Fouriertheorie, uitwerking paragraaf 7.5

opgaven 1-5 (door Jan Stienstra), 6-8 (door Yuri kuznetsov)

7.5.1

(a) Wanneer we $u(x,t) = X(x)T(t)$ invullen in de differentiaalvergelijking

$$u_{xx} = u_t + u$$

vinden we

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t) + X(x)T(t)\,.$$

Delen we links en rechts door $X(x)T(t)$ dan staat hier

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} + 1$$

Omdat hier het linkerlid niet afhangt van t en het rechterlid niet afhangt van x, terwijl linker- en rechterlid wel gelijk zijn, moeten linker- en rechterlid constant zijn:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda\,, \qquad \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = \lambda$$

voor 'n $\lambda \in \mathbb{R}$. Dus voldoen de functies $X(x)$ en $T(t)$ aan de gewone differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x) \\ T'(t) &= (\lambda - 1)T(t) \end{aligned}$$

die aan elkaar gekoppeld zijn via de constante λ.

(b) Wanneer $u(x,t) = X(x)T(t)$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en alle $t > 0$ en wanneer bovendien $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ voor alle $t > 0$, dan moet gelden

$$T(t) = 0 \quad \text{voor alle } \ t > 0 \qquad \text{OF} \qquad X(0) = X(\pi) = 0\,.$$

Als $T(t) = 0$ voor alle $t > 0$, dan is ook meteen $u(x,t) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en alle $t > 0$. Deze constant nul functie voldoet trivialerwijze aan de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden en moet zeer zeker als oplossing worden genoemd. Er zijn echter nog minder triviale oplossingen.

Als $u(x,t) \neq 0$ voor 'n x en t, dan is $T(t) \neq 0$ voor 'n t en dus moet $X(0) = X(\pi) = 0$ zijn. Bovendien voldoet de functie $X(x)$ aan de differentiaalvergelijking $X''(x) = \lambda X(x)$. Dit laatste impliceert in het geval $\lambda = 0$

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

voor twee (mogelijk complexe) constanten c_1 en c_2. Vanwege $X(0) = X(\pi) = 0$ moet dan $c_1 = c_2 = 0$ zijn. Dan is $X(x) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en dus $u(x,t) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en alle $t > 0$. We vinden zo nog een keer de triviale nul oplossing.

In het geval $\lambda \neq 0$ is

$$X(x) = c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}$$

voor twee (mogelijk complexe) constanten c_1 en c_2. Vanwege $X(0) = 0$ moet dan $c_2 = -c_1$ gelden; dus $X(x) = c_1(e^{x\sqrt{\lambda}} - e^{-x\sqrt{\lambda}})$. Vanwege $X(\pi) = 0$ moet dan gelden

$$c_1 = 0 \qquad \text{OF} \qquad e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}} = 0$$

Als $c_1 = 0$ dan is $X(x) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en dus $u(x,t) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en alle $t > 0$. We vinden zo nog een keer de triviale nul oplossing.

Als $c_1 \neq 0$ dan is

$$\begin{aligned} e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}} = 0 &\implies e^{\pi\sqrt{\lambda}} = e^{-\pi\sqrt{\lambda}} \\ &\implies e^{2\pi\sqrt{\lambda}} = 1 \\ &\implies \sqrt{\lambda} = \mathrm{i}k \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\implies \lambda = -k^2 \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Bovendien is dan

$$X(x) = C\sin(kx) \qquad \text{met} \quad C = 2\mathrm{i}c_1 \quad \text{een reële constante}$$

We moeten nu ook nog de differentiaalvergelijking

$$T'(t) = (-k^2 - 1)T(t)$$

oplossen. Dat levert:

$$T(t) = De^{-t(k^2+1)} \qquad \text{met} \quad D \quad \text{een reële constante.}$$

Eindconclusie: De oplossingen van de differentiaalvergelijking $u_{xx} = u_t + u$ van de vorm $u(x,t) = X(x)T(t)$ die bovendien voldoen aan $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ voor alle $t > 0$, zijn precies de functies

$$u(x,t) = Ae^{-t(k^2+1)}\sin(kx) \qquad \text{met} \;\; k \in \mathbb{Z}, A \in \mathbb{R}\,.$$

Als $A = 0$ of $k = 0$ staat hier de constant nul functie. Dat is ook een legitieme oplossing. Verder staat hier voor $(-A,-k)$ dezelfde functie als voor (A,k).

Willen we dergelijke doublures in ons antwoord vermijden, dan kunnen schrijven:

$$u(x,t) = Ae^{-t(k^2+1)}\sin(kx) \qquad \text{met} \;\; k \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{R}\,,$$

waarbij $\mathbb{N}$ de verzameling van alle *positieve* (d.w.z. > 0) gehele getallen is.

7.5.2

(a) Wanneer we $u(x,t) = X(x)T(t)$ invullen in de differentiaalvergelijking

$$u_{xx} = u_{tt} + u$$

vinden we

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t) + X(x)T(t)\,.$$

Delen we links en rechts door $X(x)T(t)$ dan staat hier

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} + 1$$

Omdat hier het linkerlid niet afhangt van t en het rechterlid niet afhangt van x, terwijl linker- en rechterlid wel gelijk zijn, moeten linker- en rechterlid constant zijn:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda\,, \qquad \frac{T''(t)}{T(t)} + 1 = \lambda$$

voor 'n $\lambda \in \mathbb{R}$. Dus voldoen de functies $X(x)$ en $T(t)$ aan de gewone differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x) \\ T''(t) &= (\lambda - 1)T(t) \end{aligned}$$

die aan elkaar gekoppeld zijn via de constante λ.

