**Fouriertheorie, uitwerking van de opgaven paragraaf 4.5: 1,2,3,4 (door Sander Zwegers), 6,7,9,10,12 (door Jan Stienstra), 8,13,14 (door Quintijn Puite ), 5,11 (door Yuri Kuznetsov).**

## Opgave 4.5.1

Er geldt voor $s \neq 0$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}v)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} v(t)\, dt = \int_{-1}^{0} -e^{-ist} dt + \int_{0}^{1} e^{-ist} dt \\ &= \frac{1}{is} e^{-ist} \Big|_{-1}^{0} + \frac{-1}{is} e^{-ist} \Big|_{0}^{1} = \frac{2}{is}(1 - \cos s). \end{aligned}$$

Voor $s = 0$ geldt $(\mathcal{F}v)(0) = 0$.

## Opgave 4.5.2

Er geldt voor $s \neq 0$:

$$\widehat{f}(s) = \int_a^b e^{-ist} dt = \frac{-1}{is} e^{-ist} \Big|_a^b = \frac{e^{-ias} - e^{-ibs}}{is}.$$

Voor $s = 0$ geldt $\widehat{f}(0) = b - a$.

## Opgave 4.5.3

Er geldt voor $s \neq 0$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(s) &= \int_{-1}^{0} (1+t) e^{-ist} dt + \int_{0}^{1} (1-t) e^{-ist} dt \\ &= \frac{1}{s^2} e^{-ist}(1 + is + ist) \Big|_{-1}^{0} + \frac{-1}{s^2} e^{-ist}(1 - is + ist) \Big|_{0}^{1} \\ &= \frac{2}{s^2}(1 - \cos s). \end{aligned}$$

Voor $s = 0$ geldt $\widehat{f}(0) = 1$.

## Opgave 4.5.4

Ga na dat $g$ weer een stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie is. Substitueren we $u = at$ in de integraal, dan zien we

$$\begin{aligned}\widehat{g}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(at)\,dt \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{su}{a}} f(u)\,du &= \frac{1}{a}\widehat{f}(\frac{s}{a}) \quad \text{als} \quad a > 0; \\ \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} e^{-i\frac{su}{a}} f(u)\,du &= -\frac{1}{a}\widehat{f}(\frac{s}{a}) \quad \text{als} \quad a < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

## Opgave 4.5.5

Ga na dat $g$ weer een stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie is.

$$\begin{aligned}\widehat{g}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}\overline{f(t)}\,dt \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t)\,dt} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(-s)t} f(t)\,dt} \\ &= \overline{\widehat{f}(-s)}\ .\end{aligned}$$

## Opgave 4.5.6

Omdat de functie $t^{-1}e^{-iat}$ continu is op de rechter halve reële as $(0,\infty)$ hoeven we voor de convergentie van de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_1^{\infty} t^{-1}e^{-iat}dt$ alleen maar te laten zien dat $\displaystyle\lim_{q\to\infty}\int_1^q t^{-1}e^{-iat}dt$ bestaat. Welnu

$$\int_1^q t^{-1}e^{-iat}dt = \frac{1}{-ia}(q^{-1}e^{-iaq} - e^{-ia}) + \frac{1}{-ia}\int_1^q t^{-2}e^{-iat}dt.$$

Merk nu op dat $\lim_{q\to\infty} q^{-1}e^{-iaq} = 0$ omdat $\lim_{q\to\infty} |q^{-1}e^{-iaq}| = \lim_{q\to\infty} q^{-1} = 0$. Verder weten we dat $|t^{-2}e^{-iat}| = t^{-2}$ en dat de oneigenlijke integraal $\int_1^{\infty} t^{-2}dt$

convergeert. Hieruit volgt dat $\int_1^\infty t^{-2}e^{-iat}dt$ (absoluut) convergeert, d.w.z. dat $\lim_{q\to\infty}\int_1^q t^{-2}e^{-iat}dt$ bestaat. We zien

$$\lim_{q\to\infty}\int_1^q t^{-1}e^{-iat}dt = \frac{e^{-ia}}{ia} - \frac{1}{ia}\int_1^\infty t^{-2}e^{-iat}dt.$$

## Opgave 4.5.7

(a) De functies $t$ en $\sin t$ zijn continu op $\mathbb{R}$. Dus is de functie $f(t) = t^{-1}\sin t$ continu op $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Om aan te tonen dat de functie $f$ met $f(0) = 1$ ook continu wordt in 0 hoeven we ons alleen maar te herinneren dat

