Uitwerking van het deeltentamen I Fouriertheorie
10 november 2006

1. (a) De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent. Dus is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ook divergent volgens het majorantiecriterium omdat $\sqrt{n} \le n$ voor $n \ge 1$ en dus $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{n}$ voor $n \ge 1$.

   Alternatief: De oneigenlijke integraal $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ is divergent dus is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ook divergent wegens het integraalcriterium.

   (b) De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n}$ is convergent wegens het wortelcriterium omdat

$$\sqrt[n]{|a_n|} = |a_n|^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{-n+(-1)^n}{n}} = 2^{-1+\frac{(-1)^n}{n}} \to 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{als} \quad n \to \infty.$$

   (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ is convergent. Inderdaad,

$$(\ln n)^{\ln n} = \left(e^{\ln(\ln n)}\right)^{\ln n} = e^{(\ln n)\ln(\ln n)} = \left(e^{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)} = n^{\ln(\ln n)} \ge n^2 \quad \text{voor} \quad \ln(\ln n) \ge 2.$$

   Dus geldt $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \le \frac{1}{n^2}$ voor $n \ge N > e^{e^2}$. Omdat de reeks $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergeert, convergeert ook de reeks $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ wegens het majorantiecriterium. Dus is ook de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ convergent.

2. (a) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ is divergent omdat $\int_1^{R} \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left[(\ln x)^2\right]_1^R = \frac{1}{2}(\ln R)^2 \to \infty$ als $R \to \infty$.

   (b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right)dx$ is convergent. De functie $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right)$ is continu op $(0,\infty)$ omdat $e^x - e^{-x} = e^x(1 - e^{-2x}) \neq 0$ voor $x \in (0,\infty)$. Dan geldt

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} f(x)\,dx}_{I_2}.$$

   De functie f is continu op $(0,1]$. Omdat $e^{\pm x} = 1 \pm x + \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{6} + O(x^4)$ als $x \downarrow 0$, hebben we

$$\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{6}x^2 + O(x^3)} - 1\right) = -\frac{1}{12}x^2 + O(x^3)$$

   zodat $f(x) \to -\frac{1}{12}$ als $x \downarrow 0$. Dus bestaat $\lim_{x\downarrow 0} f(x)$ en convergeert I_1.
   Dan geldt

$$I_2 = \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(e^x - e^{-x})}}_{I_3} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}}_{I_4},$$

   waarin I_4 convergeert. Bovendien is $g(x) = e^x - e^{-x} > x$ voor alle $x > 0$ omdat $g(0) = 0$, $g'(0) = 2$ en $g'(x) > 1$ voor alle $x > 0$. Dus zeker $\frac{1}{x(e^x - e^{-x})} \le \frac{1}{x^2}$ voor $x \ge 1$. Uit de majorantiestelling voor oneigenlijke integralen volgt dan de convergentie van I_3.

3. (a) Enig rekenwerk:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{x}e^{-inx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-x}e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{(1-in)x}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-(1+in)x}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-in)x}}{1-in} - \frac{e^{-(1+in)x}}{1+in}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-e^{-\pi}e^{i\pi n}}{1-in} - \frac{e^{-\pi}e^{-i\pi n}-1}{1+in}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-e^{-\pi}(-1)^n}{1-in} - \frac{e^{-\pi}(-1)^n-1}{1+in}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-e^{-\pi}(-1)^n+in-ine^{-\pi}(-1)^n-e^{-\pi}(-1)^n+1+ine^{-\pi}(-1)^n-in}{(1-in)(1+in)}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\right)
\end{aligned}$$

(b) De functie $f(x)$ is continu voor alle $x \in \mathbb{R}$ omdat $f(-\pi) = f(\pi)$. Bovendien is f continu-differentieerbaar voor alle $x \neq 0, \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, omdat e^x continu-diferentieerbaar is. In punten $x = 0, \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, bestaan echter de linker en rechter afgeleiden van functie f zodat functie f continu en stuksgewijs continu-differentieerbaar is. Bovendien is de reeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{inx}$ absoluut convergent wegens een combinatie van het majorantiecriterium en het limietcriterium:

$$|\widehat{f}_n e^{inx}| = \frac{1}{\pi}\left|\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\right| \le \frac{1}{\pi}\,\frac{1+e^{-\pi}}{1+n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{als} \quad |n| \to \infty.$$