(b) Wanneer $u(x,t) = X(x)T(t)$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en alle $t > 0$ en wanneer bovendien $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ voor alle $t > 0$, dan moet gelden

$$T(t) = 0 \quad \text{voor alle} \;\; t > 0 \qquad \text{OF} \qquad X(0) = X(\pi) = 0\,.$$

Als $T(t) = 0$ voor alle $t > 0$, dan is ook meteen $u(x,t) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en alle $t > 0$. Deze constant nul functie voldoet trivialerwijze aan de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden en moet zeer zeker als oplossing worden genoemd. Er zijn echter nog minder triviale oplossingen.

Als $u(x,t) \neq 0$ voor 'n x en t, dan is $T(t) \neq 0$ voor 'n t en dus moet $X(0) = X(\pi) = 0$ zijn.

De functie $X(x)$ moet ook voldoen aan de gewone differentiaalvergelijking

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

voor een of andere complexe constante λ. Dit impliceert in het geval $\lambda = 0$

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

voor twee (mogelijk complexe) constanten c_1 en c_2. Vanwege $X(0) = X(\pi) = 0$ moet dan $c_1 = c_2 = 0$ zijn. Dan is $X(x) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en dus $u(x,t) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en alle $t > 0$. We vinden zo nog een keer de triviale nul oplossing.

In het geval $\lambda \neq 0$ is

$$X(x) = c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}$$

voor twee (mogelijk complexe) constanten c_1 en c_2. Vanwege $X(0) = 0$ moet dan $c_2 = -c_1$ gelden; dus $X(x) = c_1(e^{x\sqrt{\lambda}} - e^{-x\sqrt{\lambda}})$. Vanwege $X(\pi) = 0$ moet dan gelden

$$c_1 = 0 \qquad \text{OF} \qquad e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}} = 0$$

Als $c_1 = 0$ dan is $X(x) = 0$ voor alle $x \in [0, \pi]$ en dus $u(x,t) = 0$ voor alle $x \in [0, \pi]$ en alle $t > 0$. We vinden zo nog een keer de triviale nul oplossing.

Als $c_1 \neq 0$ dan is

$$\begin{aligned} e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad e^{\pi\sqrt{\lambda}} = e^{-\pi\sqrt{\lambda}} \\ &\Longrightarrow \quad e^{2\pi\sqrt{\lambda}} = 1 \\ &\Longrightarrow \quad \sqrt{\lambda} = \mathrm{i}k \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow \quad \lambda = -k^2 \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Bovendien is dan

$$X(x) = C\sin(kx) \qquad \text{met} \quad C = 2\mathrm{i}c_1 \quad \text{een reële constante}$$

Volgens (a) moet de factor $T(t)$ van $u(x,t) = X(x)T(t)$ voldoen aan de gewone differentiaalvergelijking

$$T''(t) = (\lambda - 1)T(t)$$

met dezelfde λ als voorheen. Voor een niet-triviale oplossing is $\lambda = -k^2$ met $k \in \mathbb{Z}$. Dit impliceert $\lambda \neq 1$ en dus is

$$T(t) = m_1 e^{\mathrm{i}t\sqrt{k^2+1}} + m_2 e^{-\mathrm{i}t\sqrt{k^2+1}}$$

voor zekere complexe constanten m_1 en m_2. Dit kan men ook schrijven als

$$T(t) = p_1 \cos(t\sqrt{k^2+1}) + p_2 \sin(t\sqrt{k^2+1})$$

met constanten p_1, p_2, die om fysische redenen reëel zijn.

Alles bij elkaar genomen komen we tot de conclusie dat de functies $u(x,t)$ die voldoen aan

$$\begin{aligned} &u_{xx} = u_{tt} + u \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{voor alle} \quad t > 0 \\ &u(x,t) = X(x)T(t) \end{aligned}$$

precies zijn

$$u(x,t) = (p\cos(t\sqrt{k^2+1}) + q\sin(t\sqrt{k^2+1}))\sin(kx)$$

met $k \in \mathbb{Z}, k > 0$, $p, q \in \mathbb{R}$.

