Uitwerking van het hertentamen Fouriertheorie
18 maart 2009

Deel I

Opgave 1 (a) De Taylor reeks voor de functie $f(x) = \sqrt{1+x}$ in $x = 0$ impliceert dat

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + O(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2) \quad \text{als } x \to 0 \ .$$

Dus

$$a_n = 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = -\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

en

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0 \ .$$

Uit het limietcriterium volgt dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergeert. Maar $a_n < 0$ voor alle $n \geq 1$. Dus is de gegeven reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ook divergent.

(b) De functie

$$f : [0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$$

is continu op $[0,1)$ met $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \infty$. Zij

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \ .$$

Deze functie is continu op $[0,1)$. We hebben $g(x) > 0$ voor alle $x \in [0,1)$ en $\int_0^1 g(x)\,dx$ bestaat omdat

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^1 = 2 \ .$$

Verder geldt:

$$L = \lim_{x\uparrow 1} \frac{|f(x)|}{g(x)} = \lim_{x\uparrow 1} \frac{e^x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\uparrow 1} \frac{e^x\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \lim_{x\uparrow 1} \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} = \frac{e}{\sqrt{2}}$$

omdat de functie

$$h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$$

continu is in $x = 1$. De majorantie stelling impliceert dat de integraal $\int_0^1 f(x)\,dx$ convergeert.

Opgave 2 (a) Er geldt

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t)\,dt = 0\ .$$

Voor $n \neq 0$ geldt

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_n &= \frac{1}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t)e^{-\frac{int}{2}}dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(-t)e^{\frac{int}{2}}dt + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{\frac{int}{2}}dt \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{\frac{int}{2}}dt + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{\frac{int}{2}}dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(e^{-\frac{int}{2}} - e^{\frac{int}{2}}\right)dt \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{e^{\frac{int}{2}} - e^{-\frac{int}{2}}}{2i}\right)dt \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} t(2\pi - t)\sin\left(\frac{nt}{2}\right)dt\ .
\end{aligned}$$

Met partiële integratie krijgen we

$$\widehat{f}_n = \frac{8i(-1+(-1)^n)}{\pi n^3} = \begin{cases} \dfrac{16}{i\pi n^3} & \text{als } n = 2k+1,\ k = 0,1,2,\ldots, \\ 0 & \text{als } n = 2k,\ k = 0,1,2,\ldots\ . \end{cases}$$

(b) De functie f is 4π-periodiek, continu en stuksgewijs continu-differentieerbaar. Inderdaad, $f'(x) = 2(\pi - x)$ voor $0 < x < 2\pi$ en $f'(x) = 2(\pi + x)$ voor $-2\pi < x < 0$ met

$$\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = \lim_{x\uparrow 0} f'(x) = 2\pi \quad \text{en} \quad \lim_{x\downarrow -2\pi} f'(x) = \lim_{x\uparrow 2\pi} f'(x) = -2\pi\ .$$

De Fourierinversie stelling impliceert dat de limiet

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{n=N} \widehat{f}_n e^{\frac{inx}{2}}$$

bestaat en gelijk is aan $f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Maar

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{n=N} \widehat{f}_n e^{\frac{inx}{2}} &= \widehat{f}_0 + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\widehat{f}_{-n}e^{-\frac{inx}{2}} + \widehat{f}_n e^{\frac{inx}{2}}\right) \\
&= \frac{32}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\left(\frac{e^{\frac{i(2k+1)x}{2}} - e^{-\frac{i(2k+1)x}{2}}}{2i}\right)\ .
\end{aligned}$$

Dus

$$f(x) = \frac{32}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \, \sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right)$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Neem $x = \pi$. Dan geldt $f(\pi) = \pi^2$ en

$$\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = (-1)^k \quad \text{voor } k = 0, 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Dus

$$\pi^2 = \frac{32}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

waaruit blijkt dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \ .$$

Opgave 3 De functie $f(x) = x^4 g(x)$ met continue functie $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ is absoluut integreerbaar. Dus is de Fouriergetransformeerde $\widehat{g}(s)$ een 4 keer differentieerbare functie van s is met de 4-de afgeleide

$$\frac{d^4 \, \widehat{g}(s)}{ds^4} = (-i)^4 \int_{-\infty}^{\infty} t^4 g(t) e^{-ist} \, dt$$

waaruit volgt dat

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^4 g(t) e^{-ist} \, dt = \frac{d^4 \, \widehat{g}(s)}{ds^4} = \sqrt{2\pi}(s^4 - 6s^2 + 3) e^{-\frac{1}{2}s^2}$$

wegens $\widehat{g}(s) = \sqrt{2\pi} \, g(s)$.

