Deeltentamen II Fouriertheorie WISN201
28 januari 2009, 15.00-18.00 uur

• Bij dit deeltentamen mogen GEEN dictaat, boek, aantekeningen en uitwerkingen gebruikt worden.
• Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en je studentnummer EN de naam van je werkcollegeleider (en/of groepsnummer).
• Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.

Opgave 1 [30pt] We zoeken een begrensde oplossing $v = v(t)$ van de *eerste-orde* differentiaalvergelijking

$$v' - v = u(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

met

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -2e^{-t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

1. Bereken de Fouriergetransformeerde $\widehat{u}(s)$ van $u(t)$.
2. Laat zien dat $\widehat{v}(s) = \dfrac{2}{s^2+1}$.
3. Vind $v(t)$ met behulp van breuksplitsing en controleer of deze functie aan (1) voldoet.

Opgave 2 [35pt] Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \quad \text{als } x \neq 0 \quad \text{en} \quad f(0) = 1. \tag{2}$$

1. Laat zien dat $f(x) = \widehat{g}^{\,2}(x) := (\widehat{g}(x))^2$, waarin $\widehat{g}(x)$ de Fouriergetransformeerde is van de functie
$$g(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } |s| \leq 1; \\ 0 & \text{als } |s| > 1. \end{cases}$$
2. Bereken het convolutieprodukt $(g * g)(x)$.
Hint: Gebruik dat g even is en beschouw de gevallen
$$x \leq -2, \quad -2 < x < 0, \quad x = 0, \quad 0 < x < 2, \quad \text{en} \quad x \geq 2$$
apart.
3. Pas de formule $(\widehat{g^{\,2}})(s) = 2\pi(g * g)(-s)$ toe om de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}(s)$ van (2) te vinden.

Z.O.Z.

Opgave 3 [35pt] Zij $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ een tweemaal continu differntieerbare functie met $f(0) = f(1) = 0$. We zoeken een reëelwardige functie $u(x,y)$ die voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{voor} \quad 0 < x < 1,\ y > 0, \tag{3}$$

en heeft de volgende eigenschappen:

(a) $u(0,y) = u(1,y) = 0$ voor alle $y \geq 0$;

(b) $\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$ voor alle $x \in [0,1]$;

(c) $u(x,0) = f(x)$ voor alle $x \in [0,1]$.

1. Gebruik de scheiding van variabelen om te bewijzen dat

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) e^{-n\pi y}$$

de algemene oplossing is van (3) die voldoet aan de condities (a) en (b).

2. Geef de formule voor b_n zodanig dat $u(x,y)$ aan conditie (c) voldoet.
Hint: Denk aan de Fourierreeks voor een oneven functie met periode 2 die gelijk is aan f op $[0,1]$.

3. Bepaal de functie $K(x,y,z)$ zó dat

$$u(x,y) = \int_0^1 K(x,y,z) f(z)\, dz \qquad \text{voor} \quad 0 < x < 1,\ y > 0.$$

Hint: Gebruik de formule (de meetkundige reeks)

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\pi(is-y)} = \frac{1}{1 - e^{\pi(is-y)}}\ , \qquad s \in \mathbb{R},$$

waarbij $y > 0$.

Bonus Opgave [20pt] Zij $a > 0$. Laat zien dat voor iedere continue functie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ geldt

$$\int_0^{\infty} \delta\left(a - \frac{1}{x}\right) f(x)\, dx = \frac{1}{a^2} f\left(\frac{1}{a}\right), \tag{4}$$

waarin δ de deltafunctie van Dirac is.