Meetkunde op variëteiten

Inhoudsopgave

Analyse in meer veranderlijken: een rappel

In deze korte paragraaf memoreren we enkele begrippen en resultaten uit de analyse, die we vaak zullen gebruiken.

Een afbeelding f van een open deel U van $\mathbb{R}^m$ naar $\mathbb{R}^n$ heet *differentieerbaar te* $a \in U$ als er een lineaire transformatie $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ bestaat met de eigenschap dat

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \sigma(h)\|}{\|h\|} = 0$$

De transformatie σ is uniek, heet de *afgeleide* van f te a en wordt genoteerd met $D_a f$. De afbeelding $x \mapsto f(a) + \sigma(x-a)$ is de beste eerste orde benadering f te a.

Is f in ieder punt van U differentieerbaar, dan hebben we dus een matrixwaardige afbeelding $Df : U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$; de coëfficiënten hiervan zijn f's eerste orde partiële afgeleiden. We zeggen dat f een C^1-*afbeelding* is als bovendien Df continu is. En met induktie: f heet een C^k-*afbeelding* ($k \geq 2$) als Df een C^{k-1}-afbeelding is. Om dit ook voor $k = 1$ te laten gelden, spreken we af dat C^0 staat voor continu. Een afbeelding is C^k precies dan als al zijn partiële afgeleiden tot op orde k bestaan en continu zijn. Een C^∞-*afbeelding* is een afbeelding die C^k is voor alle k.

STELLING 0.1 (Kettingregel). *Zij f een afbeelding van een open deel U van $\mathbb{R}^m$ naar een open deel V van $\mathbb{R}^n$ en g een afbeelding van V naar $\mathbb{R}^p$. Als f differentieerbaar is te $a \in U$ en g differentieerbaar te $b := f(a)$, dan is gf differentieerbaar te a en er geldt $D_a(gf) = D_b g D_a f$.*

Hieraan zien we direkt dat als f en g C^k zijn, gf dat ook is.

Een bijectie f tussen twee open delen U en V van $\mathbb{R}^m$ met de eigenschap dat f en f^{-1} C^k-afbeeldingen zijn heet een C^k-*diffeomorfisme*. Is $k \geq 1$, dan volgt uit de kettingregel dat voor iedere $a \in U$, de afgeleide $D_a f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ inverteerbaar is met inverse $D_b(f^{-1})$, waar $b = f(a)$. De inverse funktiestelling geeft een lokale omkering:

STELLING 0.2 (Inverse funktiestelling). *Laat f een $C^{k \geq 1}$ afbeelding zijn van een open deel U van $\mathbb{R}^m$ naar $\mathbb{R}^m$ en $a \in U$. Als $D_a f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ niet-singulier is, dan is er een open omgeving van a in U die door f C^k-diffeomorf op een open deel van $\mathbb{R}^m$ wordt afgebeeld.*

De impliciete funktiestelling kan verkregen worden als gevolg van de inverse funktiestelling: schrijf $\mathbb{R}^{m+n}$ als produkt $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ en noteer zijn punten overeenkomstig: $x = (x', x'')$. Laat f een $C^{k \geq 1}$-afbeelding zijn van een open deel U van $\mathbb{R}^{m+n}$ naar $\mathbb{R}^n$ en laat $a = (a', a'') \in U$. Onderstel dat de beperking van $D_a f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^n)$ tot $0 \times \mathbb{R}^n$ (dus $v \in \mathbb{R}^n \mapsto D_a f(0, v) \in \mathbb{R}^n$) niet-singulier is. Dan voldoet $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^{m+n}$, $\tilde{f}(x', x'') := (x', f(x', x''))$, aan de voorwaarden van de inverse funktiestelling te a en dus zal $\tilde{f}$ een omgeving $W \ni a$ C^k-diffeomorf afbeelden op een omgeving van $(a', f(b))$. Zonder bezwaar kunnen we aannemen dat de laatste een produktomgeving $W' \times V$ is. De lokale inverse van $\tilde{f}$ is dan een C^k-diffeomorfisme $\tilde{g} : W' \times V \cong W$, welke de gedaante $\tilde{g}(x', y) = (x', g(x', y))$ zal hebben. Dus $(x', x'') \in W$ correspondeert met $(x', y) \in W' \times V$ precies dan als $y = f(x', x'')$, of equivalent daarmee, als $x'' = g(x', y)$. In het bijzonder:

— $f\tilde{g}(x', y) = y$ en
— de doorsnede van W met iedere niveaufiguur $f^{-1}y$, $y \in V$, is de grafiek is van de afbeelding $x' \in W' \mapsto g(x', y) \in \mathbb{R}^n$ (zo wordt deze afbeelding *impliciet* beschreven, vandaar de naam).

De eerste eigenschap vertelt ons dat als we f samenstellen met een geschikt gekozen diffeomorfisme (te weten $\tilde{g}$), we een projectie krijgen (namelijk die van $W' \times V$ op V). Vanuit dat gezichtspunt ligt de volgende formulering meer voor de hand:

GEVOLG 0.3. *Laat f een $C^{k\geq 1}$-afbeelding zijn van een open deel U van $\mathbb{R}^{m+n}$ naar $\mathbb{R}^n$ en laat $a \in U$. Onderstel dat $D_a f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^n)$ surjectief is. Dan bestaat een diffeomorfisme h van een open omgeving van a in U op een open deel van $\mathbb{R}^{m+n}$ zodat fh^{-1} op zijn definitiegebied de projectie $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is.*

BEWIJS. Omdat $D_a f$ surjectief is bestaan er n basisvectoren $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ van $\mathbb{R}^{m+n}$ wiens beelden onder $D_a f$ een basis van $\mathbb{R}^n$ vormen. Als $\sigma : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ gedefinieerd is door een permutatie van basisvectoren die de laatste n basisvectoren op $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ afbeeldt, dan is $f\sigma$ als boven. Is $\tilde{g}$ het hierbij gevonden C^k-diffeomorfisme, dan is dus $f\sigma\tilde{g}$ op zijn definitiegebied de projectie. We nemen voor h de inverse van $\sigma\tilde{g}$. ☐

Er is analoog resultaat voor het geval van een injectieve afgeleide:

PROPOSITIE 0.4. *Laat f een $C^{k\geq 1}$-afbeelding zijn van een open deel U van $\mathbb{R}^m$ naar $\mathbb{R}^{m+n}$ en laat $a \in U$. Onderstel dat $D_a f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m+n})$ injectief is. Dan bestaat een diffeomorfisme h van een open deel van $f(a) \in \mathbb{R}^{m+n}$ op een omgeving van $(a, 0)$ in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ zodat hf de inclusie $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \times 0 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ is.*

BEWIJS. Omdat $D_a f$ injectief is heeft de matrix van $D_a f$ m lineair onafhankelijke rijen, zeg met rangnummers $i_1, \ldots, i_m$. Laat $\sigma : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ gedefinieerd zijn door een permutatie van basisvectoren met de eigenschap dat die $e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}$ op $e_1, \ldots, e_m$ afbeeldt. Dit maakt dat de samenstelling van $\sigma D_a f = D_a(\sigma f)$ met de projectie $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ niet-singulier is. Laat $F : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ gedefinieerd zijn door $F(x, y) := \sigma f(x) + (0, y)$. Dan is $D_{a,0}F(u, v) = \sigma D_a f(u) + (0, v)$, en we zien hieraan dat ook $D_{a,0}F$ niet-singulier is. Toepassen van de inverse funktiestelling geeft dat F een open omgeving van $(a, 0)$ in $U \times \mathbb{R}^n$ C^k-diffeomorf op een omgeving van $f(a)$ afbeeldt. Noemen we de inverse van dit diffeomorfisme G, dan voldoet $h := G\sigma$: immers $hf(x) = G\sigma f(x) = GF(x, 0) = (x, 0)$. ☐

Samenvattend: als een $C^{k\geq 1}$-afbeelding f van een open omgeving van $a \in \mathbb{R}^p$ naar $\mathbb{R}^q$ te a een afgeleide heeft van maximale rang, dan gaat f na samenstelling met een zeker C^k-diffeomorfisme te a (als $p \geq q$) resp. te $f(a)$ (als $p \leq q$) over in een lineaire projectie resp. een lineaire inclusie.

HOOFDSTUK 1

De taal der variëteiten

1. Topologische variëteiten

DEFINITIE 1.1. Een *m-variëteit* (m een geheel getal ≥ 0) is een Hausdorffruimte die lokaal homeomorf is met $\mathbb{R}^m$ (d.w.z. ieder punt van de ruimte heeft een omgeving die homeomorf is met een open deel van $\mathbb{R}^m$). We noemen m de *dimensie* van M.

Voordat we voorbeelden noemen, eerst een paar algemene opmerkingen. De ruimte $\mathbb{R}^m$ is zoals bekend Hausdorffs. Dus $\mathbb{R}^m$ is een m-variëteit.

Een bescheiden, maar nuttige generalisatie van dit voorbeeld is het geval van een eindigdimensionale reële vectorruimte V van dimensie m. De keuze van een basis van V geeft een isomorfisme van vectorruimten $\kappa : V \cong \mathbb{R}^m$. We dragen hiermee de topologie van $\mathbb{R}^m$ over op V, d.w.z., een deel van V is open voor deze topologie precies dan als zijn beeld onder f open is in $\mathbb{R}^m$. Dit maakt van f een homeomorfisme en zo wordt V een m-variëteit. De aangegeven topologie op V is onafhankelijk van de basiskeuze; dit volgt uit het feit dat voor een andere keus $\kappa' : V \cong \mathbb{R}^m$, de niet-singuliere transformatie $\kappa'\kappa^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ een homeomorfisme is en dat derhalve $\kappa' = (\kappa'\kappa^{-1})\kappa$ dat ook moet zijn. Er is trouwens een karakterisering die het zonder basiskeus stellen kan: het is de grofste topologie op V waarvoor alle lineaire funkties $V \to \mathbb{R}$ continu zijn.

De Hausdorffeigenschap is erfelijk voor deelruimten. Hieruit volgt meteen dat een open deel van een m-variëteit zelf ook een m-variëteit is; i.h.b. is ieder open deel van $\mathbb{R}^m$ een m-variëteit.

Er is een topologisch dimensiebegrip dat voor een niet-leeg open deel van $\mathbb{R}^m$ inderdaad m oplevert. (De definitie is betrekkelijk eenvoudig, het bewijs beslist niet.) Hieruit volgt dat een niet-lege m-variëteit niet tegelijk een n-variëteit is als $n \neq m$.

Nu wat interessantere voorbeelden.

VOORBEELDEN 1.2. (i) De m-sfeer $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \,|\, \|x\| = 1\}$. Voor $i = 0, \ldots, m$ en $\epsilon \in \{+, -\}$ hebben we een halfsfeer $U_{i,\varepsilon} := \{x \in S^m \,\|\, \epsilon x^i > 0\}$. Samen vormen ze een open overdekking van S^m. De afbeelding $U_{i,\varepsilon} \to \mathbb{R}^m$ die de i^e coördinaat weglaat is een homeomorfisme op de open eenheidsbol $B^m \subset \mathbb{R}^m$. Dus S^m is een m-variëteit.

(ii) De reëel-projectieve ruimte P^m, gedefinieerd als het quotïent van S^m volgens antipodale identifikatie. Die is Hausdorffs (ga na). Onder de quotïentvormende afbeelding $S^m \to P^m$ worden $U_{i,+}$ en $U_{i,-}$ homeomorf op hetzelfde open deel U_i van P^m afgebeeld. Dus P^m is een m-variëteit.

(iii) Zij f een C^1-afbeelding van een open deel U van $\mathbb{R}^{m+n}$ naar $\mathbb{R}^n$. Laat $b \in \mathbb{R}^n$ en onderstel dat voor iedere $a \in f^{-1}b$, Df_a surjectief is. Dan volgt uit

Gevolg 0.3 van de impliciete funktiestelling dat $f^{-1}b$ een m-variëteit is. Hieronder valt trouwens voorbeeld (i): neem $f(x) := \|x\|^2$.

(iv) Een voorbeeld voor later: de *Grassmannvariëteiten*, die we hier presenteren d.m.v. een opgave. Het betreft een generalisatie van voorbeeld (ii). Zij V een reële vectorruimte van dimensie $n+k$ en laat $Gr_n(V)$ de collectie zijn van al zijn n-dimensionale deelruimten; dus iedere n-dimensionale deelruimte W van V bepaalt een element $[W]$ van $Gr_n(V)$. We geven deze verzameling een topologie als volgt. Is gegeven een geordende basis $E := (e_1, \dots, e_{n+k})$ van V, dan is voor iedere $n \times k$-matrix $(\sigma_i^{n+j})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq k}$, de verzameling van n vectoren, $\{e_i + \sum_{j=1}^{k} \sigma_i^{n+j} e_{n+j}$ lineair onafhankelijk en zo vinden we dus een afbeelding $u_E : \mathbb{R}^{nk} \to Gr_n(V)$.

OPGAVE 1. (a) Bewijs dat u_E een injectie is waarvan het beeld bestaat uit alle $[W']$ die het opspansel van de laatste k basisvectoren $e_{n+1}, \dots, e_{n+k}$ slechts in de oorsprong treffen.

(b) We verklaren een deel $\Omega \subset Gr_n(V)$ open als $j_E^{-1}\Omega$ open is in $\mathbb{R}^{nk}$ voor alle geordende bases van V. Bewijs dat zo een topologie op $Gr_n(V)$ gedefinieerd is.

(c) Bewijs dat j_E een homeomorfisme is van $\mathbb{R}^{nk}$ op een open deel van $Gr_n(V)$.

(d) Bewijs vervolgens dat $Gr_n(V)$ Hausdorffs is. Concludeer: $Gr_n(V)$ is een nk-variëteit.

(e) Bewijs dat $Gr_n(V)$ homeomorf is met $Gr_k(V)$. (Aanwijzing: kies een positief definiet inprodukt voor V.)

(f) Laat zien dat $Gr_1(V)$ homeomorf is met P^k.

(v) Laat M de ruimte zijn verkregen uit twee exemplaren van $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} \times 1$ en $\mathbb{R} \times 2$ door $(t, 1)$ en $(t, 2)$ te identificeren voor $t \neq 0$. Noem we het beeld van $(0, i)$ in M: 0_i, dan is het complement van $\{0_1, 0_2\}$ in M te vereenzelvigen met $\mathbb{R} - \{0\}$. Een omgevingsbasis van 0_i is van de vorm $\{(-\epsilon, 0) \cup \{0_i\} \cup (0, \epsilon)\}_{\epsilon > 0}$. Het is dan duidelijk dat iedere omgeving van 0_1 iedere omgeving van 0_2 treft: M is niet Hausdorffs. Maar M is wel lokaal homeomorf met $\mathbb{R}^m$.

Kaart en atlas. Zij M een m-variëteit. Een *kaart* voor M is een paar (U, κ), waar U een open deel is van M en $\kappa : U \to \mathbb{R}^m$ een homeomorfisme van U op een open deel van $\mathbb{R}^m$. Een term die welgekozen is, want hiermee wordt een deel van M 'in kaart gebracht'. Is een tweede kaart (U', κ') gegeven, dan hebben we bij $U \cap U'$ twee kaarten; de afbeelding

$$\kappa' \kappa^{-1} : \kappa(U \cap U') \to \kappa'(U \cap U')$$

is een homeomorfisme tussen open delen van $\mathbb{R}^m$. We noemen dit homeomorfisme een *verkaarting*. Is gegeven $p \in M$, dan verstaan we onder een *kaart te* p een kaart waarvan het definitiegebied p bevat.

Een *atlas* voor M is een collectie kaarten $\mathcal{A} = (U_\alpha, \kappa_\alpha)_\alpha$ voor M waarvoor $\{U_\alpha\}_\alpha$ M overdekt. Zijn bij de atlas ook alle verkaartingen gegeven, dan laat M zich daaruit reconstrueren op in wezen dezelfde manier als de globe uit een wereldatlas: zij $\tilde{M}$ de disjunkte vereniging van de open delen $\kappa_\alpha(U_\alpha)$ van $\mathbb{R}^m$ en laat M hieruit ontstaan door identifikaties: $a \in \kappa_\alpha(U_\alpha)$ wordt met $b \in \kappa_\beta(U_\beta)$ geïdentificeerd als in feite $a \in \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ en $b \in \kappa_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ en $\kappa_\beta \kappa_\alpha^{-1}(a) = b$.

2. Gladde variëteiten

Laat gegeven zijn een m-variëteit M. Een atlas $\mathcal{A} = (U_\alpha, \kappa_\alpha)_\alpha$ voor M heet een C^k-*atlas* als alle verkaartingen van deze atlas C^k-afbeeldingen zijn. Omdat met iedere verkaarting $\kappa_\beta\kappa_\alpha^{-1}$ ook zijn inverse $\kappa_\alpha\kappa_\beta^{-1}$ een verkaarting is volgt dan dat alle verkaartingen C^k-diffeomorfismen zijn.

VOORBEELDEN 2.1. De atlas die we in voorbeelden 1.2-i, ii en iv gaven zijn alle C^∞-atlassen. Nemen we bij voorbeeld 1.2-iii de atlas verkregen door toepassing van de impliciete funktiestelling, dan is dit een C^k-atlas.

Een C^k-atlas $\mathcal{A}$ bepaalt een differentieerbaarheidsbegrip voor $\mathbb{R}$-waardige funkties gedefinieerd op een open deel van M: zulk een funktie $f : U \to \mathbb{R}$ noemen we een *C^k-funktie t.o.v. $\mathcal{A}$* als voor ieder van zijn kaarten $(U_\alpha, \kappa_\alpha)$, $f\kappa_\alpha^{-1} : \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U) \to \mathbb{R}$ een C^k-funktie is.

PROPOSITIE 2.2. *Laat $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ C^k-atlassen zijn voor de m-variëteit M. Dan zijn equivalent:*

(i) *$\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ bepalen hetzelfde begrip C^k-funktie,*
(ii) *$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ is een C^k-atlas.*

BEWIJS. Laat aan (i) voldaan zijn. We moeten inzien dat bij een kaart (U, κ) uit $\mathcal{A}$ en een kaart (V, λ) uit $\mathcal{B}$ de verkaartingen $\lambda\kappa^{-1}$ en $\kappa\lambda^{-1}$ C^k zijn. Nu is iedere component $\lambda_i : V \to \mathbb{R}$ van λ een C^k-funktie voor $\mathcal{B}$. Dus ook één voor $\mathcal{A}$. Dat betekent dat $\lambda_i\kappa^{-1}$ C^k is $(i = 1, \dots, n)$ en dus dat $\lambda\kappa^{-1}$ C^k is. Evenzo geldt dat voor $\kappa\lambda^{-1}$.

Doe zelf de implikatie (ii)$\Rightarrow$(i). □

Als aan de equivalente eigenschappen van de vorige propositie is voldaan zeggen we dat de atlassen in kwestie *C^k-equivalent* zijn. Uit eigenschap (i) blijkt dat het hier inderdaad een equivalentierelatie betreft. De propositie maakt ook duidelijk dat de vereniging van alle C^k-atlassen die behoren tot één C^k-equivalentieklasse zelf een C^k-atlas is (dat is dus een maximale).

DEFINITIE 2.3. Een *C^k-structuur* op een variëteit M is het gegeven zijn van een equivalentieklasse van C^k-atlassen op M. Of wat op hetzelfde neer komt: het gegeven zijn van een *maximale* C^k-atlas op M. Een variëteit voorzien van een C^k-structuur noemen we een *C^k-variëteit*. Als $k = \infty$, dan spreken we kortweg van een *gladde variëteit* (maar zie onze Conventie 2.8). Een kaart van een C^k-variëteit zal altijd ondersteld gekozen te zijn uit zijn C^k-atlas, tenzij anders gezegd wordt.

Dus S^m en P^m zijn op natuurlijke manier gladde variëteiten. Is M gegeven als in Voorbeeld 1.2-iii, dan is M op natuurlijke manier een C^k-variëteit.

Het is duidelijk dat een C^k-variëteit beschouwd kan worden als een C^l-variëteit als $l < k$. Veel minder duidelijk (maar waar: het is een stelling van H. Whitney) is dat een omkering geldt: een maximale $C^{k\geq 1}$-atlas bevat altijd een maximale C^∞-atlas (zij het dat er in het algemeen meer dan één is). Echter, R. Kirby en L. Siebenmann (1968) hebben voorbeelden gegeven van variëteiten die geen C^1-atlas bezitten! Gladde variëteiten blijken de juiste context te bieden waarin de meeste resultaten uit de analyse in meer veranderlijken zijn uit te drukken. Die context dwingt ons soms bekende resultaten anders, in de regel meetkundiger, te formuleren, waardoor ze vaak eenvoudiger lijken te worden. Maar de belangrijkste reden om ze in te voeren is dat ze zich op natuurlijke wijze binnen en buiten de wiskunde aan ons voordoen.

OPGAVE 2. Laat zien dat een produkt van twee C^k-variëteiten op natuurlijke manier een C^k-variëteit is.