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin t}{t} = 1.$$

(b) De integrand is een continue functie op $\mathbb{R}$. Daarom bestaat $\int_{-1}^1 e^{-ist}f(t)dt$ voor elke $s\in\mathbb{R}$. We moeten nu nog de twee oneigenlijke integralen $\int_{-\infty}^{-1} e^{-ist}f(t)dt$ en $\int_1^\infty e^{-ist}f(t)dt$ onderzoeken. Door op te merken dat

$$e^{-ist}\frac{\sin t}{t} = \frac{e^{-i(s-1)t} - e^{-i(s+1)t}}{2it}$$

kunnen we het probleem terugvoeren tot opgave 4.5.6 met $a = s-1$ resp. $a = s+1$. Volgens die opgave convergeren de genoemde oneigenlijke integralen mits $a \neq 0$ is, d.w.z. in het huidige geval mits $s \neq \pm 1$ is.

(c) Voor $s = 1$ is

$$e^{-it}\frac{\sin t}{t} = \frac{1 - e^{-i2t}}{2it}.$$

Volgens opgave 4.5.6 convergeert $\int_1^\infty \frac{e^{-i2t}}{2it}dt$ wel. Omdat echter $\int_1^\infty \frac{1}{2it}dt$ niet convergeert, convergeert $\int_1^\infty e^{-ist}f(t)dt$ ook niet. En daarom convergeert $\int_{-\infty}^\infty e^{-ist}f(t)dt$ voor $s = 1$ al evenmin.

Op dezelfde manier ziet men dat $\int_{-\infty}^\infty e^{-ist}f(t)dt$ voor $s = -1$ niet convergeert.

(d) Wanneer $f$ absoluut integreerbaar zou zijn, zou ook voor elke $s\in\mathbb{R}$ de functie $e^{-ist}f(t)$ (absoluut) integreerbaar zijn. Dit is echter in tegenspraak met het vorige onderdeel van deze opgave. Dus is $f$ niet absoluut integreerbaar.

## Opgave 4.5.8

(a) Zij $a > 0$ een vaste parameter (I.h.b. is $a$ dus reëel; '$>$' heeft geen betekenis voor complexe getallen).
$f$ is duidelijk stuksgewijs continu, en ook absoluut integreerbaar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = \int_0^{\infty} e^{-at}\,dt = \frac{1}{-a}e^{-at}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{a}.$$

Dus $\widehat{f}$ is gedefinieerd, en

$$\begin{aligned}\widehat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-ist}e^{-at}\,dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+is)t}\,dt = \frac{1}{-(a+is)}e^{-ist}e^{-at}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{a+is}\end{aligned}$$

(b) $f$ is zelfs stuksgewijs continu differentieerbaar, dus geeft de inversieformule voor $c \neq 0$ (waarbij we gebruiken dat $f$ continu is in $c \neq 0$)

$$\begin{aligned}f(c) &= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\widehat{f}(s)e^{ics}\,ds\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{0}\widehat{f}(s)e^{ics}\,ds + \int_0^R \widehat{f}(s)e^{ics}\,ds\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\left[\int_0^R \widehat{f}(-s)e^{-ics}\,ds + \int_0^R \widehat{f}(s)e^{ics}\,ds\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-ics}}{a-is} + \frac{e^{ics}}{a+is}\right)ds\end{aligned}$$

(I.h.b. bestaat de rechterlimiet dus, omdat de linkerlimiet bestaat.) Dit betekent dat voor $c > 0$

$$\begin{aligned}e^{-ac} &= e^{-ac} + 0 = f(c) + f(-c) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-ics}+e^{ics}}{a-is} + \frac{e^{ics}+e^{-ics}}{a+is}\right)ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{2\cos cs}{a-is} + \frac{2\cos cs}{a+is}\right)ds \\ &= \int_0^{\infty}\frac{\cos cs}{\pi}\cdot\frac{(a+is)+(a-is)}{(a-is)(a+is)}\,ds \\ &= \frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos cs}{a^2+s^2}\,ds\end{aligned}$$

waaruit de eerste gevraagde gelijkheid direct volgt. Bovendien

$$\begin{aligned}
e^{-ac} &= e^{-ac} - 0 = f(c) - f(-c) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-ics}-e^{ics}}{a-is} + \frac{e^{ics}-e^{-ics}}{a+is}\right) ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{-2i\sin cs}{a-is} + \frac{2i\sin cs}{a+is}\right) ds \\
&= \int_0^\infty \frac{i\sin cs}{\pi}\cdot\frac{-(a+is)+(a-is)}{(a-is)(a+is)}\, ds \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{s\sin cs}{a^2+s^2}\, ds
\end{aligned}$$

waaruit de tweede gevraagde gelijkheid direct volgt.

