Deeltentamen I Fouriertheorie NS-232B
10 november 2006, 15.00-18.00 uur

• Bij dit deeltentamen mogen GEEN dictaat, boek, aantekeningen, uitwerkingen en (grafische) rekenmachine gebruikt worden.
• Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en je studentnummer EN de naam van je werkcollegeleider (en/of groepsnummer).
• Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.

Opgave 1 [15pt] Bepaal of de volgende reeksen convergeren of divergeren:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Opgave 2 [15pt] Bepaal of de volgende oneigenlijke integralen convergeren of divergeren:

$$\text{(a)} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx \qquad \text{(b)} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{(e^x - e^{-x})} - \frac{1}{2} \right) dx$$

Opgave 3 [25pt] De 2π-periodieke functie f wordt gegeven door $f(x) = e^{-|x|}$ voor $|x| \leq \pi$.

(a) Bereken de Fouriercoëfficiënten $\widehat{f}_n$ van f.

(b) Laat zien dat $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{inx} = f(x)$ voor elke $x \in \mathbb{R}$.

(c) Bereken $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$. *Hint*: Beschouw $f(0) + e^{-\pi} f(\pi)$.

Opgave 4 [30pt] Beschouw de functie gegeven door $f(t) = \begin{cases} 1 + \cos\, t & \text{als } |t| \leq \pi, \\ 0 & \text{als } |t| > \pi. \end{cases}$

(a) Ga na dat functie f continu-differentieerbaar en absoluut integreerbaar is.

(b) Laat zien dat de Fourier getransformeerde $\widehat{f}$ van f is gegeven door $\widehat{f}(s) = \dfrac{2\sin(\pi s)}{s(1-s^2)}$ als $s \neq 0, \pm 1$ en $\widehat{f}(0) = 2\pi$, $\widehat{f}(\pm 1) = \pi$.

(c) Bewijs dat $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi s)\cos(\pi s/2)}{s(1-s^2)}\, ds = \pi$.
Hint: Gebruik de Fourier inversie formule voor functie f.

Opgave 5 [15pt] Bereken:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \qquad \text{(b)} \int_0^1 (\ln x)\, dx$$