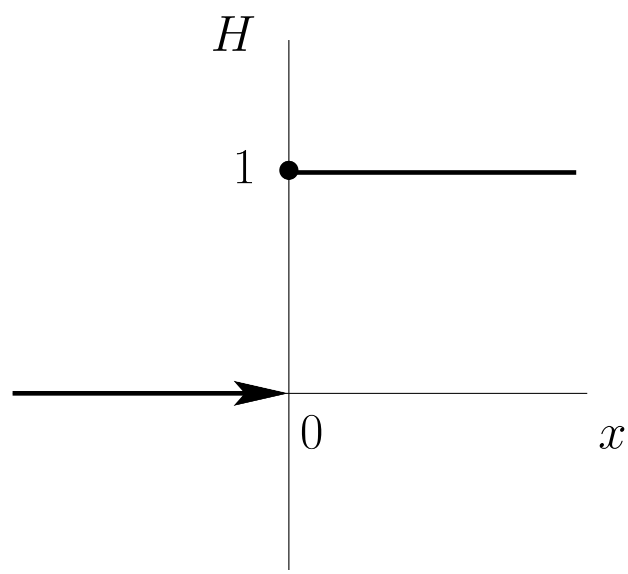
Lemma: *Als $f \in \mathcal{S}$ dan is $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ ook.*

Iedere stuksgewijs continue en begrensde functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definieert een *reguliere distributie* op $V = \mathcal{C}$ of $\mathcal{S}$ als volgt:

$$f \mapsto \mathcal{D}_\varphi(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\, dx$$

De Heaviside functie

$$H(x) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0, \\ 1 & \text{als } x \geq 0. \end{cases}$$



Bij de functie H hoort de reguliere *Heaviside distributie* op $V = \mathcal{C}$ of $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{D}_H(f) = \int_0^\infty f(x)\, dx$$

De Dirac delta-functie

De distributie $f \mapsto f(0)$ op $V = \mathcal{C}$ of $\mathcal{S}$ heet de *Dirac delta-distributie*.

Zij $\varphi_\varepsilon \in C^\infty$ voor $\varepsilon > 0$ en voldoet aan

- $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi_\varepsilon(x) = 0$ voor $x \neq 0$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1$ voor iedere $\varepsilon > 0$.

Dan voor iedere $f \in V$ geldt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\, dx = f(0).$$

In de Natuurkunde zegt men dan dat $\varphi_\varepsilon(x)$ convergeert naar de *"Dirac delta-functie"* $\delta(x)$ en schrijft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\, dx = f(0)$$

ofwel $\mathcal{D}_\delta(f) := f(0)$. De delta-functie voldoet dan aan het volgende

$$\delta(x) = 0 \text{ voor } x \neq 0 \text{ maar } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Afgeleiden van distributies

Zij $\mathcal{D} : V \to \mathbb{R}$ een distributie op $V = \mathcal{C}$ of $\mathcal{S}$. Dan heet de distributie $f \mapsto \mathcal{D}'(f) \ := \ -\mathcal{D}(f')$ de *afgeleide van* $\mathcal{D}$.

Er geldt $\mathcal{D}_H'(f) = f(0)$ en $\mathcal{D}_\delta'(f) = -f'(0)$.

Als φ een continu-differentieerbare functie met begrensde φ' is, dan geldt het volgende voor de reguliere distributie $\mathcal{D}_\varphi(f)$ op V:

$$\mathcal{D}_{\varphi'}(f) = \mathcal{D}_\varphi'(f).$$

Voor de Heaviside distributie schrijven we

$$\mathcal{D}_{H'}(f) \equiv \mathcal{D}_H'(f) = f(0) = \mathcal{D}_\delta(f)$$

zodat

$$H'(x) = \delta(x).$$

Voor de Dirac delta-distributie schrijven we

$$\mathcal{D}_{\delta'}(f) \equiv \mathcal{D}_\delta'(f) = -f'(0)$$

zodat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)\,dx = -f'(0).$$

Zij $\mathcal{D} : V \to \mathbb{R}$ een distributie op $V = \mathcal{C}$ of $\mathcal{S}$.