Differentieerbare afbeeldingen. We weten wat het betekent dat een $\mathbb{R}$-waardige funktie op een C^k-variëteit een C^k-funktie is. Het is nu een kleine stap om vast te leggen wat we onder een C^k-afbeelding tussen zulke variëteiten moeten verstaan.

DEFINITIE 2.4. Laat $f : M \to N$ een continue afbeelding zijn tussen C^k-variëteiten. We zeggen dat f een C^k-afbeelding is als voor iedere kaart (U, κ) van M en iedere kaart (V, λ) van N, de samenstelling $\lambda f \kappa^{-1}$ (die dus gaat van het open deel $\kappa(U \cap f^{-1}V)$ van $\mathbb{R}^{\dim M}$ naar $\mathbb{R}^{\dim N}$) een C^k-afbeelding is. We noemen f een C^k-diffeomorfisme als f een bijectie is met zowel f als f^{-1} C^k. Bestaat een C^k-diffeomorfisme van M op N, dan heten M en N *C^k-diffeomorf*. Voor $k = \infty$ spreken we ook wel eenvoudig van een *diffeomorfisme* resp. *diffeomorf*.

Uit de definitie volgt dat iedere kaart (U, κ) van een C^k-variëteit een C^k-diffeomorfisme van U op $\kappa(U)$ geeft.

OPGAVE 3. Bewijs als twee $C^{k\geq 1}$-variëteiten C^k-diffeomorf zijn, ze gelijke dimensie hebben (zonder gebruik te maken van het hier onbewezen feit dat dimensie een topologisch begrip is).

OPGAVE 4. Bewijs dat als $f : M \to N$ en $g : N \to P$ C^k-afbeeldingen zijn tussen C^k-variëteiten, de samenstelling $gf : N \to P$ ook C^k is.

OPGAVE 5. De verzameling $n \times n$-matrices van determinant 1 vormt een groep onder samenstelling, de *speciale lineaire groep* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Bewijs dat deze groep een gladde variëteit is en bepaal zijn dimensie. Bewijs verder dat de afbeelding $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$, een differentieerbare afbeelding is. Doe hetzelfde voor de orthogonale groep $\mathrm{SO}(n)$. (Dit zijn voorbeelden van z.g. Liegroepen: een *Liegroep* is een gladde variëteit G die tegelijk ook de structuur heeft van een groep en wel zo dat de afbeelding $(g, h) \in G \times G \mapsto gh^{-1} \in G$ differentieerbaar is.

H. Whitney heeft laten zien dat twee gladde variëteiten die C^1-diffeomorf zijn vanzelf ook C^∞-diffeomorf zijn. Dit is niet meer waar als ze slechts homeomorf zijn: J. Milnor gaf in de jaren vijftig voorbeelden van gladde variëteiten die homeomorf, maar niet diffeomorf, zijn met S^7.

DEFINITIE 2.5. Gegeven een C^k-variëteit N van dimensie n, dan heet een deelverzameling $M \subset N$ een *C^k-deelvariëteit van dimensie m* als ieder punt van M bevat is in het definitiegebied van een kaart (U, κ) met de eigenschap dat $M \cap U = \kappa^{-1}(\mathbb{R}^m \times 0)$. (Voor $k = \infty$ spreken we ook van een gladde deelvariëteit.)

Hier is blijkbaar $m \leq n$ en is $\mathbb{R}^n$ is geschreven als $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. De definitie zegt dat het diffeomorfisme κ van U op $\kappa(U)$, $M \cap U$ op $\kappa(U) \cap (\mathbb{R}^m \times 0))$ afbeeldt. Losweg gezegd, lokaal ligt M in N zoals $\mathbb{R}^m \times 0$ in $\mathbb{R}^n$. De kaarten in bovenstaande definitie kunnen we beperken tot M, waarmee we homeomorfismen van open delen van M op open delen van $\mathbb{R}^m$ krijgen. Dus M is een variëteit van dimensie m. In feite is de gevonden collectie kaarten een C^k-atlas en dat maakt dat M zelfs een C^k-variëteit is.

VOORBEELD 2.6. Zij f een $C^{k\geq 1}$ afbeelding van een open deel U van $\mathbb{R}^{m+n}$ naar $\mathbb{R}^n$ en zij $b \in \mathbb{R}^n$ zo, dat dat de afgeleide van f in ieder punt van $f^{-1}b$ rang n heeft. Dan volgt uit 0.3 dat $f^{-1}b$ een C^k-deelvariëteit is van U van dimensie m. Passen we dit toe op $U = \mathbb{R}^{m+1}$ en $f(x) := \|x\|^2$, dan vinden we dat S^m een deelvariëteit is van $\mathbb{R}^{m+1}$.

OPGAVE 6. Bewijs dat voor $m \leq n$, S^m een gladde deelvariëteit van S^n is als we S^m opvatten als $S^n \cap (\mathbb{R}^{m+1} \times 0)$. Concludeer dat evenzo P^m opgevat kan worden als gladde deelvariëteit van P^n.

OPGAVE 7. Bewijs dat $\mathrm{SO}(n)$ een gladde deelvariëteit is van $\mathrm{SL}(n)$. (Aanwijzing: beschouw de afbeelding van $\mathrm{SL}(n)$ naar de symmetrische $n \times n$-matrices gedefinieerd door $\sigma \mapsto \sigma^*\sigma$.)

De vraag komt op of iedere C^k-variëteit diffeomorf is met een C^k-deelvariëteit van een $\mathbb{R}^N$. Het antwoord hierop luidt in wezen ja, dus C^k-variëteiten zijn minder abstract dan misschien gevreesd werd (we komen hierop nog terug). De reden om niet van meet af aan ons tot deelvariëteiten van een $\mathbb{R}^N$ te bepalen is onder meer dat het meeslepen van een omringende $\mathbb{R}^N$ alleen maar ballast is en vooral een sta-in-de-weg bij de ontwikkeling van de theorie (nog afgezien van het feit dat een realisatie als deelvariëteit van een $\mathbb{R}^N$ vaak niet op natuurlijke manier voorhanden is).

TERZIJDE 2.7. Een *(gladde) knoop* is een gladde deelvariëteit van $\mathbb{R}^3$ die diffeomorf is met S^1. De knopentheorie houdt zich onder meer bezig met de vraag wanneer twee knopen 'in wezen gelijk' zijn. Dat laatste is op verschillende manieren te formaliseren, één ervan is te zeggen dat $K \subset \mathbb{R}^3$ en $K' \subset \mathbb{R}^3$ equivalent zijn als er een diffeomorfisme van $\mathbb{R}^3$ op $\mathbb{R}^3$ bestaat dat K in K' overvoert. Het is trouwens gebruikelijker om knopen te beschouwen als deelvariëteiten van S^3 (door aan $\mathbb{R}^3$ een 'punt op oneindig' toe te voegen); dat heeft een aantal voordelen en voor de belangrijke vragen maakt de overgang op S^3 weinig uit. De knopentheorie is nauw verweven met de groepentheorie en de niet-commutatieve algebra. Ze kent fraaie, diepe stellingen. Opmerkelijk is dat recente ontwikkelingen geïnspireerd zijn door de quantumveldentheorie.

CONVENTIE 2.8. *In het vervolg zullen we ons beperken tot situaties waarbij variëteiten glad zijn en afbeeldingen daartussen willekeurig vaak differentieerbaar. Vandaar dat we voortaan van variëteiten en afbeeldingen tussen variëteiten stilzwijgend zullen onderstellen dat ze C^∞ zijn, tenzij we uitdrukkelijk anders vermelden.*

Een diffeomorfisme of een $\mathbb{R}$-waardige funktie op een variëteit is dus van nu af aan C^∞. (Waar dat van belang kan zijn zullen we dat nog wel eens benadrukken.)

3. Raakruimte

We weten nu wat we verstaan onder een (differentieerbare) afbeelding $f : M \to N$ tussen (gladde) variëteiten, maar wat we nog missen is het begrip afgeleide: voor iedere $p \in M$ zouden we een lineaire afbeelding $D_p f$ willen hebben die op deze naam aanspraak mag maken. Die moet natuurlijk van een vectorruimte naar een vectorruimte gaan en de vraag die zich dan direkt al aandient is: welke vectorruimten? Het antwoord hierop zal zijn: van de raakruimte van M te p naar de raakruimte van N te $f(p)$. Wat ons verplicht tegelijk het begrip raakruimte in te voeren.

We beginnen met een discussie in $\mathbb{R}^n$. Is γ een kromme in $\mathbb{R}^n$, d.w.z. een (differentieerbare) afbeelding van een open interval I naar $\mathbb{R}^n$, dan hebben we voor iedere $t \in I$ de afgeleide van γ te t te geven als een vector:

$$\dot\gamma(t) := \begin{pmatrix} \dot\gamma^1(t) \\ \dot\gamma^2(t) \\ \dots \\ \dot\gamma^n(t) \end{pmatrix},$$

waar natuurlijk $\dot{\gamma}^i(t)$ de afgeleide is van γ^i te t. De Newtoniaanse notatie wil suggereren dat we $\dot{\gamma}(t)$ opvatten als een snelheidsvector die in $\gamma(t)$ aangrijpt. Is nu gegeven een (gladde) deelvariëteit $M \subset \mathbb{R}^n$ en een punt $p \in M$, beschouw dan krommen γ met beeld in M, gedefinieerd op een omgeving van $0 \in \mathbb{R}$ en met $\gamma(0) = p$. De snelheidsvector $\dot{\gamma}(0)$ van zo'n kromme raakt dan aan M. Bovendien, als we γ al zulke krommen laten doorlopen dan doorloopt $\dot{\gamma}(0)$ alle vectoren die aan M te p raken. De verzameling van deze vectoren is dus alleszins gerechtigd de naam 'raakruimte van M te p' te dragen.

Nu is deze beschrijving met weinig moeite over te zetten naar het geval dat M een variëteit is die zich niet als deelvariëteit van een $\mathbb{R}^n$ aan ons voordoet: Gegeven $p \in M$, noem dan een *krommetje door* p een (volgens onze conventie differentieerbare) afbeelding γ van een open omgeving van 0 in $\mathbb{R}$ naar M met $\gamma(0) = p$. Op de collectie krommetjes door p definieren we een equivalentierelatie: $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ als voor een kaart κ te p geldt dat $\kappa\gamma_1$ en $\kappa\gamma_2$ dezelfde afgeleide hebben in 0. De equivalentieklasse van γ noemen we de *afgeleide van* γ *te* 0 en geven die overeenkomstig aan met $\dot{\gamma}(0)$.

OPGAVE 8. Bewijs dat deze equivalentierelatie niet van de gekozen kaart afhangt.

DEFINITIE 3.1. Een *raakvector van* M *te* p is de afgeleide te 0 van een krommetje door p. De collectie raakvectoren van M te p heet de *raakruimte van* M *te* p en wordt genoteerd met T_pM.

We willen nu inzien dat het woord raak*vector* hier op zijn plaats is in de zin dat T_pM op natuurlijke wijze de structuur heeft van een vectorruimte. We maken daarbij gebruik van het volgende algemene argument: is gegeven een verzameling T, dan bepaalt iedere bijectie $K : T \to \mathbb{R}^m$ precies één manier om van T een reële vectorruimte te maken waarvoor K een lineair isomorfisme van vectorruimten is: optelling en scalaire vermenigvuldiging in T worden eenvoudig gedefinieerd door $v + w := K^{-1}(K(v) + K(w))$ en $\lambda.v := K^{-1}(\lambda K(v))$. Een tweede bijectie $K' : T \to \mathbb{R}^m$ bepaalt dezelfde vectorruimtestructuur op T precies dan als $K'K^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ een lineair isomorfisme is.

Nu merken we op dat voor iedere kaart κ te p, de afbeelding $\gamma \mapsto (\kappa\gamma)\dot{}(0) \in \mathbb{R}^m$ een bijectie bepaalt van T_pM op $\mathbb{R}^m$: met Opgave 8 is de injektiviteit een tautologie en iedere $v \in \mathbb{R}^m$ treedt als beeld op van het krommetje $t \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(p) + tv)$. Met deze bijectie, waarvoor we goede reden blijken te hebben haar met $D_p\kappa$ aan te geven, kunnen we volgens het voorgaande de vectorruimtestructuur van $\mathbb{R}^m$ overdragen op T_pM zodat $D_p\kappa$ een lineair isomorfisme wordt. Wat nu rest is in te zien dat dit *onafhankelijk is van* κ. Wel, is κ' een tweede kaart te p, dan is $\kappa'\gamma = (\kappa'\kappa^{-1})(\kappa\gamma)$ en dus is volgens de kettingregel

$$(\kappa'\gamma)\dot{}(0) = D_{\kappa(p)}(\kappa'\kappa^{-1})((\kappa\gamma)\dot{}(0)),$$

ofwel $D_p\kappa' = D_{\kappa(p)}(\kappa'\kappa^{-1})D_p\kappa$. Omdat $D_{\kappa(p)}(\kappa'\kappa^{-1}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ een lineair isomorfisme is volgt de gewenste onafhankelijkheid uit het voorgaande toegepast op $K = D_p\kappa$ en $K' = D_p\kappa'$. We vatten samen:

PROPOSITIE 3.2. *De raakruimte in een punt van een variëteit heeft op natuurlijke (kaartonafhankelijke) manier de structuur van een vectorruimte van dezelfde dimensie als de variëteit.*

Het is nu ook niet moeilijk meer de afgeleide van een afbeelding meetkundig te beschrijven als een lineaire afbeelding tussen raakruimten. Zij $f : M \to N$ een afbeelding tussen variëteiten, $p \in M$ en $q := f(p)$. Laat $v \in T_pM$. Representeren we v door een krommetje γ door p, dan is is $f\gamma$ een krommetje door $f(p)$. Is nu κ resp. λ een kaart van M te p, resp. van N te q, dan is $\lambda f\gamma = (\lambda f\kappa^{-1})(\kappa\gamma)$ en dus is volgens de kettingregel

$$(\lambda f\gamma)\dot{}(0) = D_{\kappa(p)}(\lambda f\kappa^{-1})((\kappa\gamma)\dot{}(0)).$$

Nu is het rechterlid is per definitie gelijk aan $D_{\kappa(p)}(\lambda f\kappa^{-1})D_p\kappa(v)$, dus de equivalentieklasse van $f\gamma$ hangt alleen van v af. Noteren we die met $D_pf(v) \in T_qN$, dan is het linkerlid te schrijven als $D_q\lambda D_pf(v)$, anders gezegd, we hebben een afbeelding $D_pf : T_pM \to T_qN$ gevonden die gekarakteriseerd wordt door de gelijkheid

$$D_q\lambda{\circ}D_pf = D_{\kappa(p)}(\lambda f\kappa^{-1}){\circ}D_p\kappa.$$

Dit heeft de vorm van de kettingregel, maar bedenk wel dat in deze formule alleen $D_{\kappa(p)}(\lambda f\kappa^{-1})$ een afgeleide van de vertrouwde soort is. We zullen $D_pf : T_pM \to T_qN$ de *afgeleide van f te p* noemen. We beweren dit een lineaire afbeelding is. Gegeven de wijze waarop we de vectorruimtestructuur op T_pM en T_qN hebben vastgelegd, komt dit neer op de uitspraak dat $D_q\lambda{\circ}D_pf{\circ}(D_p\kappa)^{-1}$ lineair is. Maar dat is duidelijk het geval, want deze afbeelding is immers blijkens het bovenstaande gelijk aan de gewone afgeleide $D_{\kappa(p)}(\lambda f\kappa^{-1})$.

Voor de goede orde merken we nog op dat onze definitie *ad hoc* van $D_p\kappa : T_pM \to \mathbb{R}^m$ overeenstemt met de uiteindelijke definitie, als we ons maar bedenken dat de raakruimte van $\mathbb{R}^m$ te $f(p)$ met $\mathbb{R}^m$ vereenzelvigd kan worden.

PROPOSITIE 3.3. *Een afbeelding $f : M \to N$ tussen variëteiten bepaalt voor iedere $p \in M$ een lineaire afbeelding van raakruimten, de afgeleide van f te p, $D_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$. Deze gehoorzaamt aan de kettingregel: is ook $g : N \to P$ een afbeelding tussen variëteiten, dan is $D_p(gf) = D_{f(p)}gD_pf$. Verder is de afgeleide te p van de identieke afbeelding $M \to M$ de identieke afbeelding $T_pM \to T_pM$.*

BEWIJS. We moeten alleen nog de kettingregel nagaan. Maar dat is nagenoeg triviaal: als γ een krommetje is in M te p, dan is $f\gamma$ er één in N te $f(p)$ en $gf\gamma$ er één in P te $gf(p)$. De equivalentieklasse van $gf\gamma$ is het beeld onder $Dg_{f(p)}$ van de equivalentieklasse van $f\gamma$ (welke op zijn beurt het beeld is onder D_pf van de equivalentieklasse van γ). □

4. Submersies, immersies en inbeddingen

De zojuist ingevoerde begrippen maken dat we de inverse en impliciete funktiestellingen wat natuurlijker kunnen formuleren.

PROPOSITIE 4.1. *Zij $f : M \to N$ een afbeelding tussen variëteiten van dimensie m en n en laat $p \in M$ en $q := f(p)$.*

(subm) *Als $D_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ surjectief is (dus $m \geq n$), dan bestaan kaarten κ van M te p en λ van N te $f(p)$ zodat $\lambda f\kappa^{-1}$ op zijn definitiegebied gelijk is aan de projectie $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$. In het bijzonder, is er een open omgeving van p waarvan de doorsnede met $f^{-1}(q)$ een deelvariëteit is van M van dimensie $m - n$.*

(imm) *Als $D_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ injectief is (dus $m \leq n$), dan bestaan kaarten κ van M te p en λ van N te $f(p)$ zodat $\lambda f\kappa^{-1}$ op zijn definitiegebied gelijk is* *aan de injectie* $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \times 0 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n$. *In het bijzonder, is er een open omgeving van* p *die door* f *diffeomorf op een deelvariëteit is van* N *van dimensie* m *wordt afgebeeld.*

(diff) *Als* $D_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ *bijectief is (dus* $m = n$*), dan beeldt* f *een omgeving van* p *diffeomorf af op een omgeving van* q.

Bewijs. We doen alleen het eerste geval, want het bewijs van de overige beweringen verloopt analoog of is eenvoudiger. Laat κ en λ kaarten zijn van M te p resp. N te q. Dan is $D_{\kappa(p)}(\lambda f \kappa^{-1})$ precies dan surjectief als $D_p f$ dat is. Is $D_p f$ surjectief, dan is dus Gevolg 0.3 van toepassing op $\lambda f \kappa^{-1}$: dit vertelt ons dat er dan een diffeomorfisme h van een open omgeving van $\kappa(p)$ in $\mathbb{R}^m$ op een open deel van $\mathbb{R}^m$ bestaat zodat $\lambda f \kappa^{-1} h^{-1}$ op zijn definitiegebied gelijk is aan de projectie van $\mathbb{R}^m$ op $\mathbb{R}^n$. De uitspraak volgt dan door κ te vervangen door $h\kappa$. $\square$

De hier optredende eigenschappen gunnen we een eigen naam:

Definitie 4.2. Een afbeelding $f : M \to N$ tussen variëteiten heet een *submersie* resp. *immersie te* $p \in M$ als $D_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ surjectief resp. injectief is. Geldt dit voor alle $p \in M$, dan spreken we van een submersie resp. immersie zonder meer.

Gevolg 4.3. *Zij* $f : M \to N$ *een afbeelding tussen variëteiten en* $q \in N$ *zo, dat* f *in ieder punt van* $f^{-1}q$ *een submersie is. Dan is* $f^{-1}q$ *een deelvariëteit van* M *van dimensie* $m - n$.

Om te bepalen of een variëteit in $\mathbb{R}^n$ gerealiseerd kan worden, is het handig om over de volgende definitie te beschikken.

Definitie 4.4. Een afbeelding $f : M \to N$ tussen variëteiten noemen we een *inbedding* als $f(M)$ een (gladde) deelvariëteit is van N en f een diffeomorfisme van M op $f(M)$ bepaalt.

Dus dat betekent dat er voor iedere $p \in M$ een kaart $\lambda = (\lambda', \lambda'') : V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ voor N te $f(p)$ moet bestaan zodat $\lambda' f : f^{-1}V \to \mathbb{R}^m$ een kaart is voor M.

Uit Propositie 4.1 volgt dat een immersie $f : M \to N$ lokaal een inbedding is in de zin, dat iedere $p \in M$ een omgeving U heeft waarvoor $f|U$ een inbedding is. Het is duidelijk dat omgekeerd een inbedding een injectieve immersie moet zijn. Toch is dat niet voldoende, getuige de volgende

Voorbeelden 4.5. Neem de afbeelding $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$. Dit is een immersie. Er geldt $f(1) = f(-1)$, maar afgezien hiervan is f injectief. Het beeld van f is een kromme met enkelvoudige zelfdoorsnijding in de oorsprong en zeker geen deelvariëteit. Dat beeld verandert niet als we f vervangen door zijn beperking tot $\mathbb{R} - \{-1\}$. Dus deze beperking is een injectieve immersie, maar zijn beeld is geen deelvariëteit.