## Opgave 4.5.9

(a) De gegeven functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = te^{-t} \quad \text{als} \quad t \geq 0\,, \qquad \varphi(t) = 0 \quad \text{als} \quad t < 0$$

is gelijk aan $tf(t)$ waarbij $f(t)$ de functie uit opgave 8 is, met $a = 1$. Daarom is

$$\widehat{\varphi}(s) = i\widehat{f}'(s) = i\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1+is}\right) = \frac{1}{(1+is)^2}$$

(b) $\varphi$ is continu en stuksgewijs continu differentieerbaar, dus geeft de inversieformule

$$\begin{aligned}
\varphi(c) &= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\widehat{\varphi}(s)e^{ics}\, ds\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{0}\widehat{\varphi}(s)e^{ics}\, ds + \int_0^R \widehat{\varphi}(s)e^{ics}\, ds\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\left[\int_0^R \widehat{\varphi}(-s)e^{-ics}\, ds + \int_0^R \widehat{\varphi}(s)e^{ics}\, ds\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-ics}}{(1-is)^2} + \frac{e^{ics}}{(1+is)^2}\right) ds
\end{aligned}$$

Dus is

$$\begin{aligned}
\varphi(1)+\varphi(-1) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-is}+e^{is}}{(1-is)^2}+\frac{e^{is}+e^{-is}}{(1+is)^2}\right) ds \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1+2is-s^2+1-2is-s^2}{(1+s^2)^2}\cos s\, ds \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2}\cos s\, ds
\end{aligned}$$

Anderzijds is $\varphi(1)+\varphi(-1)=e^{-1}+0$, zodat we uiteindelijk zien

$$\int_0^\infty \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2}\cos s\, ds = \frac{\pi}{2e}$$

## Opgave 4.5.10

(a) We gebruiken formule (89) en het resultaat van opgave 8(a). Dat levert voor de functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeven door $f(x)=x^n e^{-x}$ voor $x\geq 0$ en $f(x)=0$ voor $x<0$:

$$\widehat{f}(s) = i^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{1+is}\right) = \frac{n!}{(1+is)^{n+1}}$$

(N.B. houd de $i$-en en $-$-tekens in de gaten!!)

(b) Omdat de oneigenlijke integralen $\int_0^\infty t^n e^{-t}dt$ en $\int_0^\infty t^{2n}e^{-2t}dt$ convergeren, kunnen we Parseval toepassen. Die zegt

$$\int_0^\infty t^{2n}e^{-2t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{n!^2}{(1+s^2)^{n+1}}ds$$

(we hebben hier gebruikt $|1+is|^2 = 1+s^2$). Anderzijds herkennen we aan de linkerkant iets van een $\Gamma$-functie; om precies te zijn als we $2t=u$ substitueren vinden we

$$\int_0^\infty t^{2n}e^{-2t}dt = \frac{1}{2^{2n+1}}\int_0^\infty u^{2n}e^{-u}du = \frac{1}{2^{2n+1}}\Gamma(2n+1) = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}}$$

Het uiteindelijke resultaat van deze opgave is:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+s^2)^{n+1}}ds = \frac{\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

**Opmerking:** Voor $n = 0$ is dit een eenvoudig eerstejaarsintegraaltje:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s^2} ds &= \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{1}{1+s^2} ds \\
&= \lim_{b\to\infty} \arctan b - \lim_{a\to-\infty} \arctan a \\
&= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi
\end{aligned}$$

## Opgave 4.5.11

De oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int_1^{\infty} x^{-1} dx$ is divergent, terwijl de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_1^{\infty} x^{-2} dx$ convergeert.

## Opgave 4.5.12

*correctie:* het gegeven functievoorschrift geeft tegenstrijdige resultaten voor $2 - \frac{1}{8} < x < 2$. Het probleem kan worden verholpen door het voorschrift te veranderen in

$$g(x) = \begin{cases} n & \text{als er een geheel getal } n > 1 \text{ is zodat } |x-n| < n^{-3}; \\ 0 & \text{als voor elk geheel getal } n > 1 \text{ geldt } |x-n| \geq n^{-3}. \end{cases}$$

(a) Ga zelf na.