Het produkt met een functie: Zij $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een functie zodat $\eta f \in V$ voor alle $f \in V$. Dan is

$$\eta\mathcal{D}(f) \;:=\; \mathcal{D}(\eta f).$$

Voor een reguliere distributie $\mathcal{D}_\varphi$ geldt dan dat

$$\eta\mathcal{D}_\varphi(f) = \mathcal{D}_{\eta\varphi}(f).$$

Er geldt dus $x\mathcal{D}_\delta(f) = 0$ zodat $x\delta(x) = 0$.

Lineaire substituties: $y = ax - b,\ a \neq 0$.

$$\widetilde{\mathcal{D}}(f) \;:=\; \mathcal{D}(\underset{\sim}{f}) \text{ waarin } \underset{\sim}{f}(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y+b}{a}\right).$$

Voor een reguliere distributie $\mathcal{D}_\varphi$ geldt dan dat

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\varphi(f) = \mathcal{D}_{\tilde{\varphi}}(f) \quad \text{waarin } \tilde{\varphi}(x) = \varphi(ax - b).$$

Er geldt ook dat

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\delta(f) = \tilde{f}(0) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{b}{a}\right)$$

waaruit volgt

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \text{ en } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - b)\,dx = f(b)$$

Fouriertransformatie van distributies op $\mathcal{S}$

$$\widehat{\mathcal{D}}(f) \ := \ \mathcal{D}(\widehat{f}) \quad \text{voor iedere} \quad f \in \mathcal{S}$$

1. Voor en reguliere distributie $\mathcal{D}_\varphi$ op $\mathcal{S}$ met begrensde stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ geldt dat
$$\widehat{\mathcal{D}}_\varphi(f) = \mathcal{D}_{\widehat{\varphi}}(f).$$

2. Voor
$$\mathcal{D}_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$
geldt $\mathcal{D}_{\widehat{1}}(f) \equiv \widehat{\mathcal{D}}_1(f) = 2\pi f(0) = 2\pi \mathcal{D}_\delta(f)$ zodat
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} dx = 2\pi\delta(s)$$

3. Voor $\mathcal{D}_\delta(f) = f(0)$ geldt
$$\mathcal{D}_{\widehat{\delta}}(f) \equiv \widehat{\mathcal{D}}_\delta(f) = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \mathcal{D}_1(f)$$
zodat $\widehat{\delta}(s) = 1$.

4. Er geldt $(\widehat{\mathcal{D}})' = -is\mathcal{D}$ en $(\widehat{\mathcal{D}'}) = ix\widehat{\mathcal{D}}$

Distributies en LD vergelijkingen

$(Lv) := v^{(n)}+a_{n-1}v^{(n-1)}v+\cdots+a_1v'+a_0v = u(x)$

met een stuksgewijs continue functie u. Een functie $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heet een *gegeneraliseerde oplossing* van deze LDV als

$$(L\mathcal{D}_v)(f) = \mathcal{D}_u(f) \quad \text{voor alle } f \in \mathcal{C}.$$

Hierin

$(L\mathcal{D}_v)(f) := \mathcal{D}_v^{(n)}(f)+a_{n-1}\mathcal{D}_v^{(n-1)}(f)+\cdots+a_0\mathcal{D}_v(f).$

Een functie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan

$$(LG)(x) = \delta(x),$$

d.w.z. waarvoor geldt dat $(L\mathcal{D}_G)(f) = f(0)$ voor alle $f \in \mathcal{C}$, heet de *functie van Green* voor de differentiaaloperator L.

Lemma: *Stel dat $w \in C^n$ voldoet aan $Lw = 0$ en*

$w(0) = w'(0) = \cdots = w^{(n-2)} = 0,\ w^{(n-1)}(0) = 1.$

Dan wordt de functie van Green gegeven door

$$G(x) = H(x)w(x),$$

waarin H de Heaviside functie is.

Zij

$$(Lv) := v^{(n)} + a_{n-1}v^{(n-1)}v + \cdots + a_1 v' + a_0 v$$

met $a_j \in \mathbb{R}$. Laat G de functie van Green van L zijn.

Stelling: *Stel dat $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een stuksgewijs-continue en absoluut integreerbare functie is, en dat de karakteristieke veelterm van L, d.w.z.*

$$P(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

geen nulpunten heeft met Re$(z) > 0$. Dan is de functie van Geen $G(x) = H(x)w(x)$ begrensd en is

$$v(x) = (G * u)(x)$$

de gegeneraliseerde oplossing van $Lv = u$.