Laat $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ en beschouw de afbeelding $f : \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ gedefinieerd door $f(t) = (e^{\sqrt{-1}t}, e^{\sqrt{-1}at})$. Dit is een injectieve immersie. Het is niet moeilijk te bewijzen dat het beeld van f dicht is in de torus $S^1 \times S^1$. Het beeld is dus geen deelvariëteit.

Niettemin geldt:

PROPOSITIE 4.6. *Zij $f : M \to N$ een afbeelding tussen gladde variëteiten. Dan is f een inbedding precies dan als f een immersie is die M homeomorf op een deelruimte van N afbeeldt.*

BEWIJS. We bewijzen de niet-triviale richting: neem aan dat f een immersie is die M homeomorf op $f(M)$ afbeeldt. We moeten laten zien dat $f(M)$ een deelvariëteit is van N en dat f een diffeomorfisme van M op $f(M)$ geeft. Laat $q \in f(M)$. Dan is er volgens onderdeel (imm) van Propositie 4.1 een open omgeving U van $f^{-1}(q)$ die door f diffeomorf op een een deelvariëteit van N wordt afgebeeld. Omdat f een homeomorfisme is op zijn beeld, zal $f(U)$ open zijn in $f(M)$, d.w.z., de doorsnede zijn van $f(M)$ met een open deel V van N. Dus $V \cap f(M)$ is een deelvariëteit van N en f beeldt U diffeomorf af op $V \cap f(M)$. De propositie volgt nu. $\square$

GEVOLG 4.7. *Een gesloten injectieve immersie van variëteiten $f : M \to N$ is een inbedding. In het bijzonder is een injectieve immersie van een compacte variëteit naar een variëteit een inbedding.*

BEWIJS. Een elementair resultaat uit de topologie zegt dat f gesloten is precies dan als f^{-1} continu is. Dus onder de genoemde voorwaarden is f een homeomorfisme. De tweede uitspraak volgt inderdaad uit de eerste als we ons bedenken dat een continue afbeelding van een compacte ruimte naar een Hausdorffruimte altijd gesloten is (een ander bekend resultaat uit de topologie). $\square$

OPGAVE 9. Laat $R > r > 0$. Bewijs dat $f : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$ door

$$f(e^{\sqrt{-1}\alpha}, e^{\sqrt{-1}\beta}) = ((R + r\cos\beta)\cos\alpha, (R + r\cos\beta)\sin\alpha, r\sin\beta)$$

een inbedding is.

OPGAVE 10. Verzin een inbedding van $S^n \times S^m$ in $\mathbb{R}^{n+m+1}$.

OPGAVE 11. Beschouw de de afbeelding $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{\frac{1}{2}(m+1)(m+2)}$ die aan $(x^0, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ de vector $(x^i x^j)_{i \leq j}$ toekent (zeg, in lexicografische volgorde).

(a) Bewijs dat f in ieder punt $\neq 0$ een immersie is.
(b) Bewijs dat $f(a) = f(b)$ precies dan als $b = \pm a$.
(c) Bewijs dat de beperking van f tot S^m een inbedding van P^m in $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}(m+1)(m+2)}$ bepaalt.

STELLING 4.8. *Iedere compacte variëteit M is in te bedden in een $\mathbb{R}^N$.*

BEWIJS. Voor iedere $p \in M$ kiezen we een kaart (U_p, κ_p) die U_p op de open eenheidsbol $B^m \subset \mathbb{R}^m$ afbeeldt. Zij $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ een funktie met $\phi^{-1}(1) = [0, \frac{1}{2}]$ en ϕ nul op $[\frac{3}{4}, \infty)$. Dan is $x \in U_p \mapsto \phi(||\kappa_p||)$ met de constante funktie 0 voort te zetten tot een funktie $\phi_p : M \to \mathbb{R}$. Laat $U_p' \subset M$ gedefinieerd zijn door $||\kappa_p|| < \frac{1}{2}$. Het is duidelijk dat U_p' een open omgeving is van p in U_p.

Beschouwen we $\phi_p.\kappa_p : U_p \to \mathbb{R}^m$ als een afbeelding gedefinieerd op M (door deze buiten U_p als constant 0 te denken), dan blijft dit een differentieerbare afbeelding. Kies een eindige deeloverdekking $\{U_{p_i}'\}_{i=1}^n$ van de open overdekking $\{U_p'\}_p$ van M en laat

$$f = (\phi_{p_1}.\kappa_{p_1}, \phi_{p_1}; \dots; \phi_{p_n}.\kappa_{p_n}, \phi_{p_n}) : M \to (\mathbb{R}^{m+1})^n = \mathbb{R}^{(m+1)n}.$$

Vanwege Gevolg 4.7 is het nu voldoende te laten zien dat f een injectieve immersie is. Laat $p \in M$. Dan ligt p in een U_{p_i}'. Hierop is ϕ_{p_i} constant 1 en is κ_{p_i} een immersie, dus f is daar ook een immersie. Als verder $p' \in M$ zo is dat $f(p') = f(p)$, dan is $\phi_{p_i}(p') = \phi_{p_i}(p) = 1$ en dus is ook $p' \in U'_{p_i}$. Maar omdat κ_{p_i} injectief is op U'_{p_i} volgt nu dat $p' = p$. $\square$

OPMERKING 4.9. De compactheidsaanname in deze stelling kan aanzienlijk verzwakt worden: voldoende is dat de topologie op M een aftelbare basis heeft. Deze voorwaarde is ook nodig, want iedere deelruimte van een $\mathbb{R}^N$ voldoet hier tenslotte aan. H. Whitney bewees dat iedere variëteit van dimensie m met aftelbare basis voor zijn topologie in te bedden is in $\mathbb{R}^{2m}$.

5. Raakbundel en vectorvelden

Raakbundel. Laat M een variëteit zijn van dimensie m. Ons eerste doel is de (disjunkte) vereniging

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M$$

de structuur te geven van een variëteit van dimensie $2m$ waarvoor de voetpuntsprojectie $TM \to M$, $v \in T_p M \mapsto p$, een differentieerbare afbeelding is.

Een afbeelding $f : M \to N$ van variëteiten heeft een afgeleide $Df : TM \to TN$. Dit is een bijectie als f een diffeomorfisme is.

Voor iedere $p \in \mathbb{R}^m$ kan $T_p\mathbb{R}^m$ vereenzelvigd worden met $\mathbb{R}^m$. Dus als O een open deel is van $\mathbb{R}^m$, dan is $TO = O \times \mathbb{R}^m$ en de projectie $O \times \mathbb{R}^m \to O$ voegt aan een raakvector zijn voetpunt toe. Is f een afbeelding van O naar een open deel O' van $\mathbb{R}^n$, dan is

$$Df : O \times \mathbb{R}^m \to O' \times \mathbb{R}^n, \quad (a, v) \mapsto (f(a), D_a f(v))$$

een differentieerbare afbeelding (de matrixcoëfficiënten van $D_a f$ zijn de eerste orde partiële afgeleiden van f, dus differentieerbare funkties). Merk op dat in het geval f een diffeomorfisme is van O op O' (en dus $m = n$) de inverse van de differentieerbare Df gelijk is aan de eveneens differentieerbare $D(f^{-1})$ en dat dan dus ook Df een diffeomorfisme is.

Voor een kaart (U, κ) van M hebben we een afgeleide $D\kappa : TU \to \kappa(U) \times \mathbb{R}^m$. Dit is een bijectie. Is κ' een tweede kaart is, dan geldt

$$D\kappa' = D(\kappa'\kappa^{-1})D\kappa.$$

Omdat $\kappa'\kappa^{-1}$ een differentieerbare afbeelding is, is $D(\kappa'\kappa^{-1})$ een differentieerbare afbeelding. We geven nu TM de structuur van een topologische ruimte: noem een deel $\Omega \subset TM$ *open* als voor iedere kaart (U, κ) van M geldt dat $D\kappa(\Omega \cap TU)$ open is in $T\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Ga zelf na dat de zo gedefinieerde collectie open delen van TM inderdaad een topologie is die bovendien de eigenschap heeft dat voor iedere kaart (U, κ) van M, TU open is in TM en dat $D\kappa$ een homeomorfisme is van TU op $\kappa(U) \times \mathbb{R}^m$.

PROPOSITIE 5.1. *Met deze topologie is TM een $2m$-variëteit. Sterker, de collectie kaarten $\{(U, \kappa)\}$ van M bepaalt een differentieerbare atlas $\{(TU, D\kappa)\}$ voor TM, welke TM de structuur geeft van een gladde variëteit. De afbeelding $TM \to M$ die aan een raakvector zijn voetpunt toevoegt is een differentieerbare afbeelding.*

BEWIJS. Doe zelf. $\square$

VOORBEELD 5.2. De raakbundel TS^m van S^m is de collectie paren $(p, v) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m+1}$ met $\|p\| = 1$ en $p \perp v$. Dit is een $2m$-dimensionale deelvariëteit van $\mathbb{R}^{2m+2}$.

OPGAVE 12. Bewijs dat de raakbundel van P^m verkregen kan worden door in het voorgaande voorbeeld TS^m uit te delen naar de antipodale involutie $(p, v) \mapsto (-p, -v)$.

Vectorvelden. Hier is M een variëteit van dimensie m. Dus TM is een variëteit van dimensie $2m$.

DEFINITIE 5.3. Een *vectorveld* op M is een (volgens onze conventie, vanzelf differentieerbare) afbeelding $V : M \to TM$, $p \mapsto V_p$, met steeds $V_p \in T_pM$ (anders gezegd, V gevolgd door de voetpuntsprojectie $TM \to M$ is de identiteit).

De vectorvelden op M vormen een $\mathbb{R}$-vectorruimte (van oneindige dimensie als $\dim M > 0$): zijn V, W vectorvelden en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ dan is $\lambda V + \mu W : p \mapsto \lambda V_p + \mu W_p$ ook een vectorveld. De scalaire vermenigvuldiging is er trouwens niet alleen voor constanten, maar algemener voor funkties: We merken eerst op dat de $\mathbb{R}$-waardige funkties op M een ring vormen (onder puntsgewijze optelling en vermenigvuldiging). Is nu V een vectorveld en $f : M \to \mathbb{R}$ een funktie (dus vanwege onze Conventie 2.8 C^∞ ondersteld), dan is ook $f.V : p \mapsto f(p)V_p$ een vectorveld en dit produkt voldoet aan dezelfde eigenschappen als scalaire vermenigvuldiging:

$$\begin{aligned} (f.g).V &= f.(g.V), \\ 1.V &= V, \\ (f+g).V &= f.V + g.V, \\ f.(V+W) &= f.V + f.W. \end{aligned}$$

(In het jargon van de algebra: de vectorvelden op M vormen een *moduul* over de ring van de funkties op M.)

Met dit in gedachten zeggen we dat vectorvelden $V_1, \ldots, V_m$ op M een *basis* voor de vectorvelden vormen als voor iedere $p \in M$, $(V_1)_p, \ldots, (V_m)_p$ een basis voor T_pM vormen. Dat betekent dat ieder vectorveld V op M geschreven kan worden als $V = f^1.V_1 + \cdots + f^m.V_m$ voor (unieke) funkties $f^1, \ldots, f^m$ op M. (De algebraïcus zegt dan: de vectorvelden op M vormen een vrij moduul van rang m over de ring van funkties op M.) Zo'n basis bestaat altijd lokaal: Als we voor $a \in \mathbb{R}^m$ definiëren $\frac{\partial}{\partial x^i}|_a \in T_a\mathbb{R}^m$ als zijnde gerepresenteerd door het krommetje $\gamma(t) := a + te_i$, dan vormen de vectorvelden

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : a \in \mathbb{R}^m \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_a, \quad i = 1, \ldots, m,$$

een basis van vectorvelden op $\mathbb{R}^m$ (ieder vectorveld V op $\mathbb{R}^m$ is te schrijven als $V = \sum_{i=1}^m f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$). Is nu (U, κ) een kaart van M, laat dan $\frac{\partial}{\partial \kappa^i}$ het vectorveld zijn op U dat bij $\frac{\partial}{\partial x^i}$ hoort: $\frac{\partial}{\partial \kappa^i}|_p$ is gedefinieerd door het krommetje $\gamma(t) := \kappa^{-1}(\kappa(p) + te_i)$. De identiteit

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\kappa(p)} = D\kappa(\left.\frac{\partial}{\partial \kappa^i}\right|_p)$$

laat zien dat dit een vectorveld is en dat $\frac{\partial}{\partial \kappa^1}, \ldots \frac{\partial}{\partial \kappa^m}$ een basis van vectorvelden op U vormt.

OPMERKING 5.4. In het algemeen hoeft zo'n basis niet op heel M te bestaan. Neem S^2: als een basis (V_1, V_2) voor TS^2 zou bestaan, dan is de afbeelding $f : S^2 \to S^2$ die aan $p \in S^2$ de eenheidsvector $(V_1)_p/\|(V_1)_p\| \in S^2$ toevoegt continu en zodanig dat $f(p) \perp p$ voor alle p. I.h.b. geldt $f(p) \neq p$ voor alle p (f heeft geen vast punt). Maar de algebraïsche topologie leert ons dat zo'n continue afbeelding niet bestaat.

Voor S^1 kan het wel: neem $V_z := \sqrt{-1}z$ voor $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$.

OPGAVE 13. Laat zien dat S^3 een basis van vectorvelden heeft. (Hint: gebruik dat S^3 de eenheidssfeer is in het scheeflichaam der quaternionen.)

Met behulp van de zogenaamde Cayleygetallen kan ingezien worden dat ook S^7 een basis van vectorvelden heeft. Een diepe stelling van Adams (1958) zegt dat er geen andere sferen zijn dan die van dimensie 0, 1, 3 en 7 met deze eigenschap.

OPGAVE 14. Zij G een Liegroep (zie Opgave 5) met eenheidselement e. Voor iedere $g \in G$ zij $L_g : G \to G$, $h \mapsto gh$, de *linksvermenigvuldiging*.

(a) Bewijs dat de afbeelding $G \times T_eG \to TG$, $(g, v) \mapsto D_eL_g(v)$ een diffeomorfisme is. Concludeer dat TG een basis heeft.
(b) Bewijs dat er bij iedere vector $v \in T_eG$ precies één vectorveld V op G bestaat met $V_e = v$ en V linksinvariant in de zin dat $L_{g*}V = V$ voor alle $g \in G$.
(c) Idem met links vervangen door rechts (de *rechtsvermenigvuldiging* $R_g : G \to G$ is gedefinieerd door $h \mapsto hg$).

6. Derivaties en het Liehaakje

We geven eerst een algebraïsche karakterisering van een vectorveld. Gegeven een raakvector $v \in T_pM$, dan bepaalt die voor iedere funktie f in een omgeving van p een 'richtingsafgeleide' $D_pf(v) \in \mathbb{R}$. Omdat we nu v vast nemen en f als variabele, schrijven we dit liever als $v(f)$. Het is duidelijk dat deze uitdrukking lineair is in f: $v(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 v(f_1) + \lambda_2 v(f_2)$. Verder volgt uit de produktregel dat

$$v(f_1.f_2) = f_1(p)v(f_2) + v(f_1)f_2(p).$$

Dus als V een vectorveld is op M, dan vinden we bij iedere funktie $f : U \to \mathbb{R}$ op een open deel U van M een funktie $V(f) : p \in U \mapsto D_pf(V_p)$. Voor een open deel van $\mathbb{R}^m$ komt dit neer op het volgende: is $V = \sum_{i=1}^m V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, dan is

$$V(f) = \sum_{i=1}^m V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Zo bezien is een vectorveld dus een eenvoudig soort operator op funkties. Deze voldoet duidelijk aan de volgende eigenschappen:

lokaal karakter: Als f een funktie is op een open deel U van M en $U' \subset U$ is open, dan is $V(f|_{U'}) = V(f)|_{U'}$,

$\mathbb{R}$-*lineariteit:* als f_1, f_2 funkties zijn op het open deel U van M en $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, dan is $V(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 V(f_1) + \lambda_2 V(f_2)$ en

Leibnitzregel: $V(f_1.f_2) = f_1.V(f_2) + f_2V(f_1)$.

In feite karakteriseren deze eigenschappen vectorvelden:

PROPOSITIE 6.1. *Een afbeelding D die aan iedere $\mathbb{R}$-waardige funktie f op een open deel van M een $\mathbb{R}$-waardige funktie $D(f)$ op datzelfde open deel toevoegt en voldoet aan de drie bovenstaande eigenschappen is afkomstig van een vectorveld op M en dat vectorveld is uniek.*

Bewijs. We bewijzen dit alleen maar voor een open deel U van $\mathbb{R}^m$; het algemene geval gaat met een atlas. Beschouw de ie coördinaat x^i van $\mathbb{R}^m$ als funktie op U en laat $V^i := D(x^i|_U)$. We bewijzen dat D door het vectorveld $V := \sum_{i=1}^m V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ gedefinieerd wordt. Is f een funktie op een omgeving van $a \in U$, dan moeten bewijzen dat $V(f)(a) = D(f)(a)$. Met behulp van partiële integratie schrijven we f te a als $f(x) = f(a) + \sum_i g_i(x).(x^i - a^i)$ voor zekere funkties g_i. Merk hierbij op dat dan vanzelf $g_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$.

Nu geldt voor de constante funktie 1: $D(1) = D(1.1) = 1.D(1) + 1.D(1) = 2D(1)$ zodat dus $D(1) = 0$. Vanwege de lineariteit geldt dan $D(c) = 0$ voor iedere constante funktie c. Dus

$$
\begin{aligned}
D(f) = D\Big(f(a) + \sum_i g_i.(x^i - a^i)\Big) &= \\
= D(f(a)) + \sum_i \Big(D(g_i).(x^i - a^i) + D(x^i - a^i).g_i\Big) &= \\
= \sum_i \Big(D(g_i).(x^i - a^i) + V^i.g_i\Big)&.
\end{aligned}
$$

Nemen we de waarde in a, dan vinden we dus

$$D(f)(a) = \sum_i V^i(a).g_i(a) = \sum_i V^i(a)\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = V(f)(a).$$

$\square$

De $\mathbb{R}$-lineariteit en de Leibnitzregel worden in de commutatieve algebra belichaamd door het begrip $\mathbb{R}$-*derivatie* ('een vectorveld is een $\mathbb{R}$-derivatie van de ring van funkties naar zichzelf'). De volgende propositie betreft eigenlijk een algemene eigenschap van derivaties.

Propositie 6.2. *Laat V en W vectorvelden zijn op de variëteit M. Dan is een vectorveld $[V, W]$ op M gekarakteriseerd door*

$$[V, W](f) := VW(f) - WV(f).$$

De zo gevonden binaire operatie $[\ ,\ ]$, het Lieprodukt *genaamd, voldoet aan de volgende eigenschappen:*

antisymmetrie: $[V, W] = -[W, V]$ *en*
Jacobi-identiteit: $[[V, W], X] = [V, [W, X]] - [W, [V, X]]$.

Bewijs. We laten eerst zien dat $[V, W]$ een vectorveld is. Daartoe gebruiken we Propositie 6.1. Het lokale karakter en de $\mathbb{R}$-lineariteit zijn duidelijk. We verifiëren de Leibnitzregel. Er geldt:

$$
\begin{aligned}
VW(f.g) = V(W(f).g + f.W(g)) &= \\
&= VW(f).g + W(f).V(g) + V(f).W(g) + f.VW(g).
\end{aligned}
$$

Hiervan aftrekken de uitdrukking die je krijgt door V en W te verwisselen geeft de Leibnitzregel voor $VW - WV$:

$$(VW - WV)(f.g) = (VW - WV)(f).g + f.(VW - WV)(g).$$

De antisymmetrie is duidelijk en verder is

$$\begin{aligned}[V,[W,X]]-[W,[V,X]] &= \big(V(WX-XW)-(WX-XW)V\big)\\ &\quad -\big(W(VX-XV)-(VX-XV)W\big) =\\ &\quad = (VW-WV)X-X(VW-WV) = [[V,W],X]].\end{aligned}$$

□

Opgave 15. Laat V en W vectorvelden zijn op een variëteit. Bewijs dat voor funkties f en g op M geldt

$$[V,f.W](g) = f.[V,W](g)+V(f).W(g).$$

Opgave 16. Laat $V=\sum_i V^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ en $W=\sum_i W^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ vectorvelden op een open deel van $\mathbb{R}^m$ zijn. Laat zien dat

$$[V,W] = \sum_{i,j}\Big(V^j\frac{\partial W^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}-W^j\frac{\partial V^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)$$

Opgave 17. Zij G een Liegroep met eenheidselement e. Bewijs dat het Lieprodukt van twee linksinvariante vectorvelden op G zelf linksinvariant is. Concludeer dat het Liehaakje zo een produkt $T_eG\times T_eG\to T_eG$ definieert (zie Opgaven 5 en 14).