(b) Functie $g$ vertoont discontinuïteiten (sprongen) in de punten $n \pm \frac{1}{n^3}$ met $n = 2, 3, 4, \ldots$. Tussen zulke discontinuïteitspunten is $g$ constant, dus continu. De limieten waarbij $x$ van links of van rechts naar een discontinuïteitspunt loopt, bestaan ook, omdat $g$ links en rechts van een discontinuïteitspunt constant is. Bovendien liggen in ieder gesloten interval in $\mathbb{R}$ maar einding veel discontinuïteitspunten.

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx = \sum_{n\geq 2} \int_{n-\frac{1}{n^3}}^{n+\frac{1}{n^3}} n\, dx = \sum_{n\geq 2} \frac{2n}{n^3} = 2 \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$$

Van deze laatste reeks is bekend dat hij convergeert, en wel met som $\frac{\pi^2}{3} - 2$.

(d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = \sum_{n\geq 2} \int_{n-\frac{1}{n^3}}^{n+\frac{1}{n^3}} n^2\, dx = \sum_{n\geq 2} \frac{2n^2}{n^3} = 2\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$$

Van deze laatste reeks is bekend dat hij divergeert.

## Opgave 4.5.13

(a) $v$ is duidelijk stuksgewijs continu, en ook absoluut integreerbaar (want $\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|\, dt = \int_{-1}^{0}\, dt + \int_{0}^{1}\, dt = 2$).

Dus $\widehat{v}$ is gedefinieerd, en voor $s \neq 0$ geldt

$$\begin{aligned} \widehat{v}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} v(t)\, dt = \int_{-1}^{0} -e^{-ist}\, dt + \int_{0}^{1} e^{-ist}\, dt \\ &= \frac{-1}{-is} e^{-ist}\Big|_{t=-1}^{0} + \frac{1}{-is} e^{-ist}\Big|_{t=0}^{1} \\ &= \frac{1}{is} - \frac{1}{is}e^{is} + \frac{1}{-is}e^{-is} - \frac{1}{-is} = \frac{1}{is}\left(2 - e^{is} - e^{-is}\right) \\ &= \frac{2 - 2\cos s}{is} \end{aligned}$$

terwijl voor $s = 0$ geldt $\widehat{v}(s) = 0$.

Merk op: $\widehat{v}$ is continu. Dit moet ook wel op grond van Stelling 4.4

(b) We moeten dus laten zien dat $v$ stuksgewijs continu differentieerbaar is op elk gesloten interval $[p, q]$. Het is voldoende om dit te laten zien voor elk interval $[p, q]$ met $p < -1$ en $q > 1$. (Elk willekeurig gesloten interval is immers bevat in zo'n gesloten interval $[p, q]$ met $p < -1$ en $q > 1$.)

Zij $p < -1$ en $q > 1$ gegeven. We gaan nu kijken of aan Definitie 4.2 wordt voldaan. Hiertoe bekijken we de restrictie van $v$ tot de open intervallen $(p, -1)$ en $(-1, 0)$ en $(0, 1)$ en $(1, q)$. Allereerst is op elk van deze open intervallen $v$ een differentieerbare functie, met afgeleide 0.

Verder gelden de volgende limieten:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow p} v(t) = \lim_{t\uparrow -1} v(t) = \lim_{t\downarrow 1} v(t) = \lim_{t\uparrow q} v(t) &= 0 \\
\lim_{t\downarrow -1} v(t) = \lim_{t\uparrow 0} v(t) &= -1 \\
\lim_{t\downarrow 0} v(t) = \lim_{t\uparrow 1} v(t) &= 1 \\
\lim_{t\downarrow p} v'(t) = \lim_{t\uparrow -1} v'(t) = \lim_{t\downarrow -1} v'(t) = \lim_{t\uparrow 0} v'(t) &= 0 \\
\lim_{t\downarrow 0} v'(t) = \lim_{t\uparrow 1} v'(t) = \lim_{t\downarrow 1} v'(t) = \lim_{t\uparrow q} v'(t) &= 0
\end{aligned}$$

We concluderen dat $v$ stuksgewijs continu differentieerbaar is op $[p, q]$, wat te bewijzen was.

(c) Dit is duidelijk voor $c \neq -1, 0, 1$ (want daar is $v$ continu), en ook voor $c = -1, 0, 1$ (wegens de bovenstaande limieten, vergeleken met het functievoorschrift).