Als $P(z)$ geen nulpunten met Re$(z) \geq 0$ heeft, dan geldt

$$\widehat{G}(s) = \frac{1}{P(is)}\,.$$

3. PARTIËLE LDV

Eigenwaardeproblemen voor $\frac{d^2}{dx^2}$ op $[0, L]$

Stelling: *Het randwaardeprobleem*

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x), \quad \varphi(0) = \varphi(L) = 0$$

heeft een niet-triviale oplossing φ *dan en slechts dan als*

$$\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

De bijbehorende oplossing is

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

Stelling: *Het randwaardeprobleem*

$$\psi''(x) = \lambda\psi(x), \quad \psi'(0) = \psi'(L) = 0$$

heeft een niet-triviale oplossing ψ *dan en slechts dan als*

$$\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

De bijbehorende oplossing is

$$\psi_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

De warmtevergelijking op $[0, L]$: $u = u(x,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \in [0, L]. \end{cases}$$

De *scheiding van variabelen* $u(x,t) = X(x)T(t)$ geeft

$$\frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{const}$$

ofwel

$$\begin{cases} X''(x) &=& \lambda X(x), \quad X(0) = X(L) = 0, \\ \dot{T}(t) &=& \lambda a^2 T(t). \end{cases}$$

Stelling: *Als* $g \in C^2([0, L], \mathbb{R})$ *met*

$$g(0) = g(L) = 0$$

dan wordt de oplossing gegeven door

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t)$$

met

$$u_n(x,t) = e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

en

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx.$$

De golfvergelijking op $[0, L]$: $u = u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \in [0,L], \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f(x), & x \in [0,L]. \end{cases}$$

De substitutie $u(x,t) = X(x)T(t)$ geeft

$$\begin{cases} X''(x) &= \lambda X(x), \quad X(0) = X(L) = 0, \\ \ddot{T}(t) &= \lambda c^2 T(t). \end{cases}$$

Stelling: *Als* $g, f \in C^2([0,L],\mathbb{R})$ *met*

$$g(0) = g(L) = 0$$

dan wordt de oplossing gegeven door

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n u_n(x,t) + c_n v_n(x,t)]$$

met

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \cos\left(\frac{\pi c n t}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \\ v_n(x,t) &= \sin\left(\frac{\pi c n t}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx, \\ c_n &= \frac{2}{\pi c n}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx \end{aligned}$$

De warmtevergelijking op $\mathbb{R}$: $u = u(x,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = g(x)$$

De Fouriergetransformeerde van de oplossing

$$\widehat{u}(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} u(x,t)\, dx$$

voldoet aan het beginwaardeprobleem

$$\frac{\partial \widehat{u}(s,t)}{\partial t} = -a^2 s^2 \widehat{u}(s,t), \quad \widehat{u}(s,0) = \widehat{g}(s)$$

Dus geldt

$$\widehat{u}(s,t) = e^{-a^2 s^2 t} \; \widehat{g}(s) = \widehat{G}(s,t)\widehat{g}(s)$$

waarin

$$G(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \; e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

Stelling: *Als g, g' en g'' continu en absoluut integreerbaar zijn, dan geldt voor $t > 0$*

$$u(x,t) = (G(\cdot,t) * g)(x)$$

ofwel

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \; g(\xi)\, d\xi$$

(**de formule van Poisson**).

De golfvergelijking op $\mathbb{R}$: $u = u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(x,0) = g(x), \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f(x). \end{cases}$$

De Fouriergetransformeerde $\widehat{u}(s,t)$ van de oplossing voldoet aan het beginwaardeprobleem

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}(s,t)}{\partial t^2} = -c^2 s^2 \widehat{u}(s,t), \quad \begin{cases} \widehat{u}(s,0) = \widehat{g}(s), \\ \frac{\partial \widehat{u}(s,0)}{\partial t} = \widehat{f}(s). \end{cases}$$

Dus geldt

$$\begin{aligned} \widehat{u}(s,t) &= \frac{1}{2}\left[\widehat{g}(s)e^{i(ct)s} + \widehat{g}(s)e^{-i(ct)s}\right] \\ &+ \frac{1}{2c}\left[\widehat{F}(s)e^{i(ct)s} - \widehat{F}(s)e^{-i(ct)s}\right], \end{aligned}$$

waarin $f(x) = F'(x)$ en dus $\widehat{f}(s) = is\widehat{F}(s)$.