Bonus De breuksplitsing geeft

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \ .$$

Hieruit volgt voor de partiële sommen met $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{n=2}^{k} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{(k+1)^2} \ . \end{aligned}$$

Dus

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \lim_{k \to \infty} A_k = \frac{1}{4} - \lim_{k \to \infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{4} \ .$$

Deel II

Opgave 1 We schrijven

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)h(x-t)\, dt = (g*h)(x) \ ,$$

waarin $h(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ en $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{als } |t| > 1. \end{cases}$
Omdat beide functies g en h begrensd, continu en absoluut integreerbaar zijn, geldt voor het convolutieprodukt $f = g * h$ dat

$$\widehat{f}(s) = \widehat{g}(s)\widehat{h}(s) \ .$$

Het is bekend dat

$$\widehat{h}(s) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}s^2} \quad \text{en} \quad \widehat{g}(s) = \begin{cases} \frac{\sin s}{s} & \text{als } s \neq 0, \\ 1 & \text{als } s = 0. \end{cases}$$

Dus

$$\widehat{f}(s) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\, \frac{e^{-\frac{1}{2}s^2}\sin s}{s} & \text{als } s \neq 0, \\ \sqrt{2\pi} & \text{als } s = 0. \end{cases}$$

Opgave 2 (a) Eerst onderzoeken we of er niet-triviale oplossingen zijn van

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{4}u \qquad \text{voor } \ 0 < x < \pi,\ t > 0, \tag{1}$$

van de vorm $u(x,t) = X(x)T(t)$. We moeten dus hebben

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} - \frac{1}{4} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

voor alle $0 < x < \pi$ en $t > 0$. Dit kan alleen maar als beide leden constant zijn: d.w.z. als voor een zekere constante $\lambda \in \mathbb{R}$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \tag{2}$$
$$\dot{T}(t) - \left(\lambda + \frac{1}{4}\right) T(t) = 0. \tag{3}$$

Zoals bekend worden alle oplossingen van (2) voor $\lambda \neq 0$ gegeven door

$$X(x) = Ae^{x\sqrt{\lambda}} + Be^{-x\sqrt{\lambda}} \tag{4}$$

met $A, B \in \mathbb{C}$. Als $\lambda = 0$ worden alle oplossingen van (2) gegeven door

$$X(x) = A + Bx \tag{5}$$

met $A, B \in \mathbb{R}$. Om aan de randvoorwaarde

$$\text{(i)} \quad u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \quad \text{voor alle} \quad t \geq 0$$

te voldoen moeten we hebben $X(0) = X'(\pi) = 0$. Het probleem

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X'(\pi) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

heeft geen niet-triviale oplossingen as $\lambda = 0$ (in dit geval impliceren de randvoorwaarden dat $A = B = 0$ in (5)). Als $\lambda \neq 0$ leert (4)

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ Ae^{\pi\sqrt{\lambda}} - Be^{-\pi\sqrt{\lambda}} &= 0, \end{aligned}$$

waaruit volgt $B = -A$ en

$$A\left(e^{\pi\sqrt{\lambda}} + e^{-\pi\sqrt{\lambda}}\right) = 0.$$

Niet-triviale oplossingen ontstaan dus als

$$e^{2\pi\sqrt{\lambda}} = -1$$

ofwel

$$2\pi\sqrt{\lambda} = in\pi$$

voor $n = 2k+1$ met $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Hieruit blijkt dat

$$\lambda = -\frac{(2k+1)^2}{4} \quad \text{voor} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Met deze λ hebben we

$$X(x) = A\left(e^{x\sqrt{\lambda}} - e^{-x\sqrt{\lambda}}\right) = 2iA\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right)$$

waarin $A \neq 0$ zuiver imaginair is. Het probleem (6) heeft dus de niet-triviale oplossingen

