Fouriertheorie, uitwerking van de opgaven
paragraaf 8.5: 1,2,3 en 4 (door Yuri Kuznetsov).

Opgave 8.5.1

We zoeken een oplossing van het probleem in de vorm

$$R(x,y) = X(x)Y(y) \ .$$

Uit de randvoorwaarden volgen dan de voorwaarden

$$X'(0) = X'(L) = 0 \quad \text{en} \quad Y'(0) = Y'(H) = 0.$$

De vergelijking $\Delta R(x,y) = \lambda R(x,y)$ impliceert

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = \lambda X(x)Y(y)$$

ofwel

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

voor alle $(x,y) \in [0,L] \times [0,H]$. Dit kan alleen als beide termen in het linkerlid constant zijn:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = a \quad \text{en} \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = b$$

met zekere constanten $a, b \in \mathbb{R}$ zodat $a + b = \lambda$. We zien dus dat niet-triviale oplossingen van het probleem de produkten zijn van de niet-triviale oplossingen van de volgende 1-dimensionale problemen

$$\begin{cases} X''(x) = aX(x), \quad x \in [0,L], \\ X'(0) = X'(L) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

en

$$\begin{cases} Y''(y) = bY(y), \quad y \in [0,H], \\ Y'(0) = Y'(H) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Beschouw eerst het probleem (1). Zoals bekend worden de oplossingen van $X'' - aX = 0$ voor $a \neq 0$ gegeven door

$$X(x) = Be^{x\sqrt{a}} + Ce^{-x\sqrt{a}} \tag{3}$$

voor zekere constanten B en C. Als $a < 0$ is, is $\sqrt{a}$ een complex getal en zijn ook B en C complex. Als $a = 0$ worden de oplossingen van $X'' - aX = X'' = 0$ gegeven door

$$X(x) = B + Cx \tag{4}$$

met $B, C \in \mathbb{R}$. Welke van deze oplossingen voldoen aan de randvoorwaarden $X'(0) = X'(L) = 0$?

Als $a = 0$ leert (4)

$$C = X'(0) = X'(L) = 0$$

dus $C = 0$ en B is een willegeurig constante. Als $B \neq 0$ dan krijgen we een niet-triviale oplossing $X(x) = B$ voor alle x .

Als $a \neq 0$ leert (3)

$$\begin{array}{rcccl} \sqrt{a}(B - C) & = & X'(0) & = & 0\,, \\ B\sqrt{a}e^{L\sqrt{a}} - C\sqrt{a}e^{-L\sqrt{a}} & = & X'(L) & = & 0\,; \end{array}$$

dus $B = C$ en

$$B\sqrt{a}(e^{L\sqrt{a}} - e^{-L\sqrt{a}}) = 0\,.$$

Uit deze laatste gelijkheid volgt óf $B = 0$ (hetgeen leidt tot de triviale oplossing $X(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$) óf

$$e^{L\sqrt{a}} - e^{-L\sqrt{a}} = 0;$$

dus

$$e^{2L\sqrt{a}} = 1. \tag{5}$$

Uit de theorie van complexe getallen en e-machten weten we dat (5) impliceert dat

$$2L\sqrt{a} = 2\pi i n$$

voor een geheel getal $n \in \mathbb{Z}$. Dit getal is niet gelijk aan nul (wegens $a \neq 0$). Dus

$$a = -\frac{\pi^2 n^2}{L^2} = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \qquad \text{voor een geheel getal } \; n \neq 0\,. \tag{6}$$

Hierin kunnen we alleen positieve n nemen. Met deze a, hebben we

$$X(x) = B\left(e^{x\sqrt{a}} + e^{-x\sqrt{a}}\right) = 2B\left(\frac{e^{\frac{i\pi n}{L}x} + e^{-\frac{i\pi n}{L}x}}{2}\right) = 2B\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

waarin $B \in \mathbb{R}$ willekeurig is maar $B \neq 0$. Laten we $n = 0$ in deze formule toe, dan krijgen we de niet-triviale oplossing die bij $a = 0$ hoort.

We zien dus dat het probleem (1) niet-triviale oplossingen heeft alleen als

$$a = a_n := -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$$

met $n = 0, 1, 2, \ldots$ en dat die oplossinden veelvouden zijn van

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \; .$$

Op dezelfde manier zien we dat het probleem (2) niet-triviale oplossingen alleen heeft als

$$b = b_m := -\left(\frac{\pi m}{H}\right)^2$$

met $m = 0, 1, 2, \ldots$ en dat die oplossinden veelvouden zijn van

$$Y_m(y) = \cos\left(\frac{\pi m y}{L}\right) \; .$$

De conclusie is dat het oorspronkelijk probleem een niet-triviale oplossing $R(x, y)$ heeft dan en slechts dan als

$$\lambda = \lambda_{n,m} := -\left[\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{H}\right)^2\right] \tag{7}$$

met $n, m = 0, 1, 2, \ldots$. De bijhoorende oplossingen zijn lineaire combinaties van de functies

$$R_{j,k}(x, y) = \cos\left(\frac{\pi j x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi k y}{2}\right)$$

met (j, k) zo dat

$$\left[\left(\frac{\pi j}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{H}\right)^2\right] = \lambda_{n,m} \; .$$

