

Deeltentamen I Fouriertheorie WISN201

5 november 2008, 15.00-18.00 uur

- Bij dit deeltentamen mogen GEEN dictaat, boek, aantekeningen en uitwerkingen gebruikt worden.
- Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en je studentnummer EN de naam van je werkcollegeleider (en/of groepsnummer).
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.

Opgave 1 [15pt] Bepaal of de volgende reeksen convergeren of divergeren:

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{x} - 1), \quad x > 1.$$

Opgave 2 [15pt] Bepaal of de volgende oneigenlijke integralen convergeren of divergeren:

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}; \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx.$$

Opgave 3 [40pt] De 2π -periodieke functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x) = \cos x + |\cos x|.$$

- (a) Schets de grafiek van f op $[-2\pi, 2\pi]$.
- (b) Bereken de Fouriercoëfficiënten \hat{f}_n van f . Let op: $\hat{f}_{\pm 1}$ moeten apart behandeld worden.
- (c) Laat zien dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \cos x + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 - 4k^2} \cos(2kx).$$

- (d) Bereken hiermee $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - \frac{1}{4}}$ en $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}}$.

Opgave 4 [15pt] Bereken de Fourier getransformeerde $\hat{f}(s)$ van de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \cos t.$$

Opgave 5 [15pt] Laat zien dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} = \frac{2 \sin x}{5 - 4 \cos x}.$$

Hint: Beschouw het imaginaire deel van $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2} \right)^n$.