(d) Het rechterlid van de Fourier inversieformule is voor $c = 0$ gelijk aan $\lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \widehat{v}(s)\, ds\right]$. Nu geldt er (voor $s \neq 0$) dat

$$\widehat{v}(-s) = \frac{2 - 2\cos(-s)}{-is} = -\frac{2 - 2\cos s}{is} = -\widehat{v}(s)$$

en $\widehat{v}(0) = 0$, dus $\widehat{v}$ is een oneven functie. Derhalve* is de symmetrische integraal 0 (voor elke $R$). [Inderdaad, $\int_{-R}^{R} \widehat{v}(s)\, ds = \int_{-R}^{0} \widehat{v}(s)\, ds + \int_0^R \widehat{v}(s)\, ds = \int_0^R \widehat{v}(-s)\, ds + \int_0^R \widehat{v}(s)\, ds = \int_0^R \Big(\widehat{v}(-s) + \widehat{v}(s)\Big)\, ds = 0.$]

Dus de limiet in het rechterlid van de Fourier inversieformule is 0.

Het linkerlid van de Fourier inversieformule is $v(0) = 0$. Linker- en rechterlid zijn dus inderdaad gelijk.

(e) Merk op dat voor $R > \pi$

$$\int_\pi^R \widehat{v}(s)\, ds = \frac{2}{i} \int_\pi^R \left(\frac{1}{s} - \frac{\cos s}{s}\right) ds = \frac{2}{i} \int_\pi^R \frac{ds}{s} - \frac{2}{i} \int_\pi^R \frac{\cos s}{s}\, ds\ . \quad (*)$$

We laten eerst zien dat $\int_\pi^\infty \frac{\cos s}{s}\, ds$ convergeert. Dit volgt op de gebruikelijke (zie het 2e deel van voorbeeld 9, blz. 91) manier uit

$$\int_\pi^R \frac{\cos s}{s}\, ds = \frac{\sin s}{s}\Big|_{s=\pi}^R - \int_\pi^R \frac{-\sin s}{s^2}\, ds = \frac{\sin R}{R} + \int_\pi^R \frac{\sin s}{s^2}\, ds$$

Zou nu $\int_0^\infty \widehat{v}(s)\,ds$ convergeren, dan ook $\int_\pi^\infty \widehat{v}(s)\,ds$, en wegens $(*)$ en convergentie van $\int_\pi^\infty \frac{\cos s}{s}\,ds$ zou dan ook $\int_\pi^\infty \frac{1}{s}\,ds$ convergeren; tegenspraak. Dus $\int_0^\infty \widehat{v}(s)\,ds$ convergeert niet.

*Conclusie: we kunnen de Fourier inversieformule niet nóg meer verfraaien, althans, niet voor $c = 0$ en dus ook niet i.h.a. Blijkbaar vallen er in de integraal in het vorige onderdeel divergerende delen tegen elkaar weg.*

## Opgave 4.5.14

(a) $f$ is duidelijk stuksgewijs continu (feitelijk zelfs continu), en ook absoluut integreerbaar ($\int_{-\infty}^\infty |f(t)|\,dt = \int_{-1}^0 (1+t)\,dt + \int_0^1 (1-t)\,dt = 1$). Dus $\widehat{f}$ is gedefinieerd, en voor $s \neq 0$ geldt

$$\begin{aligned}\widehat{f}(s) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-ist} f(t)\,dt = \int_{-1}^0 (1+t)e^{-ist}\,dt + \int_0^1 (1-t)e^{-ist}\,dt \\ &= \frac{2 - 2\cos s}{s^2}\end{aligned}$$

terwijl voor $s = 0$ geldt $\widehat{f}(s) = 1$.

Merk op: $\widehat{f}$ is dus continu ($2\times$ l'Hôpital bijvoorbeeld). Dit moet ook wel op grond van Stelling 4.4.

(b) We moeten dus laten zien dat $f$ stuksgewijs continu differentieerbaar is op elk gesloten interval $[p, q]$. Het is weer voldoende om dit te laten zien voor elk interval $[p, q]$ met $p < -1$ en $q > 1$.