Opmerking 6.3 (Meevoeren en terughalen). Is $h:M\to N$ een diffeomorfisme, dan kunnen objecten op M (zoals een funktie $f:M\to\mathbb{R}$ of een vectorveld $V:M\to TM$) naar N met h *meegevoerd* worden. Het resultaat geven we aan door er h_* voor te zetten. Bijvoorbeeld, $h_*f := fh^{-1}$ en $h_*V := Dh{\circ}V{\circ}h^{-1}:N\to TN$.

Is $g:U\to\mathbb{R}$ een funktie op een open deel van N, dan is

$$\begin{aligned}(h_*V)(g) &= Dg(h_*V)\ \text{(per definitie)}\\ &= Dg{\circ}Dh{\circ}V{\circ}h^{-1} = D(gh){\circ}V{\circ}h^{-1} = V(gh)h^{-1}.\end{aligned}$$

De laatste expressie kan geïnterpreteerd worden als de meegevoerde V, maar nu opgevat als derivatie, toegepast op g. Het maakt dus geen verschil of we V als vectorveld of als derivatie meevoeren.

Evenzo kunnen we objecten op N langs h *teruggehaald* worden tot objecten op M; we zetten er dan h^* voor. Is b.v. g een funktie op N, dan is $h^*g := gh$ (in dit geval is het dus niet nodig te verlangen dat h een diffeomorfisme is) en is W een vectorveld op N, dan is $h^*W := D(h^{-1}){\circ}W{\circ}h$. Dus terughalen langs h is meevoeren langs h^{-1}.

7. Stromingen

Bij een stroming als hieronder gedefinieerd kunnen we denken aan een vloeistofstroming die niet met de tijd varieert.

Definitie 7.1. Een *stroming* op M is een (differentieerbare) afbeelding $H:\mathbb{R}\times M\to M$ zo dat als $H_t:M\to M$ gedefinieerd is door $H_t(p)=H(t,p)$, er geldt dat H_0 de identiteit is en $H_sH_t=H_{s+t}$ voor alle $s,t\in\mathbb{R}$.

(Een andere manier om dit te verwoorden is te zeggen dat de additieve groep $\mathbb{R}$ differentieerbaar werkt op M.) Er volgt direkt uit het feit dat H_tH_{-t} en $H_{-t}H_t$ beide de identiteit zijn, zodat dus H_t een diffeomorfisme is van M op M met inverse H_{-t}. Gegeven zo'n stroming H, dan is de *baan* van een punt $p\in M$ het beeld van de afbeelding $\gamma_p : \mathbb{R} \to M, \quad \gamma_p(t) := H(t,p)$. Die afbeelding bepaalt een raakvector $\dot{\gamma}_p(0) \in T_pM$. Laten we nu p de variëteit doorlopen, dan vinden we een vectorveld op M. We noemen dit vectorveld de *infinitesimale voortbrenger* van de stroming, en geven het aan met $\frac{\partial H}{\partial t}|_{t=0}$. In het geval van een vloeistofstroming geeft de infinitesimale voortbrenger de snelheid van een vloeistofdeeltje in ieder punt weer. Het ligt in de rede te verwachten dat als we de snelheid van ieder vloeistofdeeltje kennen, we de stroming kennen. Dus hopen we dat een stroming in de abstracte zin volledig door zijn infinitesimale voortbrenger wordt bepaald. We zullen aanstonds zien dat dit het geval is.

VOORBEELD 7.2. Voor $a \in \mathbb{R}$ is een stroming op $(0,\infty)$ gegeven door $H(t,x) := e^{at}x$. De infinitesimale voorbrenger is het vectorveld $ax\frac{\partial}{\partial x}$. Voor $a < 0$ stroomt alles naar de oorsprong (die echter nooit bereikt wordt), voor $a = 0$ is de stroming stationair en voor $a > 0$ is de stroming naar ∞.

OPGAVE 18. Voor $a \in \mathbb{C}$ is een stroming op $\mathbb{C}$ is gegeven door $H(t,z) := e^{at}z$. Beschrijf het kwalitatief gedrag van de stroming voor verschillende waarden van $\mathbb{C}$ (onderscheid met name de gevallen wanneer het reële deel van a positief, nul of negatief is).

OPGAVE 19. Zij W een eindigdimensionale reële vectorruimte. Zij $\mathrm{End}(W)$ de vectorruimte van lineaire afbeeldingen van W naar zichzelf. Voor iedere $A \in \mathrm{End}(W)$ definieren we

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

We onderstellen bekend dat deze som absoluut convergeert op ieder begrensd deel van $\mathrm{End}(W)$ (met betrekking tot een van te voren gekozen norm op W) en dat geldt $e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}$ voor $s,t \in \mathbb{R}$. Voor iedere $A, B \in \mathrm{End}(W)$ zijn dan $(t,X) \mapsto e^{tA}X$, $(t,X) \mapsto Xe^{tB}$ en $(t,X) \mapsto e^{tA}Xe^{tB}$ stromingen op $\mathrm{End}(W)$. Bepaal hun infinitesimale voortbrengers.

OPGAVE 20. Zij H een stroming op M met infinitesimale voortbrenger V. Bewijs dat $H_{t*}(V) = V$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

Veel modellen van fysische (en andersoortige) processen bestaan uit het geven van een vectorveld op een variëteit en voorspellen dat wat waargenomen kan worden (een aspect van) de bijbehorende stroming is. Het is dus van belang bij een vectorveld een stroming te vinden. Dit kan niet altijd: is een stroming H op M gegeven en is $U \subset M$ een open deel dat niet door de stroming behouden wordt (d.w.z. $H_{t_0}(U) \neq U$ voor een t_0), dan kunnen we de stroming natuurlijk niet beperken tot U, maar de infinitesimale voortbrenger van de stroming is een vectorveld dat heel wel tot U beperkt worden. Dus op U hebben we een vectorveld dat niet bij een stroming hoort. Niettemin is de stroming gedefinieerd in de $(t,p) \in \mathbb{R} \times U$ met $H(t,p) \in U$ en dat is een open omgeving van $0 \times U$ in $\mathbb{R} \times U$. Dit motiveert

DEFINITIE 7.3. Een *lokale stroming* bestaat uit het geven van een open omgeving Ω van $0 \times M$ in $\mathbb{R} \times M$ die iedere rechte $\mathbb{R} \times p$ in een interval treft en een (differentieerbare) afbeelding $H : \Omega \to M$ met de eigenschap dat $H(0,p) = p$ en $H(s, H(t,p)) = H(s+t, p)$ waar dit betekenis heeft.

Voor een lokale stroming kunnen we natuurlijk nog steeds de infinitesimale voortbrenger vormen. De volgende propositie blijkt een meetkundige interpretatie te zijn van het bestaan en éénduidigheid van de oplossing van een gewone differentiaalvergelijking met beginvoorwaarden.

PROPOSITIE 7.4. *Ieder vectorveld V op M is de infinitesimale voortbrenger van een lokale stroming. Deze is uniek in de zin dat als (Ω, H) en (Ω', H') beide V als infinitesimale voortbrenger hebben, H en H' gelijk zijn op hun gemeenschappelijk definitiegebied $\Omega \cap \Omega'$.*

BEWIJS. Is $(U_\alpha, \kappa_\alpha)_\alpha$ een (differentieerbare) atlas voor M, dan is het voldoende de stelling te bewijzen voor de beperkingen $V|_{U_\alpha}$, immers de hierbij horende lokale stromingen $\Omega_\alpha \to M$ (met Ω_α een open omgeving van $0 \times U_\alpha$ in $\mathbb{R} \times U_\alpha$) zullen overeenstemmen op doorsneden $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$. Nu kunnen we met κ_α de situatie op U_α overplaatsen naar een open deel van $\mathbb{R}^m$. Dus zonder bezwaar mogen we aannemen dat M een open deel U is van $\mathbb{R}^m$. We schrijven dan

$$V_x = \sum_{i=1}^m V^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

voor zekere funkties V^i op U. Vatten we V op als een afbeelding $V : U \to \mathbb{R}^m$, dan zegt de existentie en éénduidigheidsstelling voor gewone differentiaalvergelijkingen dat er voor iedere $p \in U$ een omgeving U_p van p in U bestaat en een $\varepsilon > 0$ zodat voor iedere $a \in U_0$ een unieke differentieerbare oplossing $\gamma_a : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ bestaat van de differentiaalvergelijking

$$(*) \qquad \dot\gamma(t) = V_{\gamma(t)},$$

met beginvoorwaarde $\gamma(0) = a$. Bovendien is de afhankelijkheid van de beginvoorwaarde ook differentieerbaar, anders gezegd,

$$\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_p \to U, \quad (t, a) \mapsto \gamma_a(t),$$

is een differentieerbare afbeelding. We bewijzen dat Γ een lokale stroming is met $V|_{U_p}$ als infinitesimale voortbrenger.

Allereerst merken we op dat voor $|s| < \varepsilon$, $t \mapsto \gamma_a(s+t)$ aan dezelfde differentiaalvergelijking $(*)$ voldoet, alleen de beginvoorwaarde is nu dat we voor $t = 0$ in $\gamma_a(s)$ starten. De uniciteit van de oplossing zegt dus dat

$$\gamma_a(s+t) = \gamma_{\gamma_a(s)}(t)$$

zolang $|s+t| < \varepsilon$. Dit komt neer op $\Gamma(s+t, a) = \Gamma(t, \Gamma(s, a))$ voor $a \in U_p$ en $|s|$, $|t|$ en $|s+t|$ alle drie $< \varepsilon$. Verder is

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(0, a) = \dot\gamma_a(0) = V_{\gamma_a(0)} = V_a.$$

We bewijzen tot slot dat iedere lokale stroming $\Gamma' : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_p \to U$ met $V|_{U_p}$ als infinitesimale voortbrenger gelijk moet zijn aan Γ. Laat $|t| < \varepsilon$ en $a \in U_p$. Uit $\Gamma'(s+t, a) = \Gamma'(s, \Gamma'(t, a))$ volgt (door de afgeleide naar s in $s = 0$ te nemen) dat $\frac{\partial \Gamma'}{\partial t}(t, a) = V_{\Gamma'(t,a)}$. Uitgeschreven komt dit neer op: $\gamma'_a(t) := \Gamma'(t, a)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking $(*)$ met dezelfde beginvoorwaarde. Dus $\Gamma'(t, a) = \gamma'_a(t) = \gamma_a(t) = \Gamma(t, a)$. ☐

OPMERKING 7.5. De uniciteitseigenschap impliceert dat voor een gegeven vectorveld V op M de vereniging van definitiegebieden van een lokale stroming voor V het definitiegebied is van een lokale stroming. Er is dus een maximaal definitiegebied van een lokale stroming voor V. We noemen deze maximale lokale stroming ook wel de *evolutie* van V. Zijn waarde in (t,p) geven we soms aan met $e^{tV}(p)$ (een notatie gesuggereerd door de eigenschap dat zijn afgeleide naar t in $t=0$ gelijk is aan V).

OPMERKING 7.6. Een *tijdsafhankelijk vectorveld* op M is natuurlijk een vectorveld op M dat afhankelijk is van een reële variable, dus een afbeelding $V : \mathbb{R}\times M \to TM$ van de vorm $(s,p)\mapsto V_p(s)\in T_pM$. Zo'n vectorveld bepaalt een gewoon vectorveld $\tilde{V}$ op $\mathbb{R}\times M$, waarbij voor de $\mathbb{R}$-component het constante eenheids vectorveld kiezen:

$$\tilde{V}_{(s,p)} := (\frac{d}{ds}|_s, V_p(s)).$$

De hierbij horende evolutie heeft de gedaante $(t,(s,p))\mapsto(s+t,H(t,s,p))$.

OPGAVE 21. Zij V een vectorveld op een variëteit M, $p\in M$ en N een deelvariëteit van M door p van codimensie 1 ($\dim N=\dim M-1$) met de eigenschap dat $V_p\notin T_pN$. Bewijs dat er een een diffeomorfisme van een omgeving van $(0,p)$ in $\mathbb{R}\times N$ op een omgeving van p in M bestaat die het vectorveld $(\frac{\partial}{\partial t},0)$ in V overvoert. Hint: Bewijs dat een lokale stroming H voor V een produkt-omgeving van $(0,p)$ in $\mathbb{R}\times N$ diffeomorf op een omgeving van p in M afbeeldt. Bewijs vervolgens dat dit diffeomorfisme de gewenste eigenschap heeft. (Door nog een kaart te kiezen voor N in p vinden we een kaart voor een omgeving van p in M waarvoor V overgaat in het vectorveld $\frac{\partial}{\partial x^1}$ op $\mathbb{R}^m$.)

OPGAVE 22. Zij V een vectorveld op een variëteit M met een lokale stroming H gedefinieerd op $(-\varepsilon,\varepsilon)\times M$ voor een $\varepsilon>0$. Bewijs dat die voort te zetten is tot een stroming $\tilde{H}$ op heel $\mathbb{R}\times M$. (Hint: laat zien dat voor $n>\varepsilon/|t|$, $H^n_{t/n}(p)$ onafhankelijk is van n.

OPGAVE 23. Bewijs: *Een vectorveld op een compacte variëteit is de infinitesimale voorbrenger van een stroming (anders gezegd, zijn evolutie is gedefinieerd op heel* $\mathbb{R}\times M$*).* Hint: Gebruik de volgende stelling uit de topologie: als X een compacte ruimte is, dan omvat iedere omgeving van $0\times X$ in $\mathbb{R}\times X$ een productomgeving $(-\varepsilon,\varepsilon)\times X$.

Met behulp van lokale stromingen kunnen we achtereenvolgens de werking van vectorvelden op funkties en het Liehaakje van twee vectorvelden een meetkundige betekenis geven. Laat V een vectorveld zijn op M, $U\subset U'\subset M$ open delen van M en $\varepsilon>0$ zó, dat $(-\varepsilon,\varepsilon)\times U)$ bevat is in het definitiegebied van een lokale stroming H van V die door deze wordt afgebeeld in U'. In het bijzonder is dus $H_t : U\to U'$ gedefinieerd voor alle $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Stellen we ons in p op, dan passeert daar na een tijdspanne t, $0<t<\varepsilon$, een punt dat zich oorspronkelijk bevond te $H_{-t}(p)\in U'$. Is $f : U'\to\mathbb{R}$ een funktie, dan ligt het dus in de rede, de door de stroom meegevoerde funktie ten tijde t in p de waarde $fH_{-t}(p)$ te geven. We hebben zo gevonden een familie van funkties $H_{t*}f = fH_{-t}|_U : U\to\mathbb{R}$, $|t|<\varepsilon$. Hetzelfde kunnen we doen met een vectorveld W op U' en vinden zo voor $|t|<\varepsilon$ het meegevoerde vectorveld

$$H_{t*}W = DH_t\circ W\circ H_{-t}\Big|_U.$$

In plaats van in de stroom te blijven staan, kunnen we ons met de stroom mee laten voeren. Dan ligt het meer voor de hand attributen van M ter plekke $H_t(p)$ terug te halen naar p en te beschouwen H_t^*f en H_t^*W. Dit is het onderliggende gezichtspunt van de Lie-afgeleide die we in Hoofdstuk 10 zullen bespreken.

Al deze uitdrukkingen kunnen worden afgeleid naar t.

PROPOSITIE 7.7 (Infinitesimaal transport). *Er geldt op U:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} H_t^* f &= V(f), & \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} H_{t*} f &= -V(f),\\ \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} H_t^* W &= [V,W], & \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} H_{t*} W &= -[V,W]. \end{aligned}$$

BEWIJS. We bewijzen alleen de uitspraken ter linkerzijde. Kies $p \in U$ en laat $\gamma_p(t) := H_t(p)$. Dus $\dot\gamma_p(0) = V_p$. Nu is $H_t^* f(p) = f\gamma_p(t)$; de afgeleide van $f\gamma_p(t)$ naar t in $t = 0$ is dus $D_p(f)(\dot\gamma_p(0)) = D_p(f)(V_p) = V(f)(p)$ per definitie.

De tweede gelijkheid leiden we af voor de bijbehorende derivaties. Voor $g : U \to \mathbb{R}$ is

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (H_t^* W)(g) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} W(gH_{-t})H_t \text{ (volgens 6.3)}\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} W(gH_{-t}) + \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} W(g)H_t \text{ (want } H_0 \text{ is de identiteit)}\\ &= W\big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} gH_{-t}\big) + \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} W(g)H_t\\ &= W(-V(g)) + V(W(g)) = [V,W](g), \end{aligned}$$

waarbij we bij de voorlaatste gelijkheid het reeds bewezen onderdeel gebruikten. $\square$

OPGAVE 24. Laat V resp. W de infinitesimale voortbrengers zijn van stromingen H en I. Bewijs dat geldt: $[V,W] = 0$ precies dan als $H_s I_t = I_t H_s$ voor alle $s,t \in \mathbb{R}$ (we zeggen dan dat de twee vectorvelden met elkaar *commuteren*).

OPGAVE 25. Laat V resp. W de infinitesimale voortbrengers van stromingen H en I. Bewijs dat

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\Big|_{s=0,t=0} H_s I_t H_s^{-1} I_t^{-1} = -[V,W]$$

OPGAVE 26. De eenheidsvectorvelden $\frac{\partial}{\partial x^i}$ op $\mathbb{R}^m$ commuteren met elkaar. Bewijs een omkering: laat $V_1,\ldots,V_m$ vectorvelden zijn op een m-dimensionale variëteit M die onderling commuteren: $[V_i,V_j] = 0$ voor alle i,j. Laat $p \in M$ zo dat $(V_1)_p,\ldots,(V_m)_p$ een basis vormen van T_pM. Bewijs dat er een kaart (U,κ) te p bestaat zodat $V_i|_U = \frac{\partial}{\partial \kappa^i}$, $i = 1,\ldots,m$. Hint: Laat H_i een lokale stroming zijn voor V_i en beschouw de afbeelding

$$h(x^1,\ldots,x^m) = H_1(x^1, H_2(x^2, H_3(\ldots H_m(x^m,p)\cdots)))$$

van een omgeving van $0 \in \mathbb{R}^m$ naar een omgeving van p in M. Bewijs dat deze afbeelding een diffeomorfisme is op een omgeving B van 0 en laat vervolgens zien dat als we voor B een blok kiezen er geldt $h_*(\frac{\partial}{\partial x^i}|_B) = V_i|_{h(B)}$, $i = 1,\ldots,m$.

OPGAVE 27. Laat W een eindigdimensionale vectorruimte zijn. Iedere $A \in \mathrm{End}(W)$ bepaalt vectorvelden $\tilde A^l$ en $\tilde A^r$ op $\mathrm{End}(W)$ door $\tilde A^l_X := XA$ en $\tilde A^r_X := AX$ (r resp. l staat voor 'rechtsinvariant' resp. 'linksinvariant'). Als $A,B \in \mathrm{End}(W)$, bepaal dan $[\tilde A^r, \tilde B^r]$, $[\tilde A^l, \tilde B^l]$ en $[\tilde A^r, \tilde B^l]$.

8. Vectorbundels

In bijlage A bespreken we een aantal constructies (zoals 'duale nemen' en 'tensor produkt') die uitgaande van één of meer vectorruimten een nieuwe vectorruimte produceren. Ons doel is dat met de raakbundel van een variëteit te imiteren op zo'n manier dat dit raakruimtegewijs de gegeven constructie is en een variëteit als resultaat heeft. De variëteiten E die we zo krijgen zijn voorzien van een afbeelding $\xi : E \to M$ zodanig dat iedere vezel $\xi^{-1}p$ de structuur heeft van een vectorruimte (b.v. $\wedge^k T_pM^*$). Dit soort objecten dienen zich ook op andere manieren aan en daarom omschrijven we ze in een definitie.

DEFINITIE 8.1. Een *vectorbundel ξ van rang r* over de variëteit M is een afbeelding van variëteiten $\xi : E \to M$ zodanig dat iedere vezel $\xi^{-1}(p)$ de structuur heeft van een reële vectorruimte van dimensie r. Deze structuur zal differentieerbaar van p af moeten hangen in de volgende zin: we kunnen M overdekken met open delen U waarvoor een afbeelding $\rho : \xi^{-1}U \to \mathbb{R}^r$ met de eigenschap dat (i) voor iedere $p \in U$ de afbeelding $\xi^{-1}(p) \to \mathbb{R}^r$, $z \mapsto \rho(z)$, een lineair isomorfisme is en (ii) de afbeelding $\tilde{\rho} : \xi^{-1}U \to \mathbb{R}^r \times U$, $z \mapsto (\rho(z), \xi(z))$, een diffeomorfisme is.

Het domein E van ξ (soms ook wel aangegeven met $E(\xi)$) wordt de *totale ruimte* van de vectorbundel genoemd en zijn bereik M de *basis*.