Opgave 8.5.2

Zij $f(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}\|^2}$ en

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Dan

$$f(\mathbf{x}) = e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)} = e^{-x_1^2}\ e^{-x_2^2}\ e^{-x_3^2}$$

en

$$e^{-i(\mathbf{s}\cdot\mathbf{x})} = e^{-i(s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3)} = e^{-is_1x_1}\ e^{-is_2x_2}\ e^{-is_3x_3}\ .$$

Volgens definitie (250) geldt

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\mathbf{s}) &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\mathbf{s}\cdot\mathbf{x})} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-is_1x_1}\ e^{-x_1^2}\ e^{-is_2x_2}\ e^{-x_2^2}\ e^{-is_3x_3}\ e^{-x_3^2}\ dx_1dx_2dx_3 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_1x_1}\ e^{-x_1^2}\ dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_2x_2}\ e^{-x_2^2}\ dx_2\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_3x_3}\ e^{-x_3^2}\ dx_3\right) \\
&= \widehat{g}(s_1)\,\widehat{g}(s_2)\,\widehat{g}(s_3)
\end{aligned}$$

waarin $g(t) = e^{-t^2}$ voor $t \in \mathbb{R}$. Omdat $g(t) = g_0(\alpha t)$ met $g_0(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ en $\alpha = \sqrt{2} \neq 0$, hebben we

$$\widehat{g}(s) = \frac{1}{|\alpha|}\widehat{g_0}\left(\frac{s}{\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{s^2}{2\alpha^2}} = \sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}s^2}\ .$$

(Gebruik $\widehat{g_0}(s) = \sqrt{2\pi}\ g_0(s)$.) Dus

$$\widehat{f}(\mathbf{s}) = (\pi)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{4}s_1^2}\ e^{-\frac{1}{4}s_2^2}\ e^{-\frac{1}{4}s_3^2} = (\pi)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{4}(s_1^2+s_2^2+s_3^2)}\ ,$$

waaruit blijkt dat

$$\widehat{f}(\mathbf{s}) = (\pi)^{\frac{3}{2}}\ e^{-\frac{1}{4}\|\mathbf{s}\|^2}\ .$$

Opgave 8.5.3

$$\widehat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(s\cdot x)}e^{i(a\cdot x)}\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(s-a)\cdot x}\ dx = (2\pi)^n\delta(s-a)$$

(zie voorbeeld 2 op p. 233).

Opgave 8.5.4

De ladingsverdeling die bij de bewegende puntlading hoort is

$$\rho(\mathbf{r},t) = q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)\ .$$

Dus hebben we de partiële differentiaalvergelijking

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \ .$$

De Fouriertransformatie van deze vergelijking levert

$$-\|\mathbf{k}\|^2\widehat{\varphi}(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\widehat{\varphi}(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} = -4\pi q \ e^{-i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})t}$$

ofwel

$$\frac{\partial^2\widehat{\varphi}(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} + c^2\|\mathbf{k}\|^2\widehat{\varphi}(\mathbf{k}, t) = 4\pi c^2 q \ e^{-i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})t} \ . \tag{8}$$

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking is de som van de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2\widehat{\varphi}(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} + c^2\|\mathbf{k}\|^2\widehat{\varphi}(\mathbf{k}, t) = 0 \tag{9}$$

en een speciale oplossing van (8). We zoeken de speciale oplossing van (8) in de vorm

$$\widehat{\varphi}(\mathbf{k}, t) = A(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})t} \ .$$

Dit geeft

$$A(\mathbf{k})\left[c^2\|\mathbf{k}\|^2 - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2\right] = 4\pi c^2 q$$

ofwel

$$A(\mathbf{k}) = \frac{4\pi q}{\|\mathbf{k}\|^2 - \dfrac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}{c^2}} \ .$$

Dus wordt de speciale oplossing van (8) gegeven door

$$\widehat{\varphi}(\mathbf{k}, t) = \frac{4\pi q}{\|\mathbf{k}\|^2 - \dfrac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}{c^2}} \ e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})t} \ . \tag{10}$$

De algemene oplossing van (9) is $B(\mathbf{k})e^{ic\|\mathbf{k}\|t} + C(\mathbf{k})e^{-ic\|\mathbf{k}\|t}$, waarbij $B(\mathbf{k})$ en $C(\mathbf{k})$ willekeurige functies van $\mathbf{k}$ zijn. Omdat deze oplossing onafhankelijk van de lading q is, moeten $B(\mathbf{k}) \equiv 0$ en $C(\mathbf{k}) \equiv 0$ zijn.

De Fourierinversie formule (249) geeft nu

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\varphi}(\mathbf{k},t)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\,d\mathbf{k} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{4\pi q}{\|\mathbf{k}\|^2 - \dfrac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}{c^2}}\; e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})t)}\,d\mathbf{k} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega(\mathbf{k})t)}d\mathbf{k}
\end{aligned}$$

waarin

$$\Phi(\mathbf{k}) = \frac{4\pi q}{\|\mathbf{k}\|^2 - \dfrac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})^2}{c^2}} \quad \text{en} \quad \omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}\ .$$