Stelling: *Als g, g', g'', f en f' continu en absoluut integreerbaar zijn, dan is*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+ct)+g(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} f(\xi)\, d\xi$$

(**de formule van d'Alembert**).

4. n-DIMENSIONALE FOURIERREEKSEN

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ een tweemaal continu differentieerbare functie van $x \in \mathbb{R}^n$.

$n = 1 : f(x+T) = f(x), \quad \omega := \dfrac{2\pi}{T}, \; T > 0.$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega kx} \text{ met } c_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\omega kx} f(x)\, dx$$

$n = 2 : f(x_1+T_1, x_2) = f(x_1, x_2+T_2) = f(x_1, x_2),$

$$\omega_1 := \frac{2\pi}{T_1}, \quad \omega_2 := \frac{2\pi}{T_2}, \quad T_{1,2} > 0.$$

$$f(x) = \sum_{\binom{k_1}{k_2} \in \mathbb{Z}^2} c_{k_1,k_2}\, e^{i(\xi(k_1,k_2)\cdot x)}$$

met

$$c_{k_1,k_2} = \frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} e^{-i(\xi(k_1,k_2)\cdot x)} f(x)\, dx$$

Hierin

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \; \xi(k_1,k_2) = \begin{pmatrix} \omega_1 k_1 \\ \omega_2 k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$dx = dx_1 dx_2 \quad \text{en} \quad (\xi \cdot x) := \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2.$$

$$n > 2: \quad \omega_j := \frac{2\pi}{T_j}, \quad T_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\begin{aligned} f(x_1 + T_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ f(x_1, x_2 + T_2, \ldots, x_n) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n + T_n) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Dan geldt

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \, e^{i(\xi(k) \cdot x)}$$

met

$$c_k = \frac{1}{T_1 \cdots T_n} \int_0^{T_1} \cdots \int_0^{T_n} e^{-i(\xi(k) \cdot x)} f(x) \, dx$$

Hierin $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$,

$$x \in \mathbb{R}^n, \;\; \xi(k) := \begin{pmatrix} \omega_1 k_1 \\ \omega_2 k_2 \\ \vdots \\ \omega_n k_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

en

$$(\xi \cdot x) := \; \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \quad \cdots \quad + \xi_n x_n.$$

5. n-DIM FOURIERTRANSFORMATIES

$n = 1$	$n \geq 1$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$
$(\mathcal{F}f)(\xi) \equiv \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx,$ $x, \xi \in \mathbb{R}$	$(\mathcal{F}f)(\xi) \equiv \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i(\xi \cdot x)}dx,$ $x, \xi \in \mathbb{R}^n,\ \xi \cdot x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j$ $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$
$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$	$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{i(x \cdot \xi)}d\xi$
$(\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}f)(-\xi)$	$(\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}(\mathcal{F}f)(-\xi)$
$\widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$	$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j\widehat{f}(\xi),\ j = 1, 2, \ldots, n$
$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x - \xi)\, d\xi$	$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)g(x - \xi)\, d\xi$
$(\widehat{f * g})(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ $\widehat{(fg)}(\xi) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)$	$(\widehat{f * g})(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ $\widehat{(fg)}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)$

6. MEERDIMENSIONALE DISTRIBUTIES

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ een *testfunctie* uit

$$\mathcal{C} := \{f \in C^\infty : f(x) = 0 \quad \text{voor} \quad \text{alle} \quad \|x\| \geq r_f\}$$

of

$$\mathcal{S} := \left\{ f \in C^\infty : \left| \frac{\partial f^{k_1+k_2+\cdots+k_n}(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} \right| = O\left(\frac{1}{\|x\|^j}\right) \text{ als } \|x\| \to \infty \ \forall k_i, j \in \mathbb{N} \right\}$$

Een lineaire continue afbeelding

$$\mathcal{D} : V \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \mathcal{D}(f)$$

heet een *distributie* als $V = \mathcal{C}$ of $\mathcal{S}$.