Zij $p < -1$ en $q > 1$ gegeven. We gaan nu kijken of aan Definitie 3.8 wordt voldaan. Hiertoe bekijken we de restrictie van $f$ tot de open intervallen $(p, -1)$ en $(-1, 0)$ en $(0, 1)$ en $(1, q)$. Allereerst is op elk van deze open intervallen $f$ een differentieerbare functie, met afgeleide 0 resp. 1 resp. $-1$ resp. 0, dus met continue afgeleide (per open interval!). Verder bestaan de volgende limieten omdat $f$ continu is:

$\lim_{t\downarrow p} f(t)$; $\lim_{t\uparrow -1} f(t)$; $\lim_{t\downarrow -1} f(t)$; $\lim_{t\uparrow 0} f(t)$; $\lim_{t\downarrow 0} f(t)$; $\lim_{t\uparrow 1} f(t)$; $\lim_{t\downarrow 1} f(t)$; $\lim_{t\uparrow q} f(t)$

en gelden de volgende limieten voor de afgeleide:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\downarrow p} f'(t) = \lim_{t\uparrow -1} f'(t) = 0; \qquad &&\lim_{t\downarrow -1} f'(t) = \lim_{t\uparrow 0} f'(t) = 1; \\ &\lim_{t\downarrow 0} f'(t) = \lim_{t\uparrow 1} f'(t) = -1; \qquad &&\lim_{t\downarrow 1} f'(t) = \lim_{t\uparrow q} f'(t) = 0\end{aligned}$$

We concluderen dat $f$ stuksgewijs continu differentieerbaar is op $[p,q]$, wat te bewijzen was.

(c) $f$ is absoluut integreerbaar (zie (a)) en stuksgewijs continu differentieerbaar (zie (b)). Bovendien is $f$ continu, en voldoet $f$ aan $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0 = \lim_{t\to\infty} f(t)$. Dan zegt Stelling 4.8 dat

$$\widehat{(f')}(s) = is\widehat{f}(s).$$

Bovendien is $f' = -v$, dus we krijgen het verband

$$\widehat{v}(s) = -is\widehat{f}(s).$$

Controle: rechterlid $= -is\frac{2-2\cos s}{s^2} = \frac{2-2\cos s}{is}$, en linkerlid ook.

(d) $f$ is continu, dus continu in elke $c \in \mathbb{R}$. Zij dus gegeven $c \in \mathbb{R}$, dan

$$\frac{1}{2}[\lim_{x\downarrow c} f(x) + \lim_{x\uparrow c} f(x)] = \frac{1}{2}[\lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} f(x)] = \frac{1}{2}[f(c) + f(c)] = f(c)$$

(e) Te bewijzen dat $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)e^{ics}\,ds$ absoluut convergeert, d.w.z. dat $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)e^{ics}|\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|\,ds$ convergeert.
Allereerst zijn $\int_{-\infty}^{-1} |\widehat{f}(s)|\,ds$ en $\int_{1}^{\infty} |\widehat{f}(s)|\,ds$ convergent, want voor $s \in ]-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ is $|\widehat{f}(s)| = \frac{2-2\cos s}{s^2} \le \frac{4}{s^2}$, en $\frac{1}{s^2}$ is integreerbaar op $]-\infty,-1]$ resp. $[1,\infty)$. Ook $\int_{-1}^{1} |\widehat{f}(s)|\,ds$ is convergent; de integrand is immers continu (ook in 0). Conclusie: $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|\,ds$ convergeert.

(f) Wat betreft het linkerlid volgt de verfraaiing uit (d), en wat betreft het rechterlid uit (e).

Iets precieser, de verfraaiing van het rechterlid volgt uit de volgende stappen:

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \cdots\, ds &= \lim_{R\to\infty} \left[\int_{-R}^{0} \cdots\, ds + \int_{0}^{R} \cdots\, ds\right] \\
&\overset{(*)}{=} \left(\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0} \cdots\, ds\right) + \left(\lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} \cdots\, ds\right) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \cdots\, ds + \int_{0}^{\infty} \cdots\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots\, ds.
\end{aligned}$$

Hierbij mag de somregel voor limieten bij de gelijkheid $(*)$ worden toegepast wegens de reeds bewezen convergentie van $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0}\cdots\, ds$ en $\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R}\cdots\, ds$.

(g) Bij (f) zagen we $2\pi f(c) = \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{ics}\, ds$, dus

$$\widehat{\left(\widehat{f}\right)}(c) := \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\boldsymbol{t})e^{-ic\boldsymbol{t}}\, d\boldsymbol{t} = \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\boldsymbol{s})e^{i(-c)\boldsymbol{s}}\, d\boldsymbol{s} = 2\pi f(-c)$$

dus (bedenk ook dat $|-c| = |c|$):

$$(\mathcal{F}\left(\frac{1-\cos s}{s^2}\right))(c) = \pi f(-c) = \begin{cases} \pi - \pi|c| & \text{als } |c| < 1; \\ 0 & \text{als } |c| \geq 1. \end{cases}$$