(c) Alle functies gegeven door (convergente) reeksen

$$u(x,t) = \sum_{k>0} (p_k \cos(t\sqrt{k^2+1}) + q_k \sin(t\sqrt{k^2+1})) \sin(kx)$$

voldoen dan ook aan

$$\begin{aligned} &u_{xx} = u_{tt} + u \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{voor alle} \quad t > 0 \end{aligned}$$

Wil zo'n functie ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$u(x,0) = \sin(x)\,, \quad u_t(x,0) = \sin(2x) \qquad \text{voor} \quad 0 \le x \le \pi$$

dan moet

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k>0} (p_k \cos(0\sqrt{k^2+1}) + q_k \sin(0\sqrt{k^2+1})) \sin(kx) \\ &= \sum_{k>0} p_k \sin(kx) \\ \sin(2x) &= \sum_{k>0} \sqrt{k^2+1})(-p_k \sin(0\sqrt{k^2+1}) + q_k \cos(0\sqrt{k^2+1})) \sin(kx) \\ &= \sum_{k>0} q_k \sqrt{k^2+1} \sin(kx). \end{aligned}$$

Dit betekent dat de p_k's de Fouriercoëffiënten zijn van de functie $\sin(x)$ en dat de $q_k\sqrt{k^2+1}$'s de Fouriercoëffiënten zijn van de functie $\sin(2x)$. Dus is

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \qquad & p_k &= 0 \quad \text{voor} \quad k \neq 1 \\ q_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad & q_k &= 0 \quad \text{voor} \quad k \neq 2 \end{aligned}$$

Kortom, de gezochte oplossing van differentiaalvergelijking en alle randvoorwaarden is

$$u(x,t) = \cos(t\sqrt{2}) \sin(x) \; + \; \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(t\sqrt{5}) \sin(2x)$$

Opmerking/advies Na zo'n lang verhaal is het verstandig om de uitkomst te controleren, door 'm in te vullen in de DV en in de randvoorwaarden. Welnu:

$$\begin{aligned}
u_{xx} - u_{tt} - u &= -\cos(t\sqrt{2})\sin(x) - \frac{4}{\sqrt{5}}\sin(t\sqrt{5})\sin(2x) \\
&\quad +2\cos(t\sqrt{2})\sin(x) + \frac{5}{\sqrt{5}}\sin(t\sqrt{5})\sin(2x) \\
&\quad -\cos(t\sqrt{2})\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(t\sqrt{5})\sin(2x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Randvoorwaarden ...... duidelijk.

7.5.3

(a) Wanneer we $u(x,t) = X(x)T(t)$ invullen in de differentiaalvergelijking

$$u_{xx} = -u_{tt} + 2u_t - u$$

vinden we

$$X''(x)T(t) = -X(x)T''(t) + 2X(x)T'(t) - X(x)T(t)\,.$$

Delen we links en rechts door $X(x)T(t)$ dan staat hier

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{-T''(t) + 2T'(t)}{T(t)} - 1$$

Omdat hier het linkerlid niet afhangt van t en het rechterlid niet afhangt van x, terwijl linker- en rechterlid wel gelijk zijn, moeten linker- en rechterlid constant zijn:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda\,, \qquad \frac{-T''(t) + 2T'(t)}{T(t)} - 1 = \lambda$$

voor 'n $\lambda \in \mathbb{R}$. Dus voldoen de functies $X(x)$ en $T(t)$ aan de gewone differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}
X''(x) - \lambda X(x) &= 0 \\
-T''(t) + 2T'(t) - (\lambda+1)T(t) &= 0
\end{aligned}$$

die aan elkaar gekoppeld zijn via de constante λ.

(b) Wanneer $u(x,t) = X(x)T(t)$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en alle $t > 0$ en wanneer bovendien $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ voor alle $t > 0$, dan moet gelden

$$T(t) = 0 \quad \text{voor alle} \;\; t > 0 \qquad \text{OF} \qquad X(0) = X(\pi) = 0\,.$$

Als $T(t) = 0$ voor alle $t > 0$, dan is ook meteen $u(x,t) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en alle $t > 0$. Deze constant nul functie voldoet trivialerwijze aan de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden en moet zeer zeker als oplossing worden genoemd. Er zijn echter nog minder triviale oplossingen.

Als $u(x,t) \neq 0$ voor 'n x en t, dan is $T(t) \neq 0$ voor 'n t en dus moet $X(0) = X(\pi) = 0$ zijn.

De functie $X(x)$ moet ook voldoen aan de gewone differentiaalvergelijking

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

voor een of andere complexe constante λ. Dit impliceert in het geval $\lambda = 0$

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

voor twee (mogelijk complexe) constanten c_1 en c_2. Vanwege $X(0) = X(\pi) = 0$ moet dan $c_1 = c_2 = 0$ zijn. Dan is $X(x) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en dus $u(x,t) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en alle $t > 0$. We vinden zo nog een keer de triviale nul oplossing.

In het geval $\lambda \neq 0$ is

$$X(x) = c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}$$

voor twee (mogelijk complexe) constanten c_1 en c_2. Vanwege $X(0) = 0$ moet dan $c_2 = -c_1$ gelden; dus $X(x) = c_1(e^{x\sqrt{\lambda}} - e^{-x\sqrt{\lambda}})$. Vanwege $X(\pi) = 0$ moet dan gelden

$$c_1 = 0 \qquad \text{OF} \qquad e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}} = 0$$

Als $c_1 = 0$ dan is $X(x) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en dus $u(x,t) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en alle $t > 0$. We vinden zo nog een keer de triviale nul oplossing.