Voor een deelverzameling $A \subset M$ zullen we schrijven E_A voor $\xi^{-1}A$ en $\xi_A : E_A \to A$ voor de beperking van ξ. Evenzo E_p voor $\xi^{-1}(p)$ als $p \in M$. Bovenstaande definitie zegt simpelweg dat de beperking $\xi_U : E_U \to U$ er uit ziet als de projectie $\mathbb{R}^r \times U \to U$ en wel op een manier die compatibel is met de structuur van vectorruimte op de vezels. Een paar (U, ρ) als in de definitie wordt een *lokale trivialisatie* van de vectorbundel genoemd. De definierende eigenschap voor een vectorbundel zegt dat er een collectie van lokale trivialisaties $(U_\alpha, \rho_\alpha)_\alpha$ is die M overdekt. We noemen zo'n collectie een *atlas* voor de vectorbundel. Indien een lokale trivialisatie (U, ρ) bestaat met $U = M$, dan heet de vectorbundel *triviaal*.

VOORBEELDEN 8.2. (i) Het triviale voorbeeld: de projectie $\mathbb{R}^r \times M \to M$.

(ii) De raakbundel $\tau_M : TM \to M$ van een variëteit M is een vectorbundel van rang $m = \dim M$. Immers een kaart (U, κ) voor M bepaalt een lokale trivialisatie (U, ρ) voor de raakbundel: neem voor ρ de laatste m componenten van $D\kappa : TU \to \kappa(U) \times \mathbb{R}^m$.

(iii) De *tautologische lijnenbundel* γ^1_m over de reëel-projectieve ruimte P^m: ieder punt van P^m bepaalt een lijn in $\mathbb{R}^{m+1}$ door 0 en die lijn zal zijn de vezel boven dit punt. Preciezer, de totale ruimte $E(\gamma^1_m)$ bestaat uit de paren $(x, \{\pm y\}) \in \mathbb{R}^{m+1} \times P^m$ met $x \in \mathbb{R}y$ en γ^1_m is de projectie op de laatste faktor.

(iv) Het vorig voorbeeld laat zich generaliseren tot de *tautologische rang n bundel* γ^n_V over de Grassmannvariëteit $Gr_n(V)$. (Hier is V een reële vectorruimte van dimensie $n+k$, zie Opgave 1). De totale ruimte $E(\gamma^n_V)$ bestaat uit de $(v, [W]) \in V \times Gr_n(V)$ met $v \in W$ en $\gamma^n_V : E(\gamma^n_V) \to Gr_n(V)$ is de projectie op de laatste faktor. Om in te zien dat dit een vectorbundel is, laat $[W_o] \in Gr_n(V)$. Kies een supplementaire deelruimte U_o zodat $V = W_o \oplus U_o$. Dan vormt de collectie $[W] \in Gr_n(V)$ met $W \cap U_o = 0$ een open omgeving Ω van $[W_o]$ in $Gr_n(V)$. Dus de projectie $V = V = W_o \oplus U_o \to W_o$ beeldt iedere W met $[W] \in \Omega$ isomorf af op W_o. Kiezen we nog een isomorfisme $W_o \cong \mathbb{R}^n$, dan krijgen we zo een trivialisatie van (γ^n_V) boven Ω: neem de projectie $E(\gamma^n_V)_\Omega \to V$ op de eerste faktor, gevolgd door de projectie $V \to W_o$ en het gekozen isomorfisme $W_o \cong \mathbb{R}^n$.

Meer voorbeelden krijgen we met behulp van de constructies die we aanstonds bespreken.

OPGAVE 28. Laat zien dat $E(\gamma_m^1)$ diffeomorf is met de Möbiusband.

OPGAVE 29. Zij M een deelvariëteit van een variëteit N. Bewijs dat de beperking $\tau_N|M$ van τ_N tot M een vectorbundel over M van rang $\dim N$ is.

Voor twee lokale trivialisaties (U,ρ) en (U',ρ') van een rang r vectorbundel $\xi : E \to M$ kunnen we beschouwen de 'verkaarting' boven $U \cap U'$:

$$\tilde\rho'\tilde\rho^{-1} : \mathbb{R}^r \times (U \cap U') \xleftarrow{\cong} E_{U\cap U'} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^r \times (U \cap U').$$

Deze heeft de gedaante $(v,p) \mapsto (h(p)(v),p)$, waarbij $h(p)$ een $r \times r$ matrix is. Deze matrix is niet-singulier en hangt C^∞ van p af. De zo gevonden afbeelding $h : U \cap U' \to \mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$ heet de *overgangsfunktie* van de verkaarting. Dus bij een atlas $(U_\alpha,\rho_\alpha)_\alpha$ voor ξ vinden we een collectie overgangsfunkties $\{h_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r,\mathbb{R})\}_{\alpha,\beta}$

Is U' een open deel van U, dan geeft de beperking van ρ tot $E_{U'}$ ook een lokale trivialisatie. We kunnen voor $U' \subset U$ het definitiegebied van een kaart $\kappa : U' \to \mathbb{R}^m$ nemen en zo vinden we dan een bijzonder soort kaart voor E: $E_{U'} \to \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m$, $z \mapsto (\rho(z), \kappa\pi(z))$. We zien zo dat een atlas voor $\pi : E \to M$ al volledig de structuur die E als variëteit heeft vastlegt.

Verandering van vezel. We willen nu inzien dat constructies die uit gegeven vectorruimten $V, V', \dots$ nieuwe maken zoals $V^*, V \oplus V', \mathrm{Hom}(V,V'), \wedge^k V, \dots$ zich laten veralgemenen tot vectorbundels. Daarvoor hebben we het volgende lemma nodig.

LEMMA 8.3. *Zij $\{E_p\}_{p\in M}$ een collectie reële vectorruimten van dimensie r geïndiceerd door M. Onderstel dat gegeven is een formele atlas in de zin dat we hebben een open overdekking $(U_\alpha)_\alpha$ van M en voor iedere α en iedere $p \in U_\alpha$ een isomorfisme van vectorruimten $\rho_{\alpha,p} : E_p \cong \mathbb{R}^r$. Als de bijbehorende overgangsfunkties*

$$h_{\alpha,\beta} : p \in U_\alpha \cap U_\beta \mapsto \rho_{\beta,p}\rho_{\alpha,p}^{-1} \in \mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$$

differentieerbaar zijn, dan heeft $\coprod_{p\in M} E_p \to M$ precies één structuur van een rang r vectorbundel waarvoor de paren $(U_\alpha, \rho_\alpha : \coprod_{p\in U_\alpha} E_p \xrightarrow{\rho_{\alpha,p}} \mathbb{R}^r)$ een atlas vormen.

BEWIJS. Voor iedere α hebben we een bijectie $\tilde\rho_\alpha : E_{U_\alpha} := \coprod_{p\in U_\alpha} E_p \to \mathbb{R}^r \times U_\alpha$. Geef E_{U_α} de structuur van een variëteit door te stipuleren dat deze bijectie een diffeomorfisme is. Het is duidelijk dat dan voor iedere β, $E_{U_\alpha \cap U_\beta}$ open is in E_{U_α}. De afbeeldingen $\tilde\rho_\alpha$ en $\tilde\rho_\beta$ verschillen op $E_{U_\alpha\cap U_\beta}$ door de afbeelding $\tilde h_{\alpha,\beta}$ van $\mathbb{R}^r \times U_\alpha \cap U_\beta$ naar zichzelf gedefinieerd door $(v,p) \mapsto (h_{\alpha,\beta}(p)(v),p)$. Deze is differentieerbaar evenals zijn inverse $\tilde h_{\beta,\alpha}$. Dit is dus een diffeomorfisme. Derhalve vallen de twee structuren van variëteit die we op $E_{U_\alpha\cap U_\beta}$ hebben samen. Een topologie op E krijgen we door een deelverzameling $\Omega \subset E$ open te verklaren als zijn doorsnede met iedere E_{U_α} dat is. Deze is Hausdorffs. Het lemma volgt nu. □

GEVOLG 8.4. *Laat $\xi : E \to M$ en $\xi' : E' \to M$ vectorbundels zijn van rang r en r'. Dan heeft de disjunkte vereniging over $p \in M$ van de vectorruimten E_p^*,* *resp.* $\wedge^k E_p$*,* $E_p \oplus E'_p$*,* $E_p \otimes E'_p$*,* $\mathrm{Hom}(E_p, E'_p), \cdots$ *op natuurlijke wijze de structuur van een vectorbundel* ξ^**, resp.* $\wedge^k\xi$*,* $\xi \oplus \xi'$*,* $\xi \otimes \xi'$*,* $Hom(\xi, \xi'), \cdots$*.*

Bewijs. We doen dit eerst voor $\xi \otimes \xi'$. We kiezen een atlas voor ξ en een atlas voor ξ'. Door de intersecties te nemen van de open delen van de eerste met die van de laatste kunnen we er voor zorgen dat ze dezelfde open overdekking van M bepalen: we hebben dus $(U_\alpha, \rho_\alpha)_\alpha$ en $(U_\alpha, \rho'_\alpha)_\alpha$. Hierbij horen overgangsfunkties $h_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ en $h'_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r', \mathbb{R})$. We willen nu het vorig lemma toepassen op de collectie $E_p \otimes E'_p$, $p \in M$, en de isomorfismen $\rho_{\alpha,p} \otimes \rho'_{\alpha,p}$: $E_p \otimes E'_p \to \mathbb{R}^r \otimes \mathbb{R}^{r'} (\cong \mathbb{R}^{rr'})$, $p \in U_\alpha$. Aan de voorwaarde van het lemma is voldaan, want de overgangsfunktie bij (α, β),

$$p \in U_\alpha \cap U_\beta \mapsto h_{\alpha,\beta}(p) \otimes h'_{\alpha,\beta}(p) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^r \otimes \mathbb{R}^{r'}) \cong \mathrm{GL}(rr', \mathbb{R}),$$

is differentieerbaar. Dus hebben we een vectorbundel $\xi \otimes \xi'$ over M.

De andere gevallen gaan analoog: we moeten dan opmerken dat de matrices

$$\begin{aligned}
(h_{\alpha,\beta}(p)^t)^{-1} &\in \mathrm{GL}(r, \mathbb{R}),\\
\wedge^k h_{\alpha,\beta}(p) \in \mathrm{GL}(\wedge^k \mathbb{R}^r) &\cong \mathrm{GL}(\binom{r}{k}, \mathbb{R}),\\
h_{\alpha,\beta}(p) \oplus h'_{\alpha,\beta}(p) &\in \mathrm{GL}(r + r', \mathbb{R}),\\
(s \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^{r'}) \mapsto h'_{\alpha,\beta}(p) s h^{-1}_{\alpha,\beta}(p)) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^{r'})) &\in\\
\mathrm{GL}(\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^{r'})) &\cong \mathrm{GL}(rr', \mathbb{R}),\\
&\cdots
\end{aligned}$$

differentieerbaar van $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ afhangen. □

We generaliseren het begrip deelvectorruimte tot:

Definitie 8.5. Zij $\xi : E \to M$ een vectorbundel van rang r. Een *deelvectorbundel* van ξ van rang $r' \leq r$ is gegeven door een deelverzameling $E' \subset E$ met de eigenschap dat er een atlas (U_α, ρ_α) voor ξ bestaat met $E' \cap E_{U_\alpha} = \rho_\alpha^{-1}(\mathbb{R}^{r'} \times 0)$ voor alle α.

Het is duidelijk dat dan $\xi' := \xi|_{E'}$ een vectorbundel is van rang r'. Uit Lemma 8.3 volgt dat de vereniging van quotiënten $E/E' := \coprod_{p \in M} E_p/E'_p$ met zijn projectie $E/E' \to M$ de structuur heeft van een vectorbundel van rang $r - r'$ die $(U_\alpha, \bar\rho_\alpha)$ als atlas heeft. Hier is $\bar\rho_\alpha$ de vereniging over $p \in U_\alpha$ van de door ρ_α bepaalde isomorfismen $E_p/E'_p \cong \mathbb{R}^r/\mathbb{R}^{r'} \times 0 \cong \mathbb{R}^{r-r'}$. We noemen dit de *quotiëntbundel* van ξ naar ξ'. Een deelvectorbundel geven we aan met een inclusieteken: $\xi' \subset \xi$, en de bijbehorende quotiëntbundel met het quotiëntteken: ξ/ξ'.

Voorbeeld 8.6. Zij M een deelvariëteit van een variëteit N. Dan is τ_M een deelbundel van de beperking $\tau_N|M$ van τ_N tot M. De quotiëntbundel $\tau_{N,M}/\tau_M$ heet de *normalenbundel* van M in N.

Verandering van basis. Laat gegeven zijn afbeelding $f : M \to N$ tussen variëteiten en een vectorbundel van rang r over N: $\xi : E \to N$. We gaan een vectorbundel $f^*\xi$ definiëren over M, de *langs* f *teruggehaalde* van ξ. Het komt er op neer dat we boven $p \in M$ de vectorruimte $E_{f(p)}$ plaatsen. Preciezer, de totale ruimte van $f^*\xi$ zal zijn de deelruimte van $E \times M$ gedefinieerd door

$$f^*E := \{(z, p) \in E \times M \mid f(p) = \xi(z)\}.$$

Deze heeft een evidente projectie $f^*\xi : f^*E \to M$ (er is ook een afbeelding $f^*E \to E$; die geven we aan met $\xi^*(f)$). We passen weer Lemma 8.3 toe om in te zien dat dit vectorbundel is: is $(V_\alpha, \rho_\alpha)_\alpha$ een atlas voor ξ, laat dan $f^*\rho_\alpha : f^*E_{V_\alpha} \to \mathbb{R}^r$ de samenstelling $f^*E_{V_\alpha} \to E_{V_\alpha}$ gevolgd door ρ_α zijn. Dan is $(f^{-1}V_\alpha, f^*\rho_\alpha)_\alpha$ een atlas voor $f^*\xi$.

Sneden en homomorfismen. Is $\xi : E \to M$ een rang r vectorbundel, dan is een *snede* van ξ een afbeelding $s : M \to E$ met $s(p) \in E_p$ voor alle $p \in M$. Dus een snede van de raakbundel van M is een vectorveld. De sneden van ξ vormen een $\mathbb{R}$-vectorruimte en hebben—net als vectorvelden—een scalaire vermenigvuldiging met funkties op M. Een *lokale snede* van ξ is een snede van ξ_U voor een niet-lege open $U \subset M$ (dus een afbeelding $s : U \to E$ met $s(p) \in E_p$ voor alle $p \in U$). Voor $U \subset M$ open geven we de collectie van sneden van ξ_U aan met $\mathcal{E}(U, \xi)$. De collectie van alle lokale sneden van ξ (dus de vereniging der $\mathcal{E}(U, \xi)$ over de open $U \subset M$) noteren we met $\mathcal{E}_M(\xi)$. Analoog schrijven we $\mathcal{E}(U)$ voor de algebra van (als altijd, differentieerbare) funkties $U \to \mathbb{R}$ en $\mathcal{E}_M$ voor hun vereniging.

Zijn ξ en η vectorbundels over M, dan is een *vectorbundelhomomorfisme* $\phi : \xi \to \eta$ een differentieerbare afbeelding $\phi : E(\xi) \to E(\eta)$ die iedere vezel $E(\xi)_p$ lineair naar $E(\eta)_p$ afbeeldt. Als we ξ en η middels een lokale trivialisatie over een open $U \subset M$ vereenzelvigd hebben met $\mathbb{R}^r \times U \to U$ en $\mathbb{R}^s \times U \to U$, dan wordt ϕ over U gegeven door een afbeelding van de vorm $(v, p) \mapsto (s_p(v), p)$, waar $s_p \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s)$ differentieerbaar van p afhangt. We zien zo dat ϕ niets anders is dan een snede van $Hom(\xi, \eta)$. Het is duidelijk dat een samenstelling van een homomorfisme van vectorbundels weer een homomorfisme van vectorbundels is. We merken op dat voor iedere nietlege open U, ϕ een afbeelding $\mathcal{E}(U, \xi) \to \mathcal{E}(U, \eta)$ bepaalt (een homomorfisme van $\mathcal{E}(U)$-modulen).

Eenvoudige voorbeelden van homomorfismen vinden we bij een deelbundel: zowel de inclusie $\xi' \subset \xi$ als de bijbehorende projectie $\xi \to \xi/\xi'$ zijn het. Hier zijn nog twee andere voorbeelden.

VOORBEELD 8.7. Laat V een vectorveld zijn op M. Dan definieert inwendige contractie met V een homomorfisme van vectorbundels

$$\iota_V : \wedge^p \tau_M^* \to \wedge^{p-1} \tau_M^*.$$

VOORBEELD 8.8. Laat $f : M \to N$ een afbeelding zijn tussen variëteiten. De teruggehaalde τ_N, $f^*\tau_N$, is een vectorbundel over M waarvan de vezel over $p \in M$ gelijk is aan $T_{f(p)}N$. Dus de vezel van $Hom(\tau_M, f^*\tau_N)$ boven p is de ruimte $\mathrm{Hom}(T_pM, T_{f(p)}N)$. Deze bevat de afgeleide D_pf. We zien zo dat Df als een homomorfisme $\tau_M \to f^*\tau_N$ opgevat kan worden.

Een homomorfisme van vectorbundels $\xi \to \eta$ heet een *isomorfisme* als het bijectief is en zijn inverse ook een homomorfisme van vectorbundels is. In dat geval zeggen we natuurlijk dat de vectorbundels *isomorf* zijn. Zo is een vectorbundel over M van rang r triviaal precies dan als hij isomorf is met $\mathbb{R}^r \times M \to M$.

9. Differentialen en differentiaalvormen

Differentialen. In de analyse en elders komen we nogal eens het begrip differentiaal tegen. Het is meestal wel duidelijk hoe er mee gerekend moet worden, maar wat het is blijft doorgaans ongezegd. Daar doen we nu wat aan.

DEFINITIE 9.1. Is M een variëteit , dan is de *coraakruimte* T_p^*M van M te $p \in M$ de duale van de raakruimte T_pM en de bundel van coraakruimten, $\tau_M^* : T^*M \to M$, heet de *coraakbundel* van M. Een snede van de coraakbundel heet een *differentiaal* op M.

Is $f : M \to \mathbb{R}$ een funktie, dan is voor iedere $p \in M$, $D_pf : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ op te vatten als een element van T_pM^*. Geven we dat element aan met df_p, dan vinden we zo een differentiaal df op M.

Laten we het geval bekijken van een open deel U van $\mathbb{R}^m$. Dan is voor een funktie $f : U \to \mathbb{R}$, de waarde van df_p op $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ gelijk aan $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$. Nemen we even $f = x^j$, dan zien we dat dx^j op $\frac{\partial}{\partial x^i}$ de waarde δ_i^j aanneemt. Dus $(dx^1, \ldots, dx^m)$ is (vezelsgewijs) de basis duaal aan $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m})$. Derhalve is iedere differentiaal ω op U uniek te schrijven als

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega_i dx^i$$

met $\omega_i : U \to \mathbb{R}$ de 'waarde' van ω op $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Voor de $f : U \to \mathbb{R}$ van zo-even krijgen we dan $df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Algemener, is (U, κ) een kaart voor de variëteit M, dan is $d\kappa^1, \ldots, d\kappa^m$ een basis van differentialen op U in de zin dat iedere differentiaal ω op U uniek te schrijven is als een $\mathcal{E}(U)$-lineaire combinatie van $d\kappa^1, \ldots, d\kappa^m$:

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega_i d\kappa^i \text{ met } \omega_i = \omega(\frac{\partial}{\partial \kappa^i}),$$

i.h.b. is voor $f \in \mathcal{E}(U)$

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \kappa^i} d\kappa^i,$$

waar $\partial f / \partial \kappa^i$ de voor de hand liggende betekenis heeft: de waarde van het vectorveld $\partial / \partial \kappa^i$ toegepast op f.

De vorming van de differentiaal van een funktie op een open deel van M voldoet aan de volgende drie eigenschappen:

lokaal karakter: als $U' \subset U \subset M$ open zijn, dan geldt voor een funktie $f : U \to \mathbb{R}$ dat $df|_{U'} = d(f|_{U'})$,

lineariteit: de afbeelding $f \mapsto df$ is $\mathbb{R}$-lineair,

Leibnitzregel: als $f, g : U \to \mathbb{R}$, dan is $d(f.g) = fdg + gdf$

De laatste eigenschap is in wezen de produktregel. Dat deze eigenschappen overeenkomen met die voor een vectorveld is geen toeval: is V een vectorveld op M, dan geldt voor een $\mathbb{R}$-waardige funktie f op een open deel U van M dat $V(f)(p) = D_pf(V_p) = df_p(V_p)$ voor $p \in U$. Hieraan zien we dat $V(f)$ alleen van df afhangt. Preciezer: V beschouwd als afbeelding van $\mathcal{E}(U)$ naar zichzelf is de samenstelling van d en de inwendige contractie ι_V:

$$V = \iota_V d.$$

De inwendige contractie is lineair over $\mathcal{E}(U)$ (niet alleen maar over $\mathbb{R}$) en dat maakt dat V de genoemde eigenschappen met de operator d deelt. (De operator d is wat men in de algebra noemt de *universele derivatie* van $\mathcal{E}(U)$.)