De Fourier inversie formule geeft dan

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{inx} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2} e^{inx}.$$

(c) Er geldt:

$$f(0) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}, \quad f(\pi) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}(-1)^n = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n - e^{-\pi}}{1+n^2},$$

zodat

$$f(0) + e^{-\pi}f(\pi) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-2\pi}}{1+n^2} = \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

en

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \pi\,\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}} = \pi\,\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}.$$

4. (a) Ten eerste is functie $f(t)$ continu en continu-diferentieerbaar voor alle $t \neq \pm\pi$, omdat functies $(1 + \cos t)$ en 0 continu en continu-differentieerbaar zijn. Verder, de linker en rechter limieten van functie $f(t)$ en zijn afgeleide $f'(t)$ komen overeen (allemaal gelijk aan nul) in punten $t = \pm\pi$ zo dat $f(t)$ overal continu-differentieerbaar blijkt te zijn.

Verder is f absoluut integreerbaar omdat deze continu en nul buiten interval $[-\pi, \pi]$ is. Ofwel per direkt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = \int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos t)\,dt = 2\pi < \infty.$$

(b) Enig rekenwerk:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt = \int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\, t)e^{-ist}dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)e^{-ist}dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-ist}+\frac{1}{2}e^{i(1-s)t}+\frac{1}{2}e^{-i(1+s)t}\right)dt = \left[\frac{e^{-ist}}{-is}+\frac{e^{i(1-s)t}}{2i(1-s)}+\frac{e^{-i(1+s)t}}{-2i(1+s)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \left[\frac{2e^{-ist}(1-s^2)-e^{i(1-s)t}s(1+s)+e^{-i(1+s)t}s(1-s)}{-2is(1-s^2)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{-2(e^{i\pi s}-e^{-i\pi s})}{-2is(1-s^2)} = \frac{2\sin(\pi s)}{s(1-s^2)}
\end{aligned}$$

als $s \neq 0, \pm 1$ en

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\, t)\,dt = 2\pi, \\
\widehat{f}(\pm 1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\mp it}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)e^{\mp it}\,dt = \frac{1}{2}2\pi = \pi.
\end{aligned}$$

(c) Volgens de stelling over de Fouriertransformatie is $\widehat{f}(s)$ overal continu. Bovendien is de oneigenlijk integraal $\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(s)|\,ds$ convergent omdat $\widehat{f}(s) = O\left(\frac{1}{s^3}\right)$ als $|s| \to \infty$.
Dus convergeert $\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{its}ds$ en volgens de Fourier inversie formule

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{its}\,ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi s)}{s(1-s^2)}\,e^{its}\,ds.$$

Voor $t = \frac{\pi}{2}$ geldt dan dat

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi s)}{s(1-s^2)}\,e^{i\pi s/2}\,ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi s)}{s(1-s^2)}(\cos(\pi s/2)+i\sin(\pi s/2))\,ds \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi s)\cos(\pi s/2)}{s(1-s^2)}\,ds.
\end{aligned}$$

ofwel

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi s)\cos(\pi s/2)}{1-s^2}ds = \pi.$$

5. (a) Merk op dat $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$. Dus

$$\begin{aligned}
2A_k &= 2\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) \\
&= 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}
\end{aligned}$$

en $\lim_{k\to\infty} 2A_k = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ofwel $\lim_{k\to\infty} A_k = \frac{3}{4}$, zodat

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}.$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 (\ln\, x) dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[x \ln(x) - x\right]_\varepsilon^1 = -1 - \underbrace{\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln\, \varepsilon}_{0} + \underbrace{\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon}_{0} = -1.$

Alternatief: Omdat $y = \ln(x)$ de inverse functie voor $x = e^y$ is, is de grafiek van $y = \ln(x)$ het spiegelbeeld van de grafiek van $y = e^x$ in de lijn $y = x$. Dus

$$\int_0^1 (\ln\, x) dx = \int_0^{-\infty} e^x dx = \lim_{R \to -\infty} \left[e^x\right]_0^R = -1.$$