Als $c_1 \neq 0$ dan is

$$\begin{aligned}
e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad e^{\pi\sqrt{\lambda}} = e^{-\pi\sqrt{\lambda}} \\
&\Longrightarrow \quad e^{2\pi\sqrt{\lambda}} = 1 \\
&\Longrightarrow \quad \sqrt{\lambda} = \mathrm{i}k \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Longrightarrow \quad \lambda = -k^2 \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Merk op dat $k \neq 0$ moet zijn omdat $\lambda \neq 0$ is, en dat k en $-k$ dezelfde waarde voor λ geven. Daarom kunnen we ons beperken tot

$$\lambda = -k^2 \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z}\,, \quad k > 0.$$

Bovendien is dan

$$X(x) = C\sin(kx) \qquad \text{met} \quad C = 2\mathrm{i}c_1 \quad \text{een reële constante}$$

Volgens (a) moet de factor $T(t)$ van $u(x,t) = X(x)T(t)$ voldoen aan de gewone differentiaalvergelijking

$$T''(t) - 2T'(t) + (\lambda + 1)T(t) = 0$$

met dezelfde λ als voorheen. Voor een niet-triviale oplossing is $\lambda = -k^2$ met $k \in \mathbb{Z}\,,\ k > 0$. Om deze differentiaalvergelijking voor T op te lossen moeten we de twee wortels van de vergelijking

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 - k^2 = 0$$

bekijken. Dat zijn

$$\alpha_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 - k^2)}}{2} = 1 \pm k.$$

Omdat $k >\neq 0$ is, is $\alpha_1 \neq \alpha_2$ en dus is

$$T(t) = m_1 e^{(1+k)t} + m_2 e^{(1-k)t}$$

met constanten m_1, m_2, die om fysische redenen reëel zijn.

Alles bij elkaar genomen komen we tot de conclusie dat de functies $u(x,t)$ die voldoen aan

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = -u_{tt} + 2u_t - u \\
&u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{voor alle} \quad t > 0 \\
&u(x,t) = X(x)T(t)
\end{aligned}$$

precies zijn

$$u(x,t) = (pe^{(1+k)t} + qe^{(1-k)t})\sin(kx)$$

met $k \in \mathbb{Z}, k > 0$, $p, q \in \mathbb{R}$.

(c) Alle functies gegeven door (convergente) reeksen

$$u(x,t) = \sum_{k>0} (p_k e^{(1+k)t} + q_k e^{(1-k)t})\sin(kx)$$

voldoen dan ook aan

$$\begin{aligned} &u_{xx} = -u_{tt} + 2u_t - u \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{voor alle} \quad t > 0 \end{aligned}$$

Wil zo'n functie ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$u(x,0) = \sin(x)\,, \quad u_t(x,0) = \sin(2x) \qquad \text{voor} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

dan moet

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k>0} (p_k e^{(1+k)0} + q_k e^{(1-k)0})\sin(kx) \\ &= \sum_{k>0} (p_k + q_k)\sin(kx) \\ \sin(2x) &= \sum_{k>0} (p_k(1+k)e^{(1+k)0} + q_k(1-k)e^{(1-k)0}))\sin(kx) \\ &= \sum_{k>0} (p_k(1+k) + q_k(1-k))\sin(kx). \end{aligned}$$

Dit betekent dat

$$\begin{array}{rrrl} p_1 + q_1 = 1\,, & p_2 + q_2 = 0\,, & p_k + q_k = 0 & \text{voor} \quad k \geq 3 \\ 2p_1 = 0\,, & 3p_2 - q_2 = 1\,, & p_k(1+k) + q_k(1-k) = 0 & \text{voor} \quad k \geq 3 \end{array}$$

Hieruit volgt

$$p_1 = 0, \quad q_1 = 1, \quad p_2 = \frac{1}{4}, \quad q_2 = -\frac{1}{4}, \quad p_k = q_k = 0 \quad \text{voor} \quad k \geq 3$$

Kortom, de gezochte oplossing van differentiaalvergelijking en alle randvoorwaarden is

$$u(x,t) = \sin(x) \,+\, \frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t})\sin(2x)$$

Opmerking/advies Na zo'n lang verhaal is het verstandig om de uitkomst te controleren, door 'm in te vullen in de DV en in de randvoorwaarden. Welnu:

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{tt} - 2u_t + u &= -\sin(x) - (e^{3t} - e^{-t})\sin(2x) \\
&\quad + \frac{1}{4}(9e^{3t} - e^{-t})\sin(2x) \\
&\quad - \frac{2}{4}(3e^{3t} + e^{-t})\sin(2x) \\
&\quad + \sin(x) + \frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t})\sin(2x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Randvoorwaarden ...... duidelijk.

7.5.4

(a) Wanneer we $u(x,y) = X(x)Y(y)$ invullen in de differentiaalvergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} + 5u = 0$$

vinden we

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + 5X(x)Y(y) = 0\,.$$

Delen we door $X(x)Y(y)$ dan staat hier

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - 5$$

Omdat hier het linkerlid niet afhangt van y en het rechterlid niet afhangt van x, terwijl linker- en rechterlid wel gelijk zijn, moeten linker- en rechterlid constant zijn:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda\,, \qquad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - 5 = \lambda$$

voor 'n $\lambda \in \mathbb{R}$. Dus voldoen de functies $X(x)$ en $Y(y)$ aan de gewone differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}
X''(x) - \lambda X(x) &= 0 \\
Y''(t) + (\lambda + 5)Y(y) &= 0
\end{aligned}$$

die aan elkaar gekoppeld zijn via de constante λ.