OPGAVE 30. Zij $U \subset \mathbb{R}^m$ een open blok en zij $\omega := \sum_{i=1}^m \omega_i dx^i$ een differentiaal op U. Bewijs dat ω van de vorm df is voor een funktie $f : U \to \mathbb{R}$ precies dan als geldt $\partial\omega_j/\partial x^i = \partial\omega_i/\partial x^j$ voor alle i, j.

OPGAVE 31. Beschouw de differentiaal op $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ gedefinieerd door $\omega := (x^2+y^2)^{-1}(xdy - ydx)$. Bewijs dat ω lokaal te schrijven is als df voor een funktie f, maar dat het niet mogelijk is zo'n f voor heel $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ te vinden. Hint: bereken de integraal van ω over de eenheidscirkel.)

Laat nu $F : M \to N$ afbeelding zijn tussen variëteiten. Is g een $\mathbb{R}$-waardige funktie op een open deel V van N, dan is de samenstelling gF er een op het open deel $F^{-1}V$ van M. Geven we die aan met F^*g, dan hebben we dus $F^* : \mathcal{E}(V) \to \mathcal{E}(F^{-1}V)$ (een homomorfisme van commutatieve $\mathbb{R}$-algebra's). Dit is het 'terughalen langs F' van een funktie. Iets dergelijks kan ook voor differentialen: is ω een differentiaal op een open deel V van N, dan is voor iedere $p \in F^{-1}V$, de samenstelling van $D_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ met $\omega_{F(p)} : T_{F(p)}N \to \mathbb{R}$ een lineaire funktie op T_pM, anders gezegd, een element van T_pM^*. Dit hangt differentieerbaar van p af en zo vinden we een differentiaal op $F^{-1}V$. Die geven we aan met $F^*\omega$.

LEMMA 9.2. *De operator d is verwisselbaar met terughalen: $dF^* = F^*d$.*

BEWIJS. Laat $g : V \to \mathbb{R}$ een funktie zijn op een open deel van N en laat $p \in F^{-1}V$ en $v \in T_pM$ Dan is

$$(F^*dg)_p(v) = dg_{F(p)}((D_pF)(v)) = Dg_{F(p)}D_pF(v) = D(gF)_p(v) = d(F^*g)_p(v),$$

waarbij we de kettingregel gebruikten. □

Differentiaalvormen. Eerst maar de definitie.

DEFINITIE 9.3. Een *vorm van graad k*, of kortweg een *k-vorm*, op de variëteit M, $k = 0, 1, 2, \ldots$, is een snede van $\wedge^k \tau_M^*$.

Dus een 0-vorm is een funktie op M en een 1-vorm is een differentiaal op M. Een k-vorm α op M kan ook opgevat worden als een differentieerbare afbeelding die aan ieder k-tal raakvectoren $(v_1, \ldots, v_k)$ genomen uit dezelfde raakruimte T_pM een reëel getal toevoegt, lineair in iedere v_i (indien beperkt tot een raakruimte) en nul als twee nevengeschikte argumenten gelijk zijn.

We geven de k-vormen op een open deel $U \subset M$ aan met $\mathcal{E}^k(U)$ en de vereniging van de $\mathcal{E}^k(U)$'s met $\mathcal{E}^k_M$. Merk op dat $\mathcal{E}^\bullet(U) := \oplus_{k=0}^m \mathcal{E}^k(U)$ een algebra is: als $\alpha, \beta \in \mathcal{E}^\bullet(U)$, dan hebben we $\alpha \wedge \beta$ puntsgewijs gedefinieerd.

Is (U, κ) een kaart voor M, dan zagen we dat $d\kappa^1, \ldots, d\kappa^m$ een basis is van differentialen op U. In dezelfde zin is de collectie $d\kappa^I = d\kappa^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\kappa^{i_k}$, waar $I = (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m)$ de k-elementige deelverzamelingen van $\{1, \ldots, m\}$ doorloopt een basis van k-vormen op U: iedere k-vorm α op U is uniek te schrijven als

$$\alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I d\kappa^I \text{ met } \alpha_I \in \mathcal{E}(U).$$

Vormen kunnen op dezelfde manier als differentialen worden teruggehaald langs een afbeelding $F : M \to N$ van variëteit: is $\alpha \in \mathcal{E}^k(V)$, met $V \subset N$ open, dan is $F^*\alpha \in \mathcal{E}^k(F^{-1}V)$ gekarakteriseerd door

$$F^*\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(D_pF(v_1), \ldots, D_pF(v_k)),$$

waar $p \in F^{-1}V$ en $v_1, \dots, v_k \in T_pM$. Een bijzonder geval is wanneer M een deelvariëteit is van N: een vorm α op N gaat dan over in een vorm op M; dit is de *beperking van α als vorm.* (Dat is niet hetzelfde als de beperking van α als snede van een vectorbundel. Waarom niet?)

OPMERKING 9.4. In de toepassingen komen we de begrippen *covariante tensor* en *contravariante tensor* tegen. Dit zijn respectievelijk sneden van $(\tau_M^*)^{\otimes k}$ en $\tau_M^{\otimes k}$ voor een zekere variëteit M en zekere k. Algemener heet een begrip covariant als een diffeomorfisme het terughaalt en contravariant als een diffeomorfisme het meevoert. Zo is een vectorveld een contravariant en een k-vorm een covariant begrip. Dit is enigszins in conflict met wat in de wiskunde gebruikelijk is, want daar is de conventie juist omgekeerd.

10. De uitwendige afgeleide

We gaan de d-operator op funkties voortzetten tot één op vormen. Met deze voortzetting krijgen we van doen als we sommige natuurwetten (zoals de Maxwellvergelijkingen) zo natuurlijk mogelijk willen formuleren. We komen hem ook tegen in de stelling van Stokes, een elegante en inzichtelijke veralgemening van het gelijkgenaamde stellingenpakket uit de analyse.

STELLING 10.1. *Voor iedere variëteit M is er precies één $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $d : \mathcal{E}_M^k \to \mathcal{E}_M^{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$ die voor $k = 0$ gelijk is aan vorming van de differentiaal en waarvoor de volgende eigenschappen gelden:*

lokaal karakter: *d behoudt het domein van een vorm en is verwisselbaar met beperking: zijn $U' \subset U \subset M$ open, dan geldt voor iedere $\alpha \in \mathcal{E}^\bullet(U)$ dat $d\alpha|_{U'} = d(\alpha|_{U'})$,*

Leibnitzregel: *als $\alpha \in \mathcal{E}^k(U)$ en $\beta \in \mathcal{E}^l(U)$, dan is $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$,*

vlakheid: *$dd = 0$.*

Bovendien is d verwisselbaar is met het terughalen van vormen langs een afbeelding $F : M \to N$ tussen variëteiten: $F^*(d\alpha) = d(F^*\alpha)$.

BEWIJS. We doen eerst de uniciteit. Laat (U, κ) een kaart voor M zijn. Vanwege de vlakheid is dan $dd\kappa^i = 0$ voor $i = 1, \dots, m$ en herhaald toepassen van de Leibnitzregel geeft dan ook $d(d\kappa^I) = 0$ voor iedere $I \subset \{1, \dots, m\}$. Dus als $\alpha = \sum_I \alpha_I d\kappa^I$, dan is $d\alpha = \sum_I d(\alpha_I) \wedge d\kappa^I$.

Nu de existentie. Het ligt voor de hand om voor een vorm $\alpha = \sum_I \alpha_I d\kappa^I$ op U $d\alpha$ door de voorgaande formule te definiëren. Dan geeft dit voor funkties op U inderdaad de differentiaal. Verder is $d : \mathcal{E}^\bullet(U) \to \mathcal{E}^\bullet(U)$ $\mathbb{R}$-lineair. Dus op U hoeven we de Leibnitzregel en het vlak zijn alleen voor 'monomiale' vormen van het type $fd\kappa^I$ na te gaan. Laat dus $fd\kappa^I$ en $gd\kappa^J$ zulke vormen zijn. Als $I \cap J \neq \emptyset$, dan krijgen we steeds nul. Onderstel daarom $I \cap J = \emptyset$ en laat $\epsilon \in \{\pm 1\}$ het teken zijn gedefinieerd door $d\kappa^I \wedge d\kappa^J = \epsilon d\kappa^{I \cup J}$. Dan is

$$
\begin{aligned}
d(fd\kappa^I \wedge gd\kappa^J) = d(\epsilon f.gd\kappa^{I\cup J}) = \\
= d(\epsilon f.g) \wedge d\kappa^{I\cup J} = \epsilon(gdf + fdg) \wedge d\kappa^{I\cup J} = \\
= (gdf + fdg) \wedge d\kappa^I \wedge d\kappa^J = \\
= (df \wedge d\kappa^I) \wedge gd\kappa^J + (-1)^{|I|} fd\kappa^I \wedge dg \wedge d\kappa^J = \\
= d(fd\kappa^I) \wedge gd\kappa^J + (-1)^{|I|} fd\kappa^I \wedge d(gd\kappa^J),
\end{aligned}
$$

wat toont dat aan de Leibnitzregel is voldaan. Nu het vlak zijn:

$$dd(f d\kappa^I) = d(df \wedge d\kappa^I) = d\big(\sum_i \frac{\partial f}{\partial \kappa^i} d\kappa^i \wedge d\kappa^I\big) = \sum_{j,i} \frac{\partial^2 f}{\partial \kappa^j \partial \kappa^i} d\kappa^j \wedge d\kappa^i \wedge d\kappa^I.$$

Omdat $\partial^2 f/\partial\kappa^j\partial\kappa^i$ symmetrisch is in i and j en $d\kappa^j \wedge d\kappa^i = -d\kappa^i \wedge d\kappa^j$ volgt dat de laatste uitdrukking nul is.

De al afgeleide uniciteitseigenschap waarborgt dat op een doorsnede van twee kaartdomeinen de definitie van d eenduidig is. Daaruit volgt ook het lokale karakter van d.

Tenslotte het verwisselen van d met F^*. We weten al dat dit geldt voor funkties. Lokaal is op N een k-vorm een lineaire combinatie van vormen α van de gedaante $g dg_1 \wedge \cdots dg_k$. Nu is $F^*(\alpha) = F^*gF^*dg_1 \wedge \cdots \wedge F^*dg_k = F^*gdF^*g_1 \wedge \cdots \wedge dF^*g_k$ en dus is

$$\begin{aligned} dF^*(\alpha) &= dF^*g \wedge dF^*g_1 \wedge \cdots \wedge dF^*g_k = F^*dg \wedge F^*dg_1 \wedge \cdots \wedge F^*dg_k = \\ &= F^*(dg \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k) = F^*d(g dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k) = F^*d\alpha. \end{aligned}$$

□

De operator d heet de *uitwendige afgeleide*. Laten we die nog eens uitschrijven op een open deel U van $\mathbb{R}^m$: een k-vorm α op U heeft de gedaante $\alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I dx^I$ en dan is

$$d\alpha = \sum_I \sum_{i=1}^m \frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I = \sum_I \sum_{i \notin I} \epsilon(i, I) \frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i} dx^{I \cup \{i\}},$$

waar $\epsilon(i, I) = (-1)^l$ als $i \notin I$ en er in I precies l elementen $< i$ zijn (en gelijk nul als $i \in I$).

We bekijken een paar speciale gevallen. Voor $k = 1$ hebben we:

$$d(\sum_{j=1}^m \omega_j dx^j) = \sum_{1 \le i < j \le m} (\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}) dx^i \wedge dx^j,$$

Voor $m = 3$ lijkt dit op de rotatie van een vectorveld (we komen hierop terug). Is $V = \sum_{i=1}^m V^i \partial/\partial x^i$ een vectorveld op U, dan is :

$$\begin{aligned} d\iota_V(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m) &= d\big(\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} V^i dx^1 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \cdots \wedge dx^m\big) = \\ &= \big(\sum_{i=1}^m \frac{\partial V^i}{\partial x^i}\big) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m. \end{aligned}$$

We zien hier de divergentie van V als coëfficiënt van het 'volume-element' $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ optreden. Dit heeft de interpretatie als infinitesimale verandering van volume onder de lokale stroming voortgebracht door V (zie Opgave 33). Een stroming van een incompressibele vloeistof (in een open deel van $\mathbb{R}^m$) heeft daarom een vectorveld met divergentie nul als infinitesimale voorbrenger. Een divergentie van een vectorveld V op een variëteit M van dimensie m kunnen we alleen maar definiëren m.b.t. een m-vorm μ die nergens nul is (een volumevorm): het voorgaande suggereert die vast te leggen door

$$\mathrm{div}(V).\mu = d\iota_V(\mu).$$

OPGAVE 32. Met behulp van Opmerking 3.3 van Bijlage A bezien we een k-vorm op een variëteit M als een funktie op $\wedge^k TM$. De bedoeling is te laten zien dat als α een k-vorm is op een variëteit M, dat $d\alpha$ de eigenschap heeft (die $d\alpha$ in feite karakteriseert) dat voor ieder $(k+1)$-tal vectorvelden $V_0, \ldots, V_k$ op M,

$$d\alpha(V_0 \wedge \cdots \wedge V_k) = \sum_{1 \le i < j \le m} (-1)^{i+j-1} \alpha([V_i, V_j] \wedge V_0 \wedge \cdots \widehat{V_i} \cdots \widehat{V_j} \cdots \wedge V_k) \\ + \sum_{i=0}^{k} (-1)^i V_i \alpha(V_0 \wedge \cdots \widehat{V_i} \cdots \wedge V_k).$$

(We zien hier aan het werk de *Koszulregel*, een heuristisch principe dat zegt dat een oneven variabele die over een oneven variabele springt een minteken meekrijgt; de V_i's zijn oneven variabelen.) We doen dit in etappes:

(a) Verifieer de identeit voor het geval $M = U$ een open deel is van $\mathbb{R}^m$, α van de vorm $\alpha = f dx^I$, $|I| = k < m$, en $V_i = \partial/\partial x^{i+1}$, $i = 0, \ldots, k$.
(b) Idem voor α willekeurig op U en iedere V_i een coördinaatvectorveld (d.w.z. van de vorm $\partial/\partial x^{j_i}$ voor een j_i).
(c) Laat zien dat het rechterlid multilineair is over de funkties op M (V_i vervangen door fV_i voor een i vermenigvuldigt de hele uitdrukking met f).
(d) Bewijs nu de identiteit algemeen.
(e) Geef een ander, direct bewijs van deze identiteit door gebruik te maken van de karakteriserende eigenschappen 10.1 van de uitwendige afgeleide.

Is V een vectorveld, dan definiëren de *Lie-afgeleide* $\mathcal{L}_V$ als afbeelding $\mathcal{E}^k_M \to \mathcal{E}^k_M$, $k = 0, 1, \ldots$ door

$$\mathcal{L}_V := \iota_V d + d\iota_V.$$

(Omdat $dd = 0$ en $\iota_V \iota_V = 0$, kunnen we die ook schrijven als $(\iota_V + d)^2$.) Merk dat voor een funktie f geldt $\mathcal{L}_V(f) = (\iota_V d + d\iota_V)(f) = \iota_V df = V(f)$.

PROPOSITIE 10.2. *De Lie-afgeleide voldoet aan de volgende eigenschappen.*

(i) *$\mathcal{L}_V$ commuteert met d: $d\mathcal{L}_V = \mathcal{L}_V d$,*
(ii) *(Leibnitzregel:) als $\alpha \in \mathcal{E}^k(U)$ en $\beta \in \mathcal{E}^l(U)$, dan is*

$$\mathcal{L}_V(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_V(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_V(\beta),$$

(iii) *(Infinitesimaal terughalen van een vorm:) is V de infinitesimale voortbrenger van een stroming H op een variëteit M, dan geldt voor iedere vorm α op een open deel van M dat*

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} H_t^* \alpha = L_V \alpha.$$

BEWIJS. Het is duidelijk dat $d\mathcal{L}_V = d\iota_V d = \mathcal{L}_V d$. Verder is (ii) is een direkt gevolg van de Leibnitzregel voor de uitwendige afgeleide en een soortgelijke eigenschap voor het inwendig produkt 3.5. We concentreren ons daarom op (iii).

Omdat voor een funktie f is $\mathcal{L}_V(f) = V(f)$, dus (iii) geldt dan vanwege 6.3. Het geldt dan ook voor df, want

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} H_t^* df = d(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}(f H_t)) = d\iota_V df = \mathcal{L}_V(df).$$

Het algemene geval volgt nu uit de produktformule: Een k-vorm met $k \geq 1$ is lokaal de som van vormen van de gedaante $\alpha = f df_1 \wedge \cdots \wedge df_k$. Dan is $H_t^*\alpha = H_t^* f (H_t^* df_1) \wedge \cdots \wedge (H_t^* df_k)$. Differentieren naar t gevolgd door $t = 0$ stellen geeft:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} H_t^*\alpha = (\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} H_t^* f) df_1 \wedge \cdots \wedge df_k + \sum_i f df_1 \wedge \cdots \wedge (\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} H_t^* df_i) \wedge \cdots df_k =$$

$$= \mathcal{L}_V(f) df_1 \wedge \cdots \wedge df_k + \sum_i f df_1 \wedge \cdots \wedge (\mathcal{L}_V(df_i)) \wedge \cdots df_k =$$

$$= \mathcal{L}_V(f df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) = \mathcal{L}_V(\alpha),$$

waarbij we bij de laatste overgang onderdeel (ii) gebruikten. □

OPGAVE 33. Zij H een lokale stroming op een open deel U van $\mathbb{R}^m$ met infinitesimale voortbrenger V. Bewijs dat

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} H_t^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m) = \mathrm{div}(V) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

11. De Rhamcohomologie I

Een vorm α op een variëteit M heet *gesloten* resp. *exact* als geldt $d\alpha = 0$ resp. $\alpha = d\beta$ voor een vorm β. Dus als M samenhangend is, dan zijn de gesloten 0-vormen op M de constante funkties. Uit het vlak zijn van d volgt dat een exacte vorm vanzelf gesloten is. 'Gesloten zijn' is een lokale eigenschap (d.w.z. daaraan is voldaan zodra er aan voldaan is op open delen van M die M overdekken), maar 'exact zijn' is dat niet. Niettemin is voor vormen van positieve graad 'lokaal exact zijn' hetzelfde als gesloten zijn. Dit volgt uit:

PROPOSITIE 11.1 (Poincarélemma). *Iedere gesloten vorm van graad $k > 0$ op $\mathbb{R}^m$ is exact.*

We zullen dit afleiden uit een wat algemener resultaat. Omdat te formuleren is het handig over enige terminologie te beschikken.

DEFINITIE 11.2. De k-de *De Rhamcohomologiegroep* $H^k_{DR}(M)$ van een variëteit M is de vectorruimte van gesloten k-vormen op M modulo de deelruimte van exacte k-vormen.

Het Poincarélemma zegt dus dat $H^k_{DR}(B^m) = 0$ als $k \geq 1$. Uit 9.2 volgt dat een afbeelding $f : M \to N$ van variëteiten een gesloten resp. exacte vorm op N naar een dito vorm op M terughaalt: is b.v. ω een gesloten k-vorm op N, dan is $f^*\omega$ een gesloten k-vorm op M, want $df^*\omega = f^*d\omega = 0$. Hieruit volgt dat f^* een lineare afbeelding tussen de De Rhamcohomologiegroepen bepaalt:

$$H^k(f^*) : H^k_{DR}(N) \to H^k_{DR}(M).$$

Het Poincarélemma blijkt nu een direct gevolg te zijn van:

PROPOSITIE 11.3. *Is M een variëteit, dan bepaalt de projectie $\pi : \mathbb{R} \times M \to M$ een isomorfisme op De Rhamcohomologie in iedere graad. Een inverse wordt geïnduceerd door iedere inbedding $i_t : p \in M \mapsto (t, p) \in \mathbb{R} \times M$, $t \in \mathbb{R}$.*

BEWIJS. Omdat $\pi i_t : M \to M$ de identiteit is $H^k(i_t^*\pi^*) = H^k(i_t^*)H^k(\pi^*)$ dat ook (als transformatie in $H^k_{DR}(M)$). In het bijzonder is $H^k(\pi^*)$ injectief. Het is derhalve voldoende te bewijzen dat $H^k(\pi^*)$ surjectief is, anders gezegd, dat iedere gesloten vorm op $\mathbb{R} \times M$ de som is van een exacte vorm en een vorm die van M

afkomstig is. Nu is een vorm α op $\mathbb{R} \times M$ is uniek te schrijven als $\alpha' + dt \wedge \alpha''$, waar α' en α'' vormen zijn waarin dt niet voorkomt (en die dus beschouwd kunnen worden als vormen op M die van t afhangen). Laat nu β de vorm zijn die we krijgen door α'' naar t te integreren:

$$\bar{\alpha}_p(t) := \int_0^t \alpha''_p(\tau) dt.$$

Hier is het rechterlid een Riemannintegraal (die dus als gemeenschappelijke limiet van boven- en ondersommen begrepen wordt) welke in termen van een kaart κ een conventionele gedaante krijgt: als $\alpha''_p(t) = \sum_I \alpha''_I(t,p) d\kappa^I$, waar de som is over de $(k-1)$-elementige deelverzamelingen I van $\{1, \ldots, m-1\}$, dan integreren we iedere coefficient α''_I naar t. Schrijven we $d\bar{\alpha}$ op dezelfde manier als α: $d\bar{\alpha} = (d\bar{\alpha})' + dt \wedge (d\bar{\alpha})''$, dan zien we dat $(d\bar{\alpha})'' = \alpha''$. Dus $\tilde{\alpha} := \alpha - d\bar{\alpha}$ is een vorm waarin dt niet voorkomt. Stel dat α gesloten is. Dan is $\tilde{\alpha}$ het ook en omdat $(d\tilde{\alpha})''$ gelijk aan de afgeleide van $\tilde{\alpha}$ naar t volgt dat $\tilde{\alpha}$ is constant in t. Met andere woorden, $\tilde{\alpha}$ is afkomstig van M. □

Bewijs van het Poincarélemma. Met induktie zien we dat de constante afbeelding $\mathbb{R}^m \to \{0\}$ een isomorfisme op De Rhamcohomologie geeft. Hieruit volgt meteen de uitspraak. □

De De Rhamcohomologiegroepen zijn in feite te te vereenzelvigen met de *singuliere cohomologiegroepen* van M met reëele coëfficiënten. Dat zijn vectorruimten die voor iedere topologische ruimte gedefinieerd zijn (zie daarvoor het college Algebraïsche topologie). In Opgave 37 wordt dit in ieder geval aannemelijk gemaakt voor ruimten die homotopie-equivalent zijn met een differentieerbare variëteit.

