Uitwerking Deeltentamen II Fouriertheorie NS-232B, 31-01-2007

Opgave 1 [50pt] Bereken een oplossing $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van de differentiaalvergelijking

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = e^{-2|x|}. \tag{1}$$

Methode I: Voor de finctie $u(x) = e^{-2|x|}$ wordt de Fouriergetransformeerde gegeven door

$$\widehat{u}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|}e^{-isx}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(2-is)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{(-2-is)x}dx = \frac{1}{2-is} + \frac{1}{2+is} = \frac{4}{4+s^2}.$$

De Fouriergetransformeerde van (1) is

$$((is)^2 + 4(is) + 3)\widehat{y}(s) = \frac{4}{4+s^2} \ ,$$

waaruit volgt dat

$$\widehat{y}(s) = \frac{4}{((is)^2 + 4(is) + 3)(4 - (is)^2)} = -\frac{4}{P(is)}$$

met

$$P(z) = (z^2 + 4z + 3)(z^2 - 4) = (z+3)(z+2)(z+1)(z-2).$$

Er geldt de volgende breuksplitsing:

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{-\frac{1}{10}}{z+3} + \frac{\frac{1}{4}}{z+2} + \frac{-\frac{1}{6}}{z+1} + \frac{\frac{1}{60}}{z-2}$$

Dit impliceert

$$\widehat{y}(s) = \frac{\frac{2}{5}}{is+3} + \frac{-1}{is+2} + \frac{\frac{2}{3}}{is+1} + \frac{-\frac{1}{15}}{is-2}.$$

Dus

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}e^{2x} & \text{voor} \quad x \leq 0, \\ \frac{2}{5}e^{-3x} - e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{-x} & \text{voor} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Methode II: De karakteristieke veelterm voor de homogene differentiaalvergelijking

$$(Lw)(x) \equiv w''(x) + 4w'(x) + 3w(x) = 0$$

is $p(z) = z^2 + 4z + 3 = (z+3)(z+1)$. Deze veelterm heeft twee nulpunten: $z_1 = -3$ en $z_2 = -1$ zodat de algemene oplossing van $Lw = 0$ wordt gegeven door

$$w(x) = Ae^{-3x} + Be^{-x}.$$

De oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarden $w(0) = 0$ en $w'(0) = 1$ is $w(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{-3x})$. Dit impliceert dat de functie van Green voor de differentiaaloperator L is

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad x \leq 0, \\ \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{-3x}) & \text{voor} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Dus is

$$y(x) = (G * u)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s)u(x-s)\, ds = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} (e^{-s} - e^{-3s})e^{-2|x-s|}\, ds$$

een oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking $Ly = u$ met $u(x) = e^{-2|x|}$.

Voor $x \le 0$ geldt $|x - s| = -(x - s)$ zodat

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{-s} - e^{-3s})e^{2(x-s)}\, ds \;=\; \frac{1}{2}e^{2x}\int_0^\infty (e^{-3s} - e^{-5s})\, ds \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \;=\; \frac{1}{15}e^{2x}. \end{aligned}$$

Voor $x \ge 0$ geldt dat

$$|x - s| = \begin{cases} (x-s) & \text{voor} \quad s \le x, \\ -(x-s) & \text{voor} \quad s \ge x, \end{cases}$$

zodat

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2}\int_0^x (e^{-s} - e^{-3s})e^{-2(x-s)}\, ds \;+\; \frac{1}{2}\int_x^\infty (e^{-s} - e^{-3s})e^{2(x-s)}\, ds \\ &= \frac{1}{2}e^{-2x}\int_0^x (e^{s} - e^{-s})\, ds \;+\; \frac{1}{2}e^{2x}\int_x^\infty (e^{-3s} - e^{-5s})\, ds \\ &= \frac{1}{2}e^{-2x}(e^{x} + e^{-x} - 2) \;+\; \frac{1}{2}e^{2x}\left(\frac{1}{3}e^{-3x} - \frac{1}{5}e^{-5x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-3x} - e^{-2x}\right) \;+\; \left(\frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{10}e^{-3x}\right) \\ &= \frac{2}{5}e^{-3x} - e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{-x} \end{aligned}$$

Dus geeft ook deze methode dezelfde oplossing van (1):

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}e^{2x} & \text{voor} \quad x \le 0, \\ \frac{2}{5}e^{-3x} - e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{-x} & \text{voor} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Opgave 2 [50pt] Vind een oplossing $u = u(r, \varphi)$ van de Laplace differentiaalvergelijking in de poolcoördinaten (r, φ)

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{2}$$

op de halve schijf met straal 2, die voldoet aan de randvoorwaarden:

$$\begin{cases} u(r,0) = u(r,\pi) = 0 & \text{voor} \quad 0 < r < 2, \\ u(0,\varphi) = 0 & \text{voor} \quad 0 < \varphi < \pi \end{cases} \tag{3}$$

en

$$u(2,\varphi) = \sin(3\varphi) \quad \text{voor} \quad 0 < \varphi < \pi. \tag{4}$$

We zoeken een niet-triviale oplossing

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \tag{5}$$

van de Laplace differentiaalvergelijking. Deze oplossing voldoet aan de randvoorwaarden (3) als

$$R(0) = 0 \quad \text{en} \quad \Phi(0) = \Phi(\pi) = 0.$$

De substitutie van (5) in (2) geeft

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) = 0$$

ofwel

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda = \text{const.}$$

Hiermee is het probleem teruggebracht tot twee differentiaalvergelijkingen van elk één variabele, die aan elkaar gekoppeld zijn door de constante λ.