(b) Wanneer $u(x,t) = X(x)Y(y)$ voor alle $x, y \in [0,\pi]$ en wanneer bovendien $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ voor alle $y \in [0,\pi]$, dan moet gelden

$$Y(y) = 0 \quad \text{voor alle} \;\; y \in [0,\pi] \qquad \text{OF} \qquad X(0) = X(\pi) = 0\,.$$

Als $Y(y) = 0$ voor alle $y \in [0,\pi]$, dan is ook meteen $u(x,y) = 0$ voor alle $x, y \in [0,\pi]$. Deze constant nul functie voldoet trivialerwijze aan de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden en moet zeer zeker als oplossing worden genoemd. Er zijn echter nog minder triviale oplossingen.

Als $u(x,y) \neq 0$ voor 'n x en y, dan is $Y(y) \neq 0$ voor 'n y en dus moet $X(0) = X(\pi) = 0$ zijn.

De functie $X(x)$ moet ook voldoen aan de gewone differentiaalvergelijking

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

voor een of andere complexe constante λ. Dit impliceert in het geval $\lambda = 0$

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

voor twee (mogelijk complexe) constanten c_1 en c_2. Vanwege $X(0) = X(\pi) = 0$ moet dan $c_1 = c_2 = 0$ zijn. Dan is $X(x) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en dus $u(x,t) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en alle $t > 0$. We vinden zo nog een keer de triviale nul oplossing.

In het geval $\lambda \neq 0$ is

$$X(x) = c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}$$

voor twee (mogelijk complexe) constanten c_1 en c_2. Vanwege $X(0) = 0$ moet dan $c_2 = -c_1$ gelden; dus $X(x) = c_1(e^{x\sqrt{\lambda}} - e^{-x\sqrt{\lambda}})$. Vanwege $X(\pi) = 0$ moet dan gelden

$$c_1 = 0 \qquad \text{OF} \qquad e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}} = 0$$

Als $c_1 = 0$ dan is $X(x) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en dus $u(x,t) = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$ en alle $t > 0$. We vinden zo nog een keer de triviale nul oplossing.

Als $c_1 \neq 0$ dan is

$$\begin{aligned} e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}} = 0 &\implies e^{\pi\sqrt{\lambda}} = e^{-\pi\sqrt{\lambda}} \\ &\implies e^{2\pi\sqrt{\lambda}} = 1 \\ &\implies \sqrt{\lambda} = \mathrm{i}k \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\implies \lambda = -k^2 \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Bovendien is dan

$$X(x) = C\sin(kx) \qquad \text{met} \quad C = 2\mathrm{i}c_1 \quad \text{een reële constante}$$

Volgens (a) moet de factor $Y(y)$ van $u(x,t) = X(x)Y(y)$ voldoen aan de gewone differentiaalvergelijking

$$Y''(y) = -(\lambda + 5)Y(y)$$

met dezelfde λ als voorheen. Voor een niet-triviale oplossing is $\lambda = -k^2$ met $k \in \mathbb{Z}$. Dit impliceert $\lambda + 5 \neq 0$ en dus is

$$Y(y) = m_1 e^{y\sqrt{k^2-5}} + m_2 e^{-y\sqrt{k^2-5}}$$

voor zekere complexe constanten m_1 en m_2.

Nu willen we ook dat wordt voldaan aan de randvoorwaarde

$$u(x,0) = 0 \qquad \text{voor} \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Net als voorheen impliceert dit dat $u(x,y)$ de nulfunctie is, of dat (interessanter)

$$Y(0) = 0.$$

Dit samen met $Y(y) = m_1 e^{y\sqrt{k^2-5}} + m_2 e^{-y\sqrt{k^2-5}}$ impliceert $m_1 = -m_2$; dus

$$Y(y) = m\left(e^{y\sqrt{k^2-5}} - e^{-y\sqrt{k^2-5}}\right)$$

voor een complexe constante m.

Alles bij elkaar genomen komen we tot de conclusie dat de functies $u(x,y)$ die voldoen aan

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} + 5u = 0 \\ &u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \qquad \text{voor alle} \quad y \in [0,\pi] \\ &u(x,0) = 0 \qquad \text{voor alle} \quad x \in [0,\pi] \\ &u(x,y) = X(x)Y(y) \end{aligned}$$

precies zijn

$$u(x,y) = m\ \left(e^{y\sqrt{k^2-5}} - e^{-y\sqrt{k^2-5}}\right)\sin(kx)$$

met $k \in \mathbb{Z}, k > 0$, $m \in \mathbb{R}$.

(c) Alle functies gegeven door (convergente) reeksen

$$u(x,y) = \sum_{k>0} m_k \left(e^{y\sqrt{k^2-5}} - e^{-y\sqrt{k^2-5}}\right)\sin(kx)$$

voldoen dan ook aan

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} + 5u = 0 \\ &u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \qquad \text{voor alle} \quad y \in [0,\pi] \\ &u(x,0) = 0 \qquad \text{voor alle} \quad x \in [0,\pi] \end{aligned}$$

Wil zo'n functie ook nog voldoen aan de randvoorwaarde

$$u(x,\pi) = \sin(3x) \qquad \text{voor} \quad 0 \le x \le \pi$$

dan moet

$$\sum_{k>0} m_k \left(e^{\pi\sqrt{k^2-5}} - e^{-\pi\sqrt{k^2-5}}\right)\sin(kx) = \sin(3x)$$