Opgave 34. Laat zien dat we voor een samenhangende variëteit M geldt: $H^0_{DR}(M) = \mathbb{R}$.

Opgave 35. Bewijs dat $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ en S^m dezelfde De Rhamcohomologie hebben.

Opgave 36. Laat zien dat de gesloten vormen op een variëteit M een deelalgebra vormen voor $\wedge$. Laat ook zien dat de exacte vormen hierin een tweezijdig ideaal vormen. Concludeer dat $H^\bullet_{DR}(M) := \oplus_{k=0}^{\dim M} H^k_{DR}(M)$ een algebrastructuur heeft die gegradeerd-commutatief is in de zin dat als $a \in H^k_{DR}(M)$ en $b \in H^l_{DR}(M)$, dan $ba = (-1)^{kl} ab$. (Dus $aa = 0$ als a oneven graad heeft.) Laat ook zien dat een afbeelding van variëteiten $f : M \to N$ een algebrahomomorfisme $H^\bullet_{DR}(f) : H^\bullet_{DR}(N) \to H^\bullet_{DR}(M)$ induceert.

Opgave 37. Bij het tweede onderdeel mag de volgende benaderingsstelling gebruikt worden: *Zij $f : M \to N$ een continue afbeelding van variëteiten die differentieerbaar is op een open omgeving van een gesloten deel G van M. Dan is er een continue afbeelding $F : M \times [0,1] \to N$ zodat $f_0 = f$, f_1 differentieerbaar en $f_t|_G = f|_G$ voor all $t \in [0,1]$.* (We noemen f_1 dan een *differentieerbare representant modulo G van de homotopieklasse* van f.)

(a) Laat $f, f' : M \to N$ afbeeldingen zijn van variëteiten die *differentieerbaar homotoop* zijn in de volgende zin: er is een differentieerbare afbeelding $F : M \times \mathbb{R} \to N$ zodat als we schrijven $f_t(p) := F(p,t)$ er geldt dat $f_t = f$ voor $t \leq 0$, $f_t = f'$ voor $t \geq 1$. Bewijs dat f en f' dezelfde afbeeldingen op De Rhamcohomologie geven.

(b) Zij nu $g : M \to N$ een *continue* afbeelding van variëteiten. Bewijs dat ieder paar differentieerbare representanten h, h' van de homotopieklasse van f differentieerbaar homotoop is. Concludeer dat een homotopieklasse van afbeeldingen $M \to N$ eenduidig een algebrahomomorfisme $H^\bullet_{DR}(N) \to H^\bullet_{DR}(M)$ induceert. In het bijzonder, dat homotopie-equivalente variëteiten dezelfde De Rhamcohomologie hebben.

12. De stelling van Stokes

Integratie van vormen. We gaan een m-vorm op een variëteit van dimensie m interpreteren als een integrand, d.w.z. als een object dat geïntegreerd kan worden. Daarvoor is enige extra structuur op de variëteit in kwestie vereist, te weten een oriëntatie. We willen ons niet bezig houden met oneigenlijke integralen en daarom beperken we ons tot vormen met compacte drager. (De *drager* van een vorm is de afsluiting van de verzameling punten waar hij ongelijk nul is.)

We bekijken eerst het geval van een open deel U van $\mathbb{R}^m$. Laat α een m-vorm zijn op U met compacte drager (dus α nul buiten een compact deel van U). Schrijven we $\alpha = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$, dan definiëren we

$$\int_U \alpha := \int_U f(x) dx^1 dx^2 \cdots dx^m,$$

waar het rechterlid de gangbare betekenis heeft. Is h een diffeomorfisme van een open deel V van $\mathbb{R}^m$ op U, dan is de Jacobiaan van h, $\det((\frac{\partial h^i}{\partial y^j})^i_j)$ nergens nul. Noem h *oriëntatiebehoudend* als deze determinant steeds positief is. Dit komt er op neer dat voor iedere $q \in V$ de afgeleide $D_q h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ positieve determinant heeft, anders gezegd, iedere basis van $\mathbb{R}^m$ overvoert in één die dezelfde oriëntatie bepaalt. De transformatieregel voor integralen laat zich nu elegant formuleren als

$$\int_V h^* \alpha = \int_U \alpha.$$

Anders gezegd, integratie van m-vormen is ongevoelig voor oriëntatiebehoudende diffeomorfismen. Dit is het uitgangspunt voor het overhevelen van dit begrip naar zekere variëteiten.

Definitie 12.1. Zij M een variëteit. Dan is een *oriëntatie* van M een keuze van een oriëntatie van iedere raakruimte T_pM op een manier dat deze lokaal constant blijft in de volgende zin: M kan overdekt worden door kaartdomeinen (U, κ) met de eigenschap dat voor iedere $p \in U$ de basis van T_pM duaal aan de basis $(d\kappa^1|_p, \ldots, d\kappa^m|_p)$ van T_pM^* georiënteerd is. Iedere kaart met deze eigenschap heet dan een georiënteerde kaart. Bestaat een oriëntatie voor M, dan zeggen we dat M een *oriënteerbare* variëteit is.

Voorbeeld 12.2. De sfeer S^m is oriënteerbaar: voor $p \in S^m$ oriënteren we T_pS^m als volgt: is $(v_1, \ldots, v_m)$ een basis van T_pS^m, dan is $(p, v_1, \ldots, v_m)$ een basis van $\mathbb{R}^{m+1}$ en we verklaren de eerste georiënteerd als de laatste het is.

Voorbeeld 12.3. Het projectieve vlak P^2 is niet oriënteerbaar: een punt $q \in P^2$ correspondeert met een antipodaal puntenpaar $\{\pm p\}$ op S^2. De afbeelding $\pi : S^2 \to P^2$ beeldt T_pS^2 en $T_{-p}S^2$ isomorf op T_qP^2 af. De gegeven oriëntaties van T_pS^2 en $T_{-p}S^2$ bepalen verschillende oriëntaties voor T_qP^2 (reden: de afgeleide in p van de antipodale afbeelding behoudt de oriëntatie niet). Dus als P^2 oriënteerbaar zou zijn, dan zouden we bij $q \in P^2$ steeds een voorkeurspunt $p \in \pi^{-1}q$ vinden dat continu van q afhangt. Anders gezegd, π heeft een continue snede σ. Maar dan vinden we een splitsing van S^2 in $\sigma(P^2)$ en $-\sigma(P^2)$, wat de samenhang van S^2 tegenspreekt.

OPGAVE 38. Laat zien dat de Möbiusband (te verkrijgen door uit P^2 een punt weg te laten) niet oriënteerbaar is.

OPGAVE 39. Voor welke m is P^m oriënteerbaar?

OPGAVE 40. (Voor hen die het college Topologie hebben gevolgd.) Bewijs dat een samenhangende niet-oriënteerbare variëteit M een overdekking $\pi : \tilde{M} \to M$ van graad 2 heeft met $\tilde{M}$ samenhangend en oriënteerbaar.

Om integralen over variëteiten in te voeren hebben we nodig:

LEMMA 12.4 (Partitie van de eenheid). *Zij M een variëteit en $K \subset M$ compact. Dan is er bij iedere open overdekking $\{U_\alpha\}_\alpha$ van K een eindige collectie funkties $(\phi_i : M \to [0,1])_{i=1}^n$ met som 1 op K en zo dat de drager van iedere ϕ_i een compact deel is van een U_{α_i}.*

BEWIJS. Voor iedere $p \in K$ kiezen we een index α_p met $p \in U_{\alpha_p}$. Met behulp van een kaart te p is het eenvoudig een differentieerbare funktie $f_p : M \to [0,1]$ te vinden met compacte drager in U_{α_p} en f_p constant 1 op een omgeving V_p van p. De collectie $\{V_p\}_{p\in K}$ overdekt K. Kies een eindige deeloverdekking $\{(V_{p_i})_{i=1}^n\}$ van K. Dan is $f := \prod_{i=1}^n (1 - f_{p_i})$ constant 0 op $\cup V_{p_i}$. Het is duidelijk dat $g := f + \sum_i f_{p_i}$ overal positief is. Dan voldoet de collectie $(\phi_i := f_{p_i}/g)_{i=1}^n$, want $\sum_i \phi_i$ is constant 1 op $\cup V_{p_i}$. □

We noemen zo'n collectie funkties een *partitie van de eenheid voor K ondergeschikt aan $\{U_\alpha\}_\alpha$*.

Laat nu M een georiënteerde variëteit zijn van dimensie m en α een m-vorm op M met compacte drager K. Toepassen van het bovenstaande lemma op de collectie domeinen van georiënteerde kaarten geeft een eindige collectie funkties $(\phi_i)_{i=1}^n$ met som 1 op een omgeving van K en zó, dat de drager van ϕ_i een compact deel is van het domein U_i van een georiënteerde kaart κ_i. Dan is voor iedere i, $(\kappa_i^{-1})^*(\phi_i.\alpha)$ een m-vorm op $\kappa_i(U_i)$ met compacte drager, en dus integreerbaar.

PROPOSITIE-DEFINITIE 12.5. *De som $\sum_{i=1}^n \int_{\kappa_i(U_i)} (\kappa_i^{-1})^*(\phi_i.\alpha)$ hangt alleen van α en de oriëntatie van M af. We noemen dit de integraal van α over de (georiënteerde) variëteit M en geven deze aan als $\int_M \alpha$. De integraal hangt lineair van de intregrand af.*

BEWIJS. Is $(\psi_j, V_j, \lambda_j)_j$ een ander stel waarmee we zo'n som kunnen vormen, dan moeten we bewijzen dat

$$\sum_i \int_{\kappa_i(U_i)} (\kappa_i^{-1})^*(\phi_i.\alpha) = \sum_j \int_{\lambda_j(V_j)} (\lambda_j^{-1})^*(\psi_j.\alpha).$$

Het linkerlid is gelijk aan

$$\sum_i \int_{\kappa_i(U_i)} (\kappa_i^{-1})^*(\sum_j \psi_j.\phi_i.\alpha) =$$
$$= \sum_{i,j} \int_{\kappa_i(U_i)} (\kappa_i^{-1})^*(\psi_j.\phi_i.\alpha) = \sum_{i,j} \int_{\kappa_i(U_i\cap V_j)} (\kappa_i^{-1})^*(\psi_j.\phi_i.\alpha),$$

want de drager van $\psi_j.\phi_i$ is een (compact) deel van $U_i \cap V_j$. Nu is $\kappa_i\lambda_j^{-1}$ een diffeomorfisme van $\lambda_j(U_i \cap V_j)$ op $\kappa_i(U_i \cap V_j)$ dat de oriëntatie behoudt. Dus de transformatieformule impliceert dat

$$\int_{\kappa_i(U_i\cap V_j)} (\kappa_i^{-1})^*(\psi_j.\phi_i.\alpha) = \int_{\lambda_j(U_i\cap V_j)} (\lambda_j^{-1})^*(\psi_j.\phi_i.\alpha).$$

Het eerste deel van de propositie volgt door sommatie over (i, j). De lineariteit is duidelijk. □

De stelling van Stokes. Deze heeft betrekking op een variëteit met rand. De situatie is als volgt: laat M een variëteit zijn van dimensie $m \geq 1$ en Ω een open deel van M met de eigenschap dat zijn rand $\partial\Omega$ een deelvariëteit is van M van dimensie $m-1$. We onderstellen dat de rand éénzijdig is in de zin dat Ω overdekt kan worden door kaarten (U, κ) zodat $\Omega \cap U$ resp. $\partial\Omega \cap U$ gegeven wordt door $\kappa^1 < 0$ resp. $\kappa^1 = 0$. (De afsluiting $\bar\Omega$ wordt dan een *variëteit met rand* genoemd.) Dus $(\kappa^2, \dots, \kappa^m)$ beperkt tot $\partial\Omega \cap U$ geeft dan een kaart κ' voor $\partial\Omega$. Onderstel nu M georiënteerd. Voor een m-vorm α op M met compacte drager kunnen we zonder problemen de integraal $\int_{\bar\Omega} \alpha$ een zinvolle betekenis geven. We oriënteren de rand $\partial\Omega$ als volgt: als $p \in \partial\Omega$, dan is $T_p(\partial\Omega)$ een hypervlak in T_pM dat optreedt als rand van de halfruimte van raakvectoren die naar Ω wijzen en volgens (A.3) is hierdoor een oriëntatie van $T_p(\partial\Omega)$ vastgelegd.

Is $m > 1$ en is bovenstaande κ compatibel met de oriëntatie van M genomen (wat altijd lukt door eventueel per samenhangscomponent van U, κ_2 door $-\kappa_2$ te vervangen), dan is κ' dus compatibel met de oriëntatie van $\partial\Omega$. (Als $m = 1$, dan is $\partial\Omega$ discreet en de oriëntatie van $p \in \partial\Omega$ is $+$ als de oriëntatie van T_pM van Ω af is gericht en $-$ anders.)

STELLING 12.6 (Stelling van Stokes). *In deze situatie geldt voor iedere $(m-1)$-vorm β op M met compacte drager dat*

$$\int_{\bar\Omega} d\beta = \int_{\partial\Omega} \beta,$$

waarin het rechterlid de integraal genomen wordt van de beperking van β tot $\partial\Omega$ als vorm.

Het wezenlijke geval is:

LEMMA 12.7. *Laat β een $(m-1)$-vorm zijn op $\mathbb{R}^m$ met compacte drager. Dan is $\int_{\mathbb{R}^m} d\beta = 0$. Als $\mathbb{R}^m_-$ het deel van $\mathbb{R}^m$ is gedefinieerd door $x^1 \leq 0$ en $\iota : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ de afbeelding $(y^1, \dots, y^{m-1}) \mapsto (0, y^1, \dots, y^{m-1})$, dan is $\int_{\mathbb{R}^m_-} d\beta = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \iota^*\beta$.*

BEWIJS. Schrijf β als $\sum_i \beta_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m$. Dan is

$$d\beta := \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial \beta_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

We berekenen de integraal van $\partial\beta_i/\partial x^i$ over $\mathbb{R}^m$ resp. $\mathbb{R}^m_-$ door eerst te integreren naar de $i$de variabele. Dit laatste geeft steeds nul (want $\beta_i(x) = 0$ als $|x^i|$ voldoende groot), tenzij we integreren over $\mathbb{R}^m_-$ en $i = 1$: dan krijgen we $\beta_1(0, x^2, \dots, x^m)$. Integratie van de laatste funktie naar de variabelen $x^2, \dots, x^m$ geeft per definitie $\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \iota^*\beta$. □

Bewijs van de Stelling van Stokes. Het geval $m = 1$ heeft in wezen betrekking op een open interval Ω in $M = \mathbb{R}$, waar de laatste de voor de handliggende oriëntatie heeft. Schrijven we $\Omega = (a, b)$ met $-\infty \leq a < b \leq \infty$, dan is in geval $\{a\}$ resp. $\{b\}$ optreedt als component van $\partial\Omega$ (dus wanneer $a > -\infty$ resp. $b < \infty$) de oriëntatie hiervan $-$ resp. $+$. De stelling van Stokes zegt dan dat voor een funktie β op $\mathbb{R}$ met compacte drager geldt $\int_a^b d\beta = \beta(b) - \beta(a)$ (waar natuurlijk $\beta(\pm\infty) = 0$). Dit onderstellen we bekend en daarom nemen we aan dat $m \geq 2$.

Laat K de drager van β zijn. Kies een partitie van de eenheid voor K, $(\phi_i)_{i=1}^n$, zodat de drager van ϕ een compact deel is van het domein U_i van een kaart κ_i die georiënteerd is en voor zover die $\partial\Omega$ treft van het beschreven type is. Omdat $\sum_i \phi_i$ gelijk 1 is waar $\beta \neq 0$ is $\beta = \sum_i \phi_i\beta$. Integratie is $\mathbb{R}$-lineair, dus hoeven we de stelling alleen maar te bewijzen voor een enkele term $\phi_i\beta$. Anders gezegd, we mogen aannemen dat de drager van β een compact deel is van het domein van een georiënteerde kaart (U, κ) met $U \cap \bar{\Omega}$ gedefinieerd door $\kappa_1 \leq 0$. Dan is

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\Omega}} d\beta &= \int_{\kappa(U\cap\bar{\Omega})} (\kappa^{-1})^*(d\beta) = \int_{\kappa(U\cap\bar{\Omega})} d(\kappa^{-1})^*(\beta) \\ &= \int_{\kappa(U\cap\partial\Omega)} (\kappa^{-1})^*(\beta) \text{ (vanwege Lemma 12.7)} \\ &= \int_{U\cap\partial\Omega} \beta = \int_{\partial\Omega} \beta.\end{aligned}$$

$\square$

Opmerking 12.8. Laat M een compacte, nietlege georiënteerde variëteit zijn. Dan is $\int_M$ een lineaire funktie op de m-vormen op M. Deze is duidelijk niet nul. Volgens de stelling van Stokes is die wel nul op $d\mathcal{E}^{m-1}(M)$ en dus $\int_M$ factoriseert zo over een lineaire funktie

$$\int_M : H^m_{DR}(M) \to \mathbb{R}$$

die niet constant nul is.

Opmerking 12.9. Laat N een willekeurige variëteit zijn en laat m een nietnegatief geheel getal $\leq \dim(N)$ zijn. Is M een compacte georiënteerde variëteit van dimensie m en is $f : M \to N$ een afbeelding, dan hebben we een lineaire funktie

$$H^m_{DR}(N, \mathbb{R}) \xrightarrow{H^m(f^*)} H^m_{DR}(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\int_M} \mathbb{R}.$$

Een stelling zegt dat deze funkties de duale van $H^n_{DR}(M, \mathbb{R})$ voorbrengen. Anders gezegd, als een gesloten m-vorm α op N niet exact is, dan kunnen we een afbeelding $f : M \to N$ vinden met $\int_M f^*\alpha \neq 0$.

Opmerking 12.10. Propositie 12.5 zegt in wezen dat een 'integrand' op een variëteit M van dimensie m beschreven wordt door voor iedere raakruimte T_pM te geven een oriëntatie van T_pM en een antisymmetrische multilineaire vorm $\alpha_p : (T_pM)^m \to \mathbb{R}$. Nu krijgen we hetzelfde resultaat als we de oriëntatie omklappen en α_p door $-\alpha_p$ vervangen. We kunnen deze twee ingrediënten daarom laten opgaan in een (eigenlijk eenvoudiger) begrip: een *Haarmaat* op een reële m-dimensionale vectorruimte V is een funktie $\mu : V^m \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat voor iedere lineaire afbeelding $s : V \to V$ geldt: $\mu(s(v_1), \ldots, s(v_m)) = |\det(s)|\mu(v_1, \ldots, v_m)$. We zien meteen dat μ vastligt door zijn waarde op een enkele basis $(e_1, \ldots, e_m)$, want als $(v_1, \ldots, v_m) \in V^m$, dan is $\mu(v_1, \ldots, v_m) = |\det(s)|\mu(e_1, \ldots, e_m)$, waar $s : V \to V$ gedefinieerd is door $s(e_i) = v_i$. In het bijzonder is $\mu(v_1, \ldots, v_m) = 0$ als het stel $(v_1, \ldots, v_m)$ lineair afhankelijk is. Dus als $\alpha : V^m \to \mathbb{R}$ de antisymmetrische multilineaire vorm is met dezelfde waarde als μ op $(e_1, \ldots, e_m)$, dan stemmen α en μ overeen of zijn tegengesteld op iedere andere basis al naar gelang deze zich al dan niet in dezelfde oriëntatieklasse bevindt als $(e_1, \ldots, e_m)$. Dit is juist de ambiguïteit die bij de interpretatie als integrand verdwijnt.

