Fouriertheorie, uitwerking van de opgaven
paragraaf 5.4: 1,2(door Jan Stienstra).

Opgave 5.4.1

(a) De functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door $g(t) = e^{-|t|}$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Dus is

$$\begin{aligned} \widehat{g}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-is)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{(-1-is)t} dt \\ &= \frac{1}{1-is} + \frac{1}{1+is} = \frac{2}{1+s^2} \end{aligned}$$

(b) Merk eerst op dat

$$(z^2 - 5z + 6)(z^2 - 1) = (z-2)(z-3)(z-1)(z+1).$$

Dus moeten we getallen a, b, c, d zoeken zo dat

$$\frac{1}{(z^2 - 5z + 6)(z^2 - 1)} = \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z-3} + \frac{c}{z-1} + \frac{d}{z+1}$$

Wanneer we dit vermenigvuldigen met $(z-2)(z-3)(z-1)(z+1)$ vinden we

$$\begin{aligned} 1 &= a(z-3)(z-1)(z+1) + b(z-2)(z-1)(z+1) + \\ &\quad +c(z-2)(z-3)(z+1) + d(z-2)(z-3)(z-1) \end{aligned}$$

Vul in $z = 2$; dat levert $1 = -3a$; dus $a = -\frac{1}{3}$.
Vul in $z = 3$; dat levert $1 = 8b$; dus $b = \frac{1}{8}$.
Vul in $z = 1$; dat levert $1 = 4c$; dus $c = \frac{1}{4}$.
Vul in $z = -1$; dat levert $1 = -24d$; dus $d = -\frac{1}{24}$.
Kortom we hebben de breuksplitsing gevonden:

$$\frac{1}{(z^2 - 5z + 6)(z^2 - 1)} = \frac{-\frac{1}{3}}{z-2} + \frac{\frac{1}{8}}{z-3} + \frac{\frac{1}{4}}{z-1} + \frac{-\frac{1}{24}}{z+1} .$$

(c)

$$\widehat{f}(s) = \frac{-\frac{2}{3}}{is-2} + \frac{\frac{1}{4}}{is-3} + \frac{\frac{1}{2}}{is-1} + \frac{-\frac{1}{12}}{is+1}$$

Dus (met Stelling 5.7)

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t} & \text{voor} \quad t \leq 0; \\ -\frac{1}{12}e^{-t} & \text{voor} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

(d) De Fouriergetransformeerde van de differentiaalvergelijking is

$$(-(is)^2 + 5(is) - 6)\widehat{f}(s) = \frac{2}{1+s^2}$$

ofwel

$$(s^2 + 5is - 6)\widehat{f}(s) = \frac{2}{1+s^2}$$

De functie f die we in (c) hebben gevonden voldoet hieraan en dus moet die f een oplossing van de differentiaalvergelijking zijn. Inderdaad:

Als $t \leq 0$ dan

$$\begin{aligned} -f''(t) + 5f'(t) - 6f(t) \quad = \quad & -\frac{8}{3}e^{2t} + \frac{9}{4}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{t} \\ & +\frac{20}{3}e^{2t} - \frac{15}{4}e^{3t} - \frac{5}{2}e^{t} \\ & -\frac{12}{3}e^{2t} + \frac{6}{4}e^{3t} + 3e^{t} \;=\; e^{t}\ . \end{aligned}$$

Als $t \geq 0$ dan

$$-f''(t) + 5f'(t) - 6f(t) = \frac{1}{12}e^{-t} + \frac{5}{12}e^{-t} + \frac{6}{12}e^{-t} = e^{-t}\ .$$

Dus $-f''(t) + 5f'(t) - 6f(t) = e^{-|t|}$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

(e) Omdat

$$\widehat{h}(s) = \frac{1}{s^2 + 5is - 6} = \frac{1}{is-2} - \frac{1}{is-3}$$

is

$$h(t) = 0 \quad \text{voor} \quad t \geq 0 \qquad \text{en} \qquad h(t) = -e^{2t} + e^{3t} \quad \text{voor} \quad t \leq 0\ .$$

(f) Voor $x \geq 0$ is

$$\begin{aligned}
(h * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{0} (-e^{2t} + e^{3t})e^{-|x-t|}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} (-e^{2t} + e^{3t})e^{-x+t}dt \\
&= e^{-x} \int_{-\infty}^{0} (-e^{3t} + e^{4t})dt = -\frac{1}{12}e^{-x}.
\end{aligned}$$