Het ingewikkeld uitziende linkerlid is dus in feite de Fourierreeks van de eenvoudige functie $\sin(3x)$. Dit betekent $m_k = 0$ voor $k \neq 3$ en

$$m_3 = \left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)^{-1}.$$

Kortom, de gezochte oplossing van differentiaalvergelijking en alle randvoorwaarden is

$$u(x,y) = \left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)^{-1}\left(e^{2y} - e^{-2y}\right)\sin(3x)$$

Controle:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + 5u &= -9\left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)^{-1}\left(e^{2y} - e^{-2y}\right)\sin(3x) \\ &\quad +4\left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)^{-1}\left(e^{2y} - e^{-2y}\right)\sin(3x) \\ &\quad +5\left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)^{-1}\left(e^{2y} - e^{-2y}\right)\sin(3x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Randvooraarden ..... klopt ook.

7.5.5

(a) Wanneer we $u(x,y) = X(x)Y(y)$ invullen in de differentiaalvergelijking

$$u_{xx} + 3u_{yy} + u = 0$$

vinden we

$$X''(x)Y(y) + 3X(x)Y''(y) + X(x)Y(y) = 0\,.$$

Delen we door $X(x)Y(y)$ dan staat hier

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -3\frac{Y''(y)}{Y(y)} - 1$$

Omdat hier het linkerlid niet afhangt van y en het rechterlid niet afhangt van x, terwijl linker- en rechterlid wel gelijk zijn, moeten linker- en rechterlid constant zijn:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda\,, \qquad -3\frac{Y''(y)}{Y(y)} - 1 = \lambda$$

voor 'n $\lambda \in \mathbb{R}$. Dus voldoen de functies $X(x)$ en $Y(y)$ aan de gewone differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0 \\ 3Y''(t) + (\lambda+1)Y(y) &= 0 \end{aligned}$$

die aan elkaar gekoppeld zijn via de constante λ.

(b) Wanneer $u(x,t) = X(x)Y(y)$ voor alle $x, y \in [0,\pi]$ en wanneer bovendien $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ voor alle $y \in [0,\pi]$, dan moet gelden

$$Y(y) = 0 \quad \text{voor alle } \; y \in [0,\pi] \qquad \text{OF} \qquad X(0) = X(\pi) = 0\,.$$

Als $Y(y) = 0$ voor alle $y \in [0,\pi]$, dan is ook meteen $u(x,y) = 0$ voor alle $x, y \in [0,\pi]$. Deze constant nul functie voldoet trivialerwijze aan de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden en moet zeer zeker als oplossing worden genoemd. Er zijn echter nog minder triviale oplossingen.

Als $u(x,y) \neq 0$ voor 'n x en y, dan is $Y(y) \neq 0$ voor 'n y en dus moet $X(0) = X(\pi) = 0$ zijn.

De functie $X(x)$ moet ook voldoen aan de gewone differentiaalvergelijking

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

voor een of andere complexe constante λ. Dit impliceert in het geval $\lambda = 0$

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

voor twee (mogelijk complexe) constanten c_1 en c_2. Vanwege $X(0) = X(\pi) = 0$ moet dan $c_1 = c_2 = 0$ zijn. Dan is $X(x) = 0$ voor alle $x \in [0, \pi]$ en dus $u(x, t) = 0$ voor alle $x \in [0, \pi]$ en alle $t > 0$. We vinden zo nog een keer de triviale nul oplossing.

In het geval $\lambda \neq 0$ is

$$X(x) = c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}$$

voor twee (mogelijk complexe) constanten c_1 en c_2. Vanwege $X(0) = 0$ moet dan $c_2 = -c_1$ gelden; dus $X(x) = c_1(e^{x\sqrt{\lambda}} - e^{-x\sqrt{\lambda}})$. Vanwege $X(\pi) = 0$ moet dan gelden

$$c_1 = 0 \qquad \text{OF} \qquad e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}} = 0$$

Als $c_1 = 0$ dan is $X(x) = 0$ voor alle $x \in [0, \pi]$ en dus $u(x, t) = 0$ voor alle $x \in [0, \pi]$ en alle $t > 0$. We vinden zo nog een keer de triviale nul oplossing.

Als $c_1 \neq 0$ dan is

$$\begin{aligned} e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}} = 0 &\implies e^{\pi\sqrt{\lambda}} = e^{-\pi\sqrt{\lambda}} \\ &\implies e^{2\pi\sqrt{\lambda}} = 1 \\ &\implies \sqrt{\lambda} = \mathrm{i}k \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\implies \lambda = -k^2 \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Merk op dat $k \neq 0$ moet zijn omdat $\lambda \neq 0$ is, en dat k en $-k$ dezelfde waarde voor λ geven. Daarom kunnen we ons beperken tot

$$\lambda = -k^2 \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z}\,, \quad k > 0.$$

Bovendien is dan

$$X(x) = C \sin(kx) \qquad \text{met} \quad C = 2\mathrm{i}c_1 \quad \text{een reële constante}$$

Volgens (a) moet de factor $Y(y)$ van $u(x,t) = X(x)Y(y)$ voldoen aan de gewone differentiaalvergelijking

$$Y''(y) = -\frac{\lambda+1}{3}Y(y)$$

met dezelfde λ als voorheen. Voor een niet-triviale oplossing is $\lambda = -k^2$ met $k \in \mathbb{Z}\,,\ k > 0$. Dus

$$Y''(y) = \frac{k^2-1}{3}Y(y)\,.$$

Voor $k = 1$ staat hier $Y''(y) = 0$; dus

$$Y(y) = m_1 + m_2 y$$

voor zekere constanten m_1 en m_2.