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right)$$

dan en slechts dan als

$$\lambda = \lambda_k := -\frac{(2k+1)^2}{4} \tag{7}$$

met $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Nu wordt (3)

$$\dot{T}(t) = \frac{1-(2k+1)^2}{4}\,T(t)$$

waarin $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Deze differentiaalvergelijking heeft de niet-triviale oplossingen

$$T_k(t) = e^{-\frac{1}{4}((2k+1)^2-1)t} .$$

Dus voldoet de functie

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = e^{-\frac{1}{4}(k^2-1)t} \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)$$

zowel aan de partiële differentiaalvergelijking (1) als aan de randvoorwaarden (i). We krijgen de algemene oplossing is van (1) die aan randvoorwaarden (i) voldoet door superposities te nemen van de basisfuncties $u_n(x,t)$, n.l.

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \; e^{-\frac{1}{4}[(2k+1)^2-1]t} \sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) . \tag{8}$$

(b) De functie (8) voldoet ook nog aan beginvoorwaarde

$$\text{(ii)} \quad u(x,0) = x(2\pi - x) \quad \text{voor alle} \quad x \in [0,\pi]$$

als

$$x(2\pi - x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \; \sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) \quad \text{voor alle} \quad x \in [0,\pi],$$

d.w.z. precies dan als we voor de coëfficiënten b_k de Fouriercoëfficiënten nemen van de oneven periodieke functie $f(x)$ die op het interval $[0, 2\pi]$ gelijk is aan $x(2\pi - x)$. Opgave 2(b) in Deel I geeft

$$b_k = \frac{32}{\pi(2k+1)^3} \quad \text{voor} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

(c) Uit (8) blijkt dat

$$u(x,t) = b_0 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + R(x,t)$$

waarin

$$R(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \; e^{-\frac{1}{4}[(2k+1)^2-1]t} \sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) .$$

Wegens $|\sin\xi| \leq 1$ voor alle $\xi \in \mathbb{R}$ en $(2k+1)^2 - 1 \geq 8$ voor alle $k \geq 1$, geldt

$$\begin{aligned}
|R(x,t)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \; e^{-\frac{1}{4}[(2k+1)^2-1]t} \left|\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \; e^{-\frac{1}{4}[(2k+1)^2-1]t} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \; e^{-2t}
\end{aligned}$$

ofwel

$$|R(x,t)| \le Ce^{-2t} \quad \text{voor alle } x \in [0,\pi] \text{ en } t \ge 0,$$

waarin $C = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Omdat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergent is, hebben we

$$C < \infty \ .$$

Hieruit volgt dat $\lim_{t\to\infty} |R(x,t)| = 0$ voor alle $x \in [0,\pi]$. Dus

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = b_0 \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{32}{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

voor alle $x \in [0,\pi]$.

Bonus Beschouw

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - a^2) f(x)\, dx \tag{9}$$

waarin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue testfunctie is.

Als x van $-\infty$ naar ∞ loopt, dan loopt de variabele $y = x^2 - a^2$ van ∞ naar $-a^2$ en dan terug naar ∞. Dus geeft de substitutie van variabelen in (9)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - a^2) f(x)\, dx &= \int_{-a^2}^{\infty} \delta(y) \left[f(\sqrt{y+a^2}) + f(-\sqrt{y+a^2}) \right] \frac{dy}{2\sqrt{y+a^2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{y+a^2}} \left[f(\sqrt{y+a^2}) + f(-\sqrt{y+a^2}) \right] \Bigg|_{y=0} \\
&= \frac{1}{2a} (f(a) + f(-a)) \ .
\end{aligned}$$

Maar ook

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} [\delta(x+a) + \delta(x-a)] f(x)\, dx = \frac{1}{2a} (f(a) + f(-a)) \ .$$

Dus geldt voor iedere testfunctie f dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - a^2) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} [\delta(x+a) + \delta(x-a)] f(x)\, dx$$

ofwel

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x+a) + \delta(x-a)] \ .$$