Voor $x \leq 0$ is

$$\begin{aligned}
(h * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{0} (-e^{2t} + e^{3t})e^{-|x-t|}dt \\
&= \int_{-\infty}^{x} (-e^{2t} + e^{3t})e^{-x+t}dt + \int_{x}^{0} (-e^{2t} + e^{3t})e^{x-t}dt \\
&= e^{-x} \int_{-\infty}^{x} (-e^{3t} + e^{4t})dt + e^{x} \int_{x}^{0} (-e^{t} + e^{2t})dt \\
&= e^{-x}(-\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{4}e^{4x}) + e^{x}(-1 + e^{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x}) \\
&= \frac{2}{3}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{x}
\end{aligned}$$

Dat stemt dus overeen met onze bevindingen in onderdeel (c)

Opgave 5.4.2

(a)

$$u(t) = \begin{cases} 4e^{t} & \text{als} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{als} \quad t < 0 \text{ of } t \geq 1 \end{cases}$$

Dus is

$$\widehat{u}(s) = \int_{0}^{1} 4e^{t}e^{-ist}dt = \frac{4}{1-is}(e^{1-is} - 1)$$

(b) De differentiaalvergelijking $v''(t) - 2v'(t) + 5v(t) = u(t)$ geeft na Fourier-transformatie

$$((is)^2 - 2is + 5)\widehat{v}(s) = \frac{4}{1-is}(e^{1-is} - 1)$$

Dus
$$\widehat{v}(s) = \frac{4}{(is-1)(is-1-2i)(is-1+2i)}(1-e^{1-is})$$
We moeten nu gaan breuksplitsen. Het loont de moeite eerst even goed naar de struktuur van de breuk te kijken: we kunnen het beste eerst $\frac{4}{z(z-2i)(z+2i)}$ breuksplitsen en dan later $z = is - 1$ invullen:

$$\frac{4}{z(z-2i)(z+2i)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-2i} + \frac{c}{z+2i};$$

dus:
$$4 = a(z-2i)(z+2i) + bz(z+2i) + cz(z-2i);$$
achtereenvolgens $0, 2i, -2i$ invullen voor z leert:

$$a = 1\,, \qquad b = -\frac{1}{2}\,, \qquad c = -\frac{1}{2}.$$

Zo hebben nu gevonden

$$\widehat{v}(s) = \left(\frac{1}{is-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{is-1-2i} + \frac{-\frac{1}{2}}{is-1+2i}\right)(1-e^{1-is})$$

De functie

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad t > 0 \\ -e^t + \frac{1}{2}e^{(1+2i)t} + \frac{1}{2}e^{(1-2i)t} = e^t\left(\cos(2t) - 1\right) & \text{voor} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

heeft Fouriergetransformeerde

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{is-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{is-1-2i} + \frac{-\frac{1}{2}}{is-1+2i}$$

Nu herinneren we ons Stelling 4.11 formule (93): de functie $h(t)$ gegeven door $h(t) = f(t-1)$, d.w.z.

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 \quad \text{voor} \quad t > 1\,, \\ h(t) &= -e^{t-1} + \frac{1}{2}e^{(1+2i)(t-1)} + \frac{1}{2}e^{(1-2i)(t-1)} = \\ &= e^{-1}e^t\left(\cos(2t-2) - 1\right) \quad \text{voor} \quad t \leq 1\,, \end{aligned}$$

heeft Fouriergetransformeerde

$$\widehat{h}(s) = \left(\frac{1}{is-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{is-1-2i} + \frac{-\frac{1}{2}}{is-1+2i} \right) e^{-is}$$

Alles overziend zien we dat de functie $f(t) - e\,h(t)$ precies de Fouriergetransformeerde heeft, die een oplossing van de differentiaalvergelijking moet hebben. We concluderen dat de functie $v(t) = f(t) - e\,h(t)$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking; expliciet is

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad t \geq 1 \\ e^t\,(1 - \cos(2t-2)) & \text{voor} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ e^t\,(\cos(2t) - \cos(2t-2)) & \text{voor} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Het is verstandig om na zo'n lange rekenpartij de uitkomst te controleren door $v''(t) - 2v'(t) + 5v(t)$ te berekenen! Controleer ook of v gelijk is aan $u * g$ waarin g de functie is met

$$\widehat{g}(s) = \frac{1}{(is)^2 - 2is + 5}\ .$$