Voor $k \geq 2$ is $\frac{k^2-1}{3} > 0$ en is dus

$$Y(y) = m_1 e^{y\sqrt{\frac{k^2-1}{3}}} + m_2 e^{-y\sqrt{\frac{k^2-1}{3}}}$$

voor zekere constanten m_1 en m_2.

Nu willen we ook dat wordt voldaan aan de randvoorwaarde

$$u(x,0) = 0 \qquad \text{voor} \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Net als voorheen impliceert dit dat $u(x,y)$ de nulfunctie is, of dat (interessanter)

$$Y(0) = 0.$$

Dit betekent

$$\begin{aligned} Y(y) &= my && \text{als} \quad k = 1 \\ Y(y) &= m\left(e^{y\sqrt{\frac{k^2-1}{3}}} - e^{-y\sqrt{\frac{k^2-1}{3}}}\right) && \text{als} \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

voor een (complexe) constante m.

Alles bij elkaar genomen komen we tot de conclusie dat de functies $u(x,y)$ die voldoen aan

$$\begin{aligned} &u_{xx} + 3u_{yy} + u = 0 \\ &u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \qquad \text{voor alle} \quad y \in [0,\pi] \\ &u(x,0) = 0 \qquad \text{voor alle} \quad x \in [0,\pi] \\ &u(x,y) = X(x)Y(y) \end{aligned}$$

precies zijn

$$u(x,y) = my\sin(x)$$

en

$$u(x,y) = m\left(e^{y\sqrt{\frac{k^2-1}{3}}} - e^{-y\sqrt{\frac{k^2-1}{3}}}\right)\sin(kx)$$

met $k \in \mathbb{Z}, k \geq 2$, $m \in \mathbb{R}$.

(c) Alle functies gegeven door (convergente) reeksen

$$u(x,y) = m_1 y\sin(x) + \sum_{k\geq 2} m_k \left(e^{y\sqrt{\frac{k^2-1}{3}}} - e^{-y\sqrt{\frac{k^2-1}{3}}}\right)\sin(kx)$$

voldoen dan ook aan

$$\begin{array}{l} u_{xx} + 3u_{yy} + u = 0 \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \qquad \text{voor alle} \quad y \in [0,\pi] \\ u(x,0) = 0 \qquad \text{voor alle} \quad x \in [0,\pi] \end{array}$$

Wil zo'n functie ook nog voldoen aan de randvoorwaarde

$$u(x,\pi) = \sin(x) + \sin(2x) \qquad \text{voor} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

dan moet

$$m_1\pi\sin(x) + \sum_{k\geq 2} m_k \left(e^{\pi\sqrt{\frac{k^2-1}{3}}} - e^{-\pi\sqrt{\frac{k^2-1}{3}}}\right)\sin(kx) = \sin(x) + \sin(2x)$$

Het ingewikkeld uitziende linkerlid is dus in feite de Fourierreeks van de eenvoudige functie $\sin(x)+\sin(2x)$. Dit betekent $m_k = 0$ voor $k \geq 3$ en

$$m_1 = \pi^{-1}, \qquad m_2 = \left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)^{-1}.$$

Kortom, de gezochte oplossing van differentiaalvergelijking en alle randvoorwaarden is

$$u(x,y) = \pi^{-1}y\sin(x) + \left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)^{-1}\left(e^{y} - e^{-y}\right)\sin(2x)$$

Controle:

$$\begin{aligned} u_{xx} + 3u_{yy} + u &= -\pi^{-1}y\sin(x) - 4\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)^{-1}\left(e^{y} - e^{-y}\right)\sin(2x) \\ &\quad +3\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)^{-1}\left(e^{y} - e^{-y}\right)\sin(2x) \\ &\quad +\pi^{-1}y\sin(x) + \left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)^{-1}\left(e^{y} - e^{-y}\right)\sin(2x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Randvooraarden ..... klopt ook.

7.5.6

We hebben

$$G(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \quad \text{voor} \quad t > 0.$$

Dus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} &= -\frac{x}{4a^3t\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\,, \\
\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} + \frac{x^2}{8a^5t^2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} = \frac{-2a^2t + x^2}{8a^5t^2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\,, \\
\frac{\partial G(x,t)}{\partial t} &= -\frac{1}{4at\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} + \frac{x^2}{8a^3t^2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} = \frac{-2a^2t + x^2}{8a^3t^2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\,.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2} \equiv 0$$

voor alle $t > 0$.