Iedere stuksgewijs continue en begrensde functie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definieert de *reguliere distributie*:

$$f \mapsto \mathcal{D}_\varphi(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx$$

De distributie $f \mapsto \mathcal{D}_\delta := f(0)$ heet de *Dirac delta-distributie*. Men schrijft

$$\mathcal{D}_\delta(f) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\delta(x)\, dx = f(0)$$

waarin $\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n)$ de *delta-functie* op $\mathbb{R}^n$:

$$\delta(x) = 0 \text{ voor } x \neq 0 \text{ maar } \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\, dx = 1.$$

Zij $\mathcal{D} : V \to \mathbb{R}$ een distributie op $V = \mathcal{C}$ of $\mathcal{S}$.

Het produkt met een functie: Zij $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ een functie zó dat $\eta f \in V$ voor alle $f \in V$. Dan is

$$\eta\mathcal{D}(f) \ := \ \mathcal{D}(\eta f).$$

Voor een reguliere distributie $\mathcal{D}_\varphi$ geldt dan dat

$$\eta\mathcal{D}_\varphi(f) = \mathcal{D}_{\eta\varphi}(f).$$

Lineaire substituties:

$y = Ax - b,\ x, y, b \in \mathbb{R}^n,\ \ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met $\det A \neq 0$.

$$\widetilde{\mathcal{D}}(f) \ := \ \mathcal{D}(\underset{\sim}{f}) \text{ waarin } \underset{\sim}{f}(y) = \frac{1}{|\det A|} f\left(A^{-1}(y+b)\right).$$

Voor een reguliere distributie $\mathcal{D}_\varphi$ geldt dan dat

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\varphi(f) = \mathcal{D}_{\tilde{\varphi}}(f) \quad \text{waarin } \tilde{\varphi}(x) = \varphi(Ax - b).$$

Er geldt ook dat

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\delta(f) = \tilde{f}(0) = \frac{1}{|\det A|} f(A^{-1}b)$$

waaruit volgt

$$\delta(Ax) = \frac{1}{|\det A|}\delta(x) \text{ en } \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\delta(x-b)\,dx = f(b)$$

Fouriertransformatie van meerdimensionale distributies

$$\widehat{\mathcal{D}}(f) \;:=\; \mathcal{D}(\widehat{f}) \quad \text{voor iedere} \quad f \in \mathcal{S}$$

1. Voor en reguliere distributie $\mathcal{D}_\varphi$ met absoluut integreerbare φ geldt dat $\widehat{\mathcal{D}}_\varphi(f) = \mathcal{D}_{\widehat{\varphi}}(f)$.

2. Voor

$$\mathcal{D}_1(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$

geldt $\mathcal{D}_{\widehat{1}}(f) \equiv \widehat{\mathcal{D}}_1(f) = (2\pi)^n f(0) = (2\pi)^n \mathcal{D}_\delta(f)$ zodat

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(s\cdot x)} dx = (2\pi)^n \delta(s)$$

3. Voor $\mathcal{D}_\delta(f) = f(0)$ geldt

$$\mathcal{D}_{\widehat{\delta}}(f) \equiv \widehat{\mathcal{D}}_\delta(f) = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \mathcal{D}_1(f)$$

zodat $\widehat{\delta}(s) = 1$.

4. Voor de *afgeleide distributie*

$$\mathcal{D}'_{x_j}(f) := -\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

geldt $(\widehat{\mathcal{D}'_{x_j}}) = i x_j \widehat{\mathcal{D}}$.

Meerdimensionale functies van Green

Zij $L : V \to V$ een differentiaaloperator met constante coëfficiënten. Een functie $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heet de *functie van Green van* L als

$$LG(x) = \delta(x)$$

d.w.z. $(L\mathcal{D}_G)(f) = f(0)$ voor alle $f \in V$.

Stelling: *De functies van Green van*

$$L = \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

met $n = 2$ *en* 3 *zijn gegeven door*

$$n = 2 : \qquad G(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\|x\|}\right),$$

$$n = 3 : \qquad G(x) = -\frac{1}{4\pi\|x\|}.$$

Zij G de functie van Geen van L en $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Als u en

$$v(x) = (G * u)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi)u(x-\xi)\, d\xi$$

de reguliere distributies definiëren, dan

$$(L\mathcal{D}_v)(f) = \mathcal{D}_u(f) \quad \text{voor alle} \quad f \in V,$$

ofwel v een gegeneraliseerde oplossing is van $Lv = u$.