Hertentamen Fouriertheorie WISN201
18 maart 2009, 14.00-17.00 uur

• Bij dit hertentamen mogen GEEN dictaat, boek, aantekeningen en uitwerkingen gebruikt worden.
• Gebruik voor iedere opgave een APART vel.
• Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en je studentnummer.
• Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
• Er zullen twee cijfers worden gegeven: voor Deel I en voor Deel II. Het eindcijfer voor het vak Fouriertheorie 2008/09 wordt bepaald volgens de aangekondigde cijferregeling.

Deel I

Opgave 1 [30pt] Bepaal of de volgende reeks en integraal convergeren of divergeren:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right) \qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \frac{e^x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Opgave 2 [50pt] De 4π-periodieke oneven functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x) = x(2\pi - x)$$

voor $x \in [0, 2\pi]$.

(a) Bereken de Fouriercoëfficiënten $\widehat{f}_n = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t) e^{-\frac{int}{2}} dt$ van f.

(b) Laat zien dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt:

$$f(x) = \frac{32}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) .$$

(c) Bereken hiermee $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots .$

Opgave 3 [20pt] Bereken de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}(s)$ van de functie $f(x) = x^4 e^{-\frac{1}{2}x^2}$.
Hint: Voor $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ geldt $\widehat{g}(s) = \sqrt{2\pi}\, g(s)$.

Bonus Opgave [10pt] Bereken $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Z.O.Z.

Deel II

Opgave 1 [40pt] Bereken de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}(s)$ van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dt \, .$$

Hint: Schrijf f als een convolutieprodukt $f = g * h$.

Opgave 2 [60pt] We zoeken een reëelwardige functie $u(x,t)$ die voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{4} u \qquad \text{voor} \;\; 0 < x < \pi, \;\; t > 0 \tag{1}$$

en heeft de volgende eigenschappen:

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \;\; \text{voor alle} \;\; t \geq 0; \\ \text{(ii)} & u(x,0) = x(2\pi - x) \;\; \text{voor alle} \;\; x \in [0,\pi]. \end{array}$$

(a) Gebruik de scheiding van variabelen om te bewijzen dat

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \, e^{-\frac{1}{4}[(2k+1)^2 - 1]t} \sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) \tag{2}$$

de algemene oplossing is van (1) die aan randvoorwaarden (i) voldoet.

(b) Bereken b_k in (2) zodanig dat $u(x,t)$ aan beginvoorwaarde (ii) voldoet.

Hint: Denk aan de Fourierreeks voor een oneven functie $f(x)$ met periode 4π die gelijk is aan $x(2\pi - x)$ als $x \in [0, 2\pi]$.

(c) Bewijs dat

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \frac{32}{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

voor alle $x \in [0, \pi]$.

Bonus Opgave [10pt] Zij $a > 0$. Laat zien dat

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} \left[\delta(x+a) + \delta(x-a)\right]$$

waarin δ de Dirac-deltafunctie is.