7.5.7

De formule van d'Alembert (met $g(x) \equiv 0, f(x) = 2xe^{-x^2}$) geeft

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} f(\xi)d\xi = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 2\xi e^{-\xi^2}d\xi \\
&= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} e^{-\xi^2}d(\xi^2) = -\frac{1}{2c}\left[e^{-\xi^2}\right]_{x-ct}^{x+ct} \\
&= \frac{1}{2c}\left(e^{-(x-ct)^2} - e^{-(x+ct)^2}\right)\,.
\end{aligned}$$

7.5.8

(a) Veronderstel dat een functie $u(x,y)$ bestaat die aan de partiële differentiaalvergelijking

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \qquad \text{voor} \quad x \in \mathbb{R}, y > 0$$

en de randvoorwaarde $u(x,0) = g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ voldoet en waarvoor de integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,y)|\, dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right| dx \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\right| dx$$

convergeren voor iedere $y > 0$. Dan geldt

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(s,y)e^{isx}\,ds$$

waarin

$$\widehat{u}(s,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}u(x,y)\,dx\,.$$

Hieruit volgt dat

$$\widehat{u}(s,0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}u(x,0)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}g(x)\,dx = \widehat{g}(s)\ .$$

Veronderstel verder dat

$$\frac{\partial^2\widehat{u}(s,y)}{\partial y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\,dx\ .$$

Omdat $u_{xx} = -u_{yy}$, geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\,dx$$

en door tweemaal partiëel integreren krijgen we

$$\frac{\partial^2\widehat{u}(s,y)}{\partial y^2} = -(-is)^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}u(x,y)\,dx = s^2\widehat{u}(s,y)\ .$$

(b) De differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2\widehat{u}(s,y)}{\partial y^2} = s^2\widehat{u}(s,y)$$

heeft de algemene oplossing

$$\widehat{u}(s,y) = A(s)e^{-|s|y} + B(s)e^{|s|y}\ ,$$

waarin $B(s) \equiv 0$ wegens de begrensbaarheid van de oplossing. Uit $\widehat{u}(s,0) = \widehat{g}(s)$ volgt dat $A(s) = \widehat{g}(s)$. Dus

$$\widehat{u}(s,y) = e^{-|s|y}\widehat{g}(s)$$

voor elke $s \in \mathbb{R}$ en $y > 0$.

(c) Beschouw de functie $f(t) = e^{-y|t|}$ met $y > 0$. Zijn Fouriergetransformeerde is

$$\widehat{f}(s) = \frac{2y}{y^2 + s^2}$$

(zie voorbeeld 2 in paragraaf 4.3). De Fourierinversie formule geeft

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{ist} \, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(y^2 + s^2)} e^{-ist} \, ds = \int_{-\infty}^{\infty} P(s, y) e^{-ist} \, ds$$

ofwel $f(t) = \widehat{P}(t, y)$. Dus $e^{-y|s|} = f(s) = \widehat{P}(s, y)$.

(d) We hebben $\widehat{u}(s, y) = \widehat{P}(s, y)\widehat{g}(s)$. Hieruit volgt met Stelling 5.3 over het convolutieprodukt dat $u(x, y) = (P(\cdot, y) * g)(x)$, zodat

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi, y) g(x - \xi) \, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(\xi^2 + y^2)} \, g(x - \xi) \, d\xi \, .$$

Omdat g een tweemaal continu differentieerbare functie is met integreerbare $|g|, |g'|$ en $|g''|$ en P is begrensd met $P(x, y) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ als $x \to \pm\infty$ voor $y > 0$, convergeert het convolutieproduct en alle boven geformuleerde veronderstellingen over $u(x, y)$ zijn correct.

(e) Opgave 4(e) in paragraaf 6.8 impliceert dat

$$\varphi_y(\xi) = \frac{y}{\pi(\xi^2 + y^2)} \to \delta(\xi)$$

als $y \downarrow 0$, waarin $\delta(x)$ de Dirac-deltafunctie is. Dus

$$\lim_{y \downarrow 0} u(x, y) = \lim_{y \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_y(\xi) g(x - \xi) \, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) g(x - \xi) \, d\xi = g(x) \, .$$

(f) Uit deel (d) volgt dat

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(1 + (x - \xi)^2)(\xi^2 + y^2)} = \frac{y}{\pi} \left[\lim_{\xi \to \infty} F(\xi) - \lim_{\xi \to -\infty} F(\xi) \right] \, .$$

Maar

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \arctan(\mathrm{x} - \xi) = \mp\frac{\pi}{2} \quad \text{en} \quad \lim_{\xi \to \pm\infty} \arctan\left(\frac{\xi}{\mathrm{y}}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

voor $x \in \mathbb{R}$ en $y > 0$. Dus

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{y}{\pi(x^2+(1-y)^2)(x^2+(1+y)^2)}\left[(x^2+y^2-1)\pi + \frac{x^2-y^2+1}{y}\,\pi\right] \\ &= \frac{(x^2+(1-y)^2)(1+y)}{(x^2+(1-y)^2)(x^2+(1+y)^2)} \quad = \quad \frac{1+y}{x^2+(1+y)^2}\ . \end{aligned}$$

Controle: De functie

$$u(x,y) = \frac{1+y}{x^2+(1+y)^2}$$

is begrensd en willekeurig vaak differentieerbaar in (x,y) voor $x \in \mathbb{R}$ en $y > 0$. Bovendien geldt voor $x \in \mathbb{R}$ en $y > 0$ dat $u_{xx} + u_{yy} \equiv 0$ en

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}\ .$$