De functie Φ is een oplossing van het randwaardeprobleem

$$\Phi''(\varphi) = -\lambda\Phi(\varphi), \qquad \Phi(0) = \Phi(\pi) = 0, \tag{6}$$

dat een voorbeeld is van het eigenwaardeprobleem

$$u''(x) = \mu\; u(x), \qquad u(0) = u(L) = 0.$$

Zoals bekend heeft dit probleem de niet-triviale oplossingen

$$u_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

alleen als

$$\mu = \mu_n = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$$

met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus heeft het probleem (6) de niet-triviale oplossingen $\Psi_n(\varphi) = \sin(n\varphi)$ alleen als $\lambda = \lambda_n = n^2 > 0$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Nu is de functie $R(r)$ een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$r^2R''(r) + rR'(r) = \lambda_n R(r)$$

die moet aan de voorwaarde $R(0) = 0$ voldoen. Volgens de aanwijzing wordt de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking gegeven door

$$R(r) = Ar^{\mu} + Br^{-\mu}$$

met $\mu^2 = \lambda_n = n^2$ ofwel

$$R(r) = Ar^{n} + Br^{-n}$$

met willekeurige $A, B \in \mathbb{R}$. Omdat $R(0) = 0$, moet $B = 0$.

We zien dat de functie

$$u_n(r,\varphi) = r^n \sin(n\varphi)$$

zowel aan de differentiaalvergelijking (2) als de randvoorwaarden (3) voldoet voor iedere $n = 1, 2, 3, \ldots$.

De lineaire combinatie van deze functies

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin(n\varphi)$$

definieert een oplossing van de Laplace differentiaalvergelijking, die voldoet aan (3). De laatste randvoorwaarde (4) is equivalent met

$$\sin(3\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n \sin(n\varphi)$$

waaruit blijkt dat

$$a_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

en alle $a_n = 0$ met $n \neq 3$.

Dus is het eindantwoord

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{8} r^3 \sin(3\varphi)\ .$$

Bonus Opgave [20pt] Laat zien dat $y(x) = \delta''(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$(x^2 - x)y'' + (6x-4)y' + 6y = 0. \tag{7}$$

Hierin is $\delta(x)$ de Dirac delta-functie.

Zij V een verzameling van functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zo dat iedere functie $f \in V$ willekeurig vaak differentieerbaar is op $\mathbb{R}$ en zo dat iedere functie $f \in V$ gelijk aan nul is buiten een gesloten interval.

Methode I: We moeten bewijzen dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[(x^2-x)\delta''''(x) + (6x-4)\delta'''(x) + 6\delta''(x)\right]\,dx = 0 \tag{8}$$

voor iedere testfunctie $f \in V$.

Voor iedere $g \in V$ geldt dat $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n g^{(n)}(0)$.

Dus

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x)(x^2-x)\right]\delta''''(x)\,dx \;=\; \left[f(x)(x^2-x)\right]''''\Big|_{x=0} \\
&= \left[12f''(x) + 4(2x-1)f'''(x) + (x^2-x)f''''(x)\right]\Big|_{x=0} \;=\; 12f''(0) - 4f'''(0), \\
I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x)(6x-4)\right]\delta'''(x)\,dx \;=\; -\left[f(x)(6x-4)\right]'''\Big|_{x=0} \\
&= \left[-18f''(x) - (6x-4)f'''(x)\right]\Big|_{x=0} \;=\; -18f''(0) + 4f'''(0), \\
I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} 6f(x)\delta''(x)\,dx \;=\; 6f''(0),
\end{aligned}$$

waaruit volgt (8) omdat $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

Methode II: Voor een klassieke oplossing $y = y(x)$ van (7) geldt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[(x^2-x)y''(x) + (6x-4)y'(x) + 6y(x)\right]\,dx = 0 \tag{9}$$

voor iedere $f \in V$. De partiële integratie levert

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)(x^2-x)]y''(x)\,dx &= -\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)(x^2-x)]'y'(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}[f(x)(x^2-x)]''y(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}[f''(x)(x^2-x) + 2f'(x)(2x-1) + 2f(x)]y(x)\,dx
\end{aligned}$$

en

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)(6x-4)]y'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)(6x-4)]'y(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty}[f'(x)(6x-4) + 6f(x)]y(x)\,dx\ .$$

Dus is de vergelijking (9) equivalent met

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[(x^2-x)f''(x) - (2x-2)f'(x) + 2f(x)\right]y(x)\,dx = 0$$

ofwel
$$\mathcal{D}_y\left[(x^2-x)f''-(2x-2)f'+2f\right]=0$$
voor iedere $f \in V$. Hierin is $\mathcal{D}_y(f)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)y(x)\,dx$ een reguliere dstributie.

Dit leidt tot de volgende generalisatie van de vergelijking (7): *We noemen een distributie* $\mathcal{D}: V \to \mathbb{R}$ *een oplossing van* (7) *als*
$$\mathcal{D}\left[(x^2-x)f''-(2x-2)f'+2f\right]=0 \tag{10}$$
voor iedere $f \in V$.

By de gegeneraliseerde functie $y(x)=\delta''(x)$ hoort de distributie
$$\mathcal{D}_{\delta''}(f)\equiv f''(0),$$
die voldoet aan (10). Inderdaad:
$$\left[(x^2-x)f''(x)-(2x-2)f'(x)+2f(x)\right]''=(x^2-x)f''''(x)+2xf'''(x)$$
en dus
$$\mathcal{D}_{\delta''}\left[(x^2-x)f''-(2x-2)f'+2f\right]=\left[(x^2-x)f''''(x)+2xf'''(x)\right]\Big|_{x=0}=0$$
voor iedere $f \in V$. Dit betekent dat de gegeneraliseerde functie $y(x)=\delta''(x)$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking (7).