Deeltentamen II Fouriertheorie WISN201
30 januari 2008, 15.00-18.00 uur

• Bij dit deeltentamen mogen GEEN dictaat, boek, aantekeningen, uitwerkingen en (grafische) rekenmachine gebruikt worden.
• Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en je studentnummer EN de naam van je werkcollegeleider (en/of groepsnummer).
• Gebruik voor iedere opgave een APART vel.
• Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.

Opgave 1 [50pt] Bewijs dat voor de oplossing $u = u(x,t)$ van het probleem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1, & x \in [0,1],\ t \geq 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{voor alle } \ t \geq 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{voor alle } \ x \in [0,1]. \end{cases} \tag{1}$$

geldt

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} \quad \text{voor alle } \ x \in [0,1]. \tag{2}$$

Aanwijzingen:

1. Bereken de oplossing van de differentiaalvergelijking $w''(x) = -1$ zó dat $w(0) = w(1) = 0$.

2. Bewijs dat $v(x,t) \equiv u(x,t) - w(x)$ voldoet aan de warmtevergelijking

$$v_t = v_{xx}, \qquad x \in [0,1],\ t \geq 0$$

en de rand- and beginvoorwaarden

$$\begin{cases} v(0,t) = v(1,t) = 0 & \text{voor alle } \ t \geq 0, \\ v(x,0) = -w(x) & \text{voor alle } \ x \in [0,1]. \end{cases}$$

3. Laat zien dat de Fourier ontwikkeling van w wordt gegeven door

$$w(x) = \sum_{\text{oneven } n \geq 1} \frac{4}{(\pi n)^3} \sin(\pi n x)$$

voor $x \in [0,1]$. *Hint*: Zet de functie w voort tot een oneven functie op het interval $[-1,1]$ en dan tot een oneven functie op $\mathbb{R}$ met periode 2.

4. Gebruik scheiding van variabelen om te bewijzen dat

$$v(x,t) = -\frac{4}{\pi^3} \sum_{\text{oneven } n \geq 1} \frac{e^{-\pi^2 n^2 t}}{n^3} \sin(\pi n x)$$

voor $x \in [0,1]$.

Z.O.Z.

5. Bewijs dat voor alle $x \in [0,1]$ en $t \geq 0$ geldt

$$|v(x,t)| < Ce^{-\pi^2 t}$$

met een constante $C > 0$ en concludeer daarmee dat $\lim_{t\to\infty} v(x,t) = 0$ voor alle $x \in [0,1]$. Hieruit volgt (2). *Hint*: Gebruik de absolute convergentie van de reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$.

Opgave 2 [50pt] Bereken de oplossing $v = v(t)$ van de differentiaalvergelijking

$$v''(t) + 4v(t) = u(t) \quad \text{waarin} \quad u(t) = \begin{cases} \pi^2 - t^2, & |t| < \pi, \\ 0, & |t| \geq \pi. \end{cases} \tag{3}$$

Aanwijzingen:

1. Laat zien dat
$$G(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \dfrac{1}{2}\sin 2t, & t \geq 0, \end{cases}$$
de functie van Green voor (3) is, d.w.z $G''(t) + 4G(t) = \delta(t)$ waarin $\delta(t)$ de Dirac delta-functie is.

2. Bereken het convolutieprodukt
$$(u * G)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)G(t-\tau)\,d\tau$$
Hint: Beschouw de gevallen $t < -\pi$, $|t| \leq \pi$ en $t > \pi$ apart en gebruik partiële integratie.

3. Ga na dat de functie
$$v(t) = (u * G)(t)$$
tweemaal continu differentieerbaar is en voldoet aan de differentiaalvergelijking (3).

Opgave 3 [Bonus 20pt] Laat zien dat voor de Dirac delta-functie $\delta(x)$ geldt

$$\delta(x^3 + x + 2) = \frac{1}{4}\delta(x+1).$$