De Haarmaten op V vormen een ééndimensionale vectorruimte. Evenzo vormen de Haarmaten op de raakruimten van M een lijnenbundel over M. Een *integrand* (of *differentieerbare maat*) van M is per definitie een snede van deze lijnenbundel. Uit het voorgaande volgt dat als deze compacte drager heeft die inderdaad geïntegreerd kan worden. Maar waar dit integraalbegrip mogelijk directer is, blijkt de formulering van de stelling van Stokes in deze termen veel minder eenvoudig te worden.

HOOFDSTUK 2

Differentiaalmeetkunde

1. Riemannse ruimten

De vectorruimte $\mathbb{R}^m$ voorzien van het *standaard inprodukt* $x^1y^1 + \cdots x^m y^m$ noemen we de *m-dimensionale euclidische ruimte*; we noteren die met $\mathbb{E}^m$.

Voor een differentieerbare kromme $\gamma : [a,b] \to \mathbb{E}^m$ kunnen we een zinvol begrip van booglengte invoeren. Een verdeling $\mathcal{V} = (a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b)$ van het definitiegebied van γ bepaalt een gebroken-lineaire benadering van γ die dezelfde waarden in de verdelingspunten aanneemt en affien-lineair is op iedere moot $[t_i, t_{i-1}]$. De totale lengte $l(\mathcal{V})$ van deze benadering is natuurlijk $\Sigma_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$. Die heeft een limiet als we de maaswijdte $m(\mathcal{V}) = \max\{t_i - t_{i-1} | i = 1, \ldots N\}$ naar nul laten gaan:

PROPOSITIE-DEFINITIE 1.1. *Er geldt*

$$\lim_{m(\mathcal{V})\to 0} l(\mathcal{V}) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt.$$

Deze limiet, die we noteren we met $L(\gamma)$, noemen we de booglengte *van γ. De booglengte is invariant onder herparametrisatie: is $h : [c,d] \to [a,b]$ een diffeomorfisme, dan hebben γh en γ dezelfde booglengte.*

BEWIJS. Bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een $\delta > 0$, zodat voor alle $t, t' \in [a,b]$ met $|t - t'| < \delta$ geldt

$$\|\gamma(t') - \gamma(t) - \dot\gamma(t).(t' - t)\| < \varepsilon |t' - t|.$$

Hieruit volgt dat als $m(\mathcal{V}) < \delta$,

$$|l(\mathcal{V}) - \Sigma_{i=1}^N \|\dot\gamma(t_{i-1})\|.(t_i - t_{i-1})| < \varepsilon(b - a).$$

De som in het linkerlid gaat naar $\int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt$ als $m(\mathcal{V}) \to 0$, en het eerste deel van de propositie volgt. Het tweede deel is een eenvoudig gevolg van de kettingregel en de substitutieregel:

$$\int_c^d \|\frac{d}{ds}\gamma h(s)\| ds = \int_c^d \|\dot\gamma(h(s))\|.|\frac{dh}{ds}| ds = \int_c^d \|\dot\gamma(h(s))\|.\frac{dh}{ds} ds = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt.$$

□

Laat nu $I \subset \mathbb{R}$ een interval zijn. Als voor een differentieerbare afbeelding $\gamma : I \to \mathbb{E}^m$ $\|\dot\gamma\|$ constant 1 is, dan volgt uit het bovenstaande dat voor ieder gesloten interval $[a,b] \subset I$ de booglengte van $\gamma | [a,b]$ gelijk is aan $b - a$. Vandaar dat we dan zeggen dat γ *geparametriseerd wordt door booglengte.* Zo'n parametrisatie bestaat voor iedere immersie, en is in wezen uniek:

LEMMA 1.2. *Een immersie $\gamma : I \to \mathbb{E}^m$ is te herparametriseren door booglengte. Bovendien is zo'n herparametrisatie uniek op een parametertransformatie van de gedaante $s \mapsto s + s_0$ na.*

BEWIJS. Kies $t_0 \in I$, en beschouw de booglengtefunktie

$$\phi(t) := \int_{t_0}^{t} \|\dot\gamma(\tau)\| d\tau.$$

Zijn afgeleide is $\|\dot\gamma(t)\| > 0$ en is dus volgens de inverse funktiestelling een diffeomorfisme van I op een interval $J \subset \mathbb{R}$. Laat $\delta := \gamma\phi^{-1}$, zodat dus $\gamma = \delta\phi$. Volgens de kettingregel is dan

$$\dot\gamma(t) = \dot\phi(t).\dot\delta(\phi(t)),$$

en nemen we van beide leden de norm, dan zien we dat $\|\dot\delta\| = 1$.
Is ψ een parametertransformatie zodat ook $\delta\psi$ door booglengte geparametriseerd is, dan volgt weer uit de kettingregel dat $|\dot\psi| = 1$. Omdat $\dot\psi > 0$, is dan $\dot\psi = 1$, en dus is $\psi(s) = s + constante$. □

Zij M een deelvariëteit van $\mathbb{E}^n$. Dan is de raakruimte aan M te $p \in M$ op te vatten als deelruimte van $\mathbb{E}^n$, en deze wordt daardoor een inproduktruimte. Ligt het beeld van γ in M, dan is zijn booglengte al bepaald door het zo gedefinieerde inprodukt in de raakbundel van M; immers de definitie van booglengte vereist alleen kennis van de norm van de vectoren $\dot\gamma(t)$, en dat zijn tenslotte raakvectoren van M. Dit suggereert:

DEFINITIE 1.3. Een *Riemannmetriek* op een variëteit M is een inprodukt g_p op iedere raakruimte T_pM die differentieerbaar van het voetpunt afhangt (in de zin dat dit op het domein van een kaart κ de gedaante $\sum_{i,j} g_{ij} d\kappa^i d\kappa^j$ aanneemt, waar (g_{ij}) een positief definiete symmetrische matrix is waarvan de coefficienten differentieerbaar zijn.) Een variëteit voorzien van een Riemannmetriek heet een *Riemannse ruimte*.

Gegeven zo'n Riemannse ruimte M, dan definieren we naar analogie van het bovenstaande de *booglengte* $L(\gamma)$ van een differentieerbare kromme $\gamma : [a,b] \to M$ als de integraal van $\sqrt{g(\dot\gamma,\dot\gamma)}$ over $[a,b]$. Zoals in propositie 1.1 bewijst men dat de booglengte ongevoelig is voor herparametrisatie. Deze definitie is op voor de handliggende wijze zin te geven voor *gebroken differentieerbare* krommen (krommen die continu zijn en in slechts eindig veel punten niet-differentieerbaar). We benutten dit om in te zien dat voor iedere samenhangende Riemannse ruimte de Riemannmetriek een metriek (in de zin van de topologie) bepaalt.

PROPOSITIE 1.4. *Onderstel M samenhangend en definieer $d : M \times M \to \mathbb{R}$ door $d(p,q)$ het infimum te laten zijn van de booglengten van gebroken differentieerbare krommen in M die p met q verbinden. Dit is een metriek waarvan de topologie overeenstemt met de gegeven topologie van M.*

BEWIJS. Van de eigenschappen die een metriek definiëren, is alleen niet duidelijk dat uit $p \neq q$ volgt $d(p,q) > 0$. Dus de collectie bollen voor d, $B_d(p,\varepsilon) := \{x \in M : d(x,p) < \varepsilon\}$ is in ieder geval een basis voor een topologie. We bewijzen eerst dat deze topologie overeenstemt met de gegeven topologie, d.w.z., is gekozen een kaart (U,κ) te p, dan omvat iedere d-bol om p het κ^{-1}-beeld van een bol om $\kappa(p)$ en omgekeerd. De ontbrekende eigenschap voor d volgt dan vanzelf.

Daartoe vergelijken we de beperking van g tot U met de standaardmetriek op $\mathbb{E}^m$ teruggehaald naar U: $g' = \sum_i (d\kappa^i)^2$. Kies $r > 0$ zo dat $\bar{B}(\kappa(p), r) \subset U$. Dan is $\kappa^{-1}\bar{B}(\kappa(p), r)$ een compact deel van U, dus er is een constante $c > 1$ zodat $c^{-1}g(v,v) \leq g'(v,v) \leq cg(v,v)$ voor alle raakvectoren met voetpunt hierin. Dat betekent dat voor iedere gebroken differentieerbare kromme δ in $\bar{B}(\kappa(p), r)$ geldt:

$$c^{-1}L(\kappa^{-1}\delta) \leq L(\delta) \leq cL(\kappa^{-1}\delta).$$

We bewijzen nu eerst dat voor $0 < \varepsilon \leq r$ geldt $B_d(p, c^{-1}\varepsilon) \subset \kappa^{-1}B(\kappa(p), \varepsilon)$. Laat $q \in M - \kappa^{-1}B(\kappa(p), \varepsilon)$. Dan heeft iedere gebroken differentieerbare kromme γ van p naar q een beginstuk γ' in $\kappa^{-1}\bar{B}(\kappa(p), r)$ waarvoor $\kappa\gamma'$ p met een punt van $\partial B(\kappa(p), \varepsilon)$ verbindt. Dus $L(\gamma) \geq L(\gamma') \geq c^{-1}L(\kappa\gamma') \geq c^{-1}\varepsilon$. Dit laat zien dat $d(p,q) \geq c^{-1}\varepsilon$, anders gezegd, dat $q \in M - B_d(p, c^{-1}\varepsilon)$.

Tenslotte beweren we dat $\kappa^{-1}B(\kappa(p), c^{-1}\varepsilon) \subset B_d(p, \varepsilon)$: immers is q een element is van eerstgenoemde verzameling, dan is het κ^{-1}-beeld van het segment $[\kappa(p), \kappa(q)]$ een kromme van p naar q van booglengte $\leq c.c^{-1}\varepsilon = \varepsilon$.

$\square$

Een afbeelding van een Riemannse ruimte (M, g) naar een Riemannse ruimte (N, h) heet een *isometrische immersie* als zijn afgeleide het inprodukt van raakvectoren bewaart: $h(df(v), df(w)) = g(v, w)$ voor alle raakvectoren v, w van M met hetzelfde voetpunt. Zo'n afbeelding is inderdaad een immersie, want als voor een $v \in TM$ geldt $df(v) = 0$, dan is $g(v,v) = 0$, en dus $v = 0$. We kunnen dit ook omkeren: gegeven een immersie $f : M \to N$ en een Riemannmetriek h op N, dan hebben we een *geïnduceerde Riemannmetriek* $g = f^*h$ op M gedefinieerd door $g(v, w) = h(Df(v), Df(w))$. Een bijzonder geval hiervan is het voorbeeld van een deelvariëteit van een euclidische ruimte (dat aanleiding was voor de definitie van een Riemannse ruimte). Zo krijgen we in feite alle mogelijke Riemannmetrieken op M, want volgens een (diepe) stelling van Nash, kan iedere Riemannse ruimte lokaal-isometrisch in een $\mathbb{E}^N$ worden ingebed.

Een *isometrische inbedding* resp. *isometrie* is een isometrische immersie, die tevens een inbedding resp. een diffeomorfisme is. De isometrieën van een Riemannse ruimte op zichzelf vormen een groep, zijn *isometriegroep* genaamd. Die pleegt klein te zijn (voor de voorbeelden hieronder heeft die groep de maximale dimensie $\frac{1}{2}m(m+1)$).

De *Riemannse meetkunde* houdt zich uitsluitend bezig met eigenschappen die invariant zijn onder isometrieën, anders gezegd, die geheel en al in termen van de topologie, de differentieerbare structuur, en de Riemannmetriek uit te drukken zijn.

VOORBEELDEN 1.5. (i) De Euclidische ruimte $\mathbb{E}^m$ heeft als isometrieën de transformaties die samenstelling zijn van een een verschuiving (d.w.z. $x \in \mathbb{E}^m \mapsto x + a \in \mathbb{E}^m$ voor een $a \in \mathbb{E}^m$) met een orthogonale transformatie.

(ii) De eenheidssfeer $\mathbb{S}^m$ van $\mathbb{E}^{m+1}$, voorzien van de geïnduceerde Riemannmetriek. De orthogonale transformaties van $\mathbb{E}^{m+1}$ induceren isometrieën van $\mathbb{S}^m$.

(iii) *Het hyperbolische vlak.* Beschouw de kwadratische vorm $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ op $\mathbb{R}^3$. De nulpuntenverzameling van $q + 1$ is een tweebladige hyperboloïde. Zij $\mathbb{H}^2$ het blad dat in het halfvlak $z > 0$ ligt, dus dat gegeven is door $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. De vorm q bepaalt een kwadratische vorm $q := (dx)^2 + (dy)^2 - (dz)^2$ op de raakruimte van $\mathbb{R}^3$. Dit is geen Riemannmetriek (want niet positief definiet), maar zijn beperking tot $\mathbb{H}^2$ is dat wel: voor $p \in \mathbb{H}^2$ is $T_p\mathbb{H}^2$ het vlak in $T_p\mathbb{R}^3$ gedefinieerd door dq_p nul te stellen. Dus $2xdx + 2ydy - 2zdz|T\mathbb{H}^2 = 0$. Zo vinden we dat $dz = (xdx + ydy)/z$ op $T\mathbb{H}^2$. Substitutie in q levert

$$\begin{aligned} q_{|T\mathbb{H}^2} &= (1 - \frac{x^2}{z^2})(dx)^2 - 2\frac{xy}{z^2}dxdy + (1 - \frac{y^2}{z^2})(dy)^2 \\ &= z^{-2}\big\{(dx)^2 + (dy)^2 + (ydx - xdy)^2\big\} \end{aligned}$$

en dus is deze beperking positief definiet. Iedere lineaire transformatie van $\mathbb{R}^3$ die $\mathbb{H}^2$ in zichzelf overvoert, behoudt q en dus ook de Riemannmetriek op $\mathbb{H}^2$. Derhalve bepaalt zo'n transformatie een isometrie van $\mathbb{H}^2$. Deze Riemannse ruimte heet het *hyperbolisch vlak*. Dit laat zich zonder meer veralgemenen naar willekeurige dimensie m: de *m-dimensionale hyperbolische ruimte* is gedefinieerd door

$$\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : x^{m+1} = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2 + 1}\}$$

met de voor de hand liggende Riemannmetriek. Iedere lineaire transformatie van $\mathbb{R}^{m+1}$ die $\mathbb{H}^m$ behoudt is een isometrie.

(iv) De *vlakke m-torus*. De eenheidscirkel $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{E}^2$ geeft in m-voud een inbedding $(\mathbb{S}^1)^m \subset \mathbb{E}^{2m}$. Parametriseren we iedere factor door booglengte $(\theta_1, \dots, \theta_m)$, dan is de geïnduceerde metriek op $(\mathbb{S}^1)^m$ gelijk aan $(d\theta^1)^2 + \cdots + (d\theta^m)^2$.

Iedere compacte variëteit M kan van een Riemannmetriek voorzien worden: laat $\{\phi_i : M \to [0,1]\}_{i=1}^n$ een partitie van 1 zijn waarvoor de drager van iedere ϕ bevat is in het domein van een kaart κ_i. Dan is de uitdrukking

$$\sum_i \phi_i(p)(d\kappa_i(v).d\kappa_i(w)),$$

($p \in M$ en $v, w \in T_pM$) een Riemannmetriek op M. (Dit bewijs is te generaliseren naar variëteiten met een aftelbare basis.)

Riemannse ruimten in de klassieke mechanika. Laat N deeltjes gegeven zijn in $\mathbb{E}^3$ met massa's $m_1, \dots, m_N$. Laat $q_i(t) \in \mathbb{E}^3$ de positie zijn van het $i$de deeltje ten tijde t, zodat $q(t) = (q_1(t), \dots, q_N(t)) \in (\mathbb{E}^3)^N$ de positie van het hele stelsel op dit tijdstip beschrijft. Onderstel dat aan het geheel enkele mechanische beperkingen zijn opgelegd (*constraints*). Bijvoorbeeld, enkele van de deeltjes zijn door stangen (van verwaarloosbare massa) met elkaar verbonden. Die beperkingen stipuleren dat $q(t)$ zich binnen een deelverzameling $M \subset (\mathbb{E}^3)^N$ beweegt. We noemen M de *configuratieruimte* van het systeem. Laten we aannemen dat M een deelvariëteit is van $(\mathbb{E}^3)^N$. De snelheidsvectoren $\dot{q}_i(t)$ vormen samen een vector $\dot{q}(t) = (\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_N(t)) \in (\mathbb{E}^3)^N$. Dat is natuurlijk een raakvector van M te $q(t)$. (De raakbundel TM van M is de *faseruimte* van het systeem.) De kinetische energie van het stelsel ten tijde t is $\sum_i \frac{1}{2}m_i\|\dot{q}_i(t)\|^2$. Dit suggereert om $(\mathbb{E}^3)^N$ te voorzien van de metriek gedefinieerd door $g(v,v) = \sum_i m_i\|v^i\|^2$ en deze vervolgens te induceren op M. Zo vinden we de kinetische energie, $T : TM \to \mathbb{R}$, $T(v) := \frac{1}{2}g(v,v)$, als de funktie 'half normkwadraat' op de raakbundel van een Riemannse ruimte.

Opgave 41. Bewijs dat een Riemannse ruimte die diffeomorf is met een open interval, isometrisch isomorf is met een open interval in $\mathbb{E}^1$. (Hint: parametriseer door booglengte.)

Opgave 42. Zij M één van Riemannse ruimten beschreven in 1.5-i,ii,iii. Bewijs dat voor ieder paar punten $p, p' \in M$ en orthonormale bases $(e_1, \dots, e_m)$ van T_pM en $(e'_1, \dots, e'_m)$ van $T_{p'}M$ er precies één isometrie is van het beschreven type waarvan de afgeleide e_i in e'_i $(i = 1, \dots m)$ (en dus p in p') overvoert.

Opmerking 1.6. Een *pseudoriemannse ruimte* is een variëteit M voorzien van een pseudo-inprodukt g op zijn raakbundel. Voor een kromme $\gamma : [a,b] \to M$ in zulk een ruimte is de booglengte $L(\gamma)$ alleen goed te definiëren als $g(\dot\gamma,\dot\gamma)$ overal ≥ 0 is: $L(\gamma)$ is dan de integraal van de wortel hiervan. Dit is de situatie die we tegenkomen in de algemene relativiteitstheorie, want daar wordt het ruimte-tijdscontinuüm voorgesteld door een 4-dimensionale variëteit voorzien van een pseudo-inprodukt van signatuur $(1,3)$ met wat extra structuur ontleend aan de Minkowskisituatie: een oriëntatie en in iedere raakruimte T_pM een toekomstkegel (een component van de verzameling raakvectoren $v \in T_pM$ met $g_p(v,v) > 0$) die continu van p afhangt. De krommen $\gamma : [a,b] \to M$ met met $\dot\gamma$ overal in de toekomstkegel zijn de *tijdachtige krommen* in M. De booglengte is de door een meereizende waarnemer ervaren tijd (*proper time*). Parametrisatie van γ door booglengte is daarom ook fysisch voor handliggend.

2. Connecties

Definitie 2.1. Zij $\xi : E \to M$ een vectorbundel. Een *connectie* ∇ op ξ schrijft voor hoe een snede van ξ naar een vectorveld op M gedifferentieerd kan worden. Precies gezegd, voor ieder vectorveld X op een open deel U van M hebben we $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding

$$\nabla_X : \mathcal{E}(U,\xi) \to \mathcal{E}(U,\xi)$$

die de volgende eigenschappen heeft van een 'eerste orde differentiaaloperator':

lokaal karakter: Voor $s \in \mathcal{E}(U,\xi)$ en $U' \subset U$ open geldt $(\nabla_X s)|U' = \nabla_{X|U'}(s|U')$,

Leibnitzregel: voor iedere funktie $f : U \to \mathbb{R}$ is $\nabla_X(fs) = f\nabla_X s + X(f)s$,

gedrag in X: ∇_X is lineair in X over de funkties: $\nabla_{X+X'}s = \nabla_X s + \nabla_{X'}s$ en $\nabla_{fX} = f\nabla_X$.

De eerste conditie brengt tot uitdrukking dat de waarde van $\nabla_X s$ in een punt p alleen afhangt van het gedrag van X en s in een willekeurig kleine omgeving van p. (We zullen zo zien dat wat X betreft alleen zijn waarde in p gekend hoeft te worden.) De tweede conditie verlangt dat voor vaste X, ∇_X zich gedraagt als een afgeleide (eigenlijk een derivatie) op de verzameling sneden $\mathcal{E}(U,\xi)$.

Een eenvoudig (maar belangrijk) voorbeeld is het volgende: neem de triviale bundel $M \times \mathbb{R} \to M$. Dus een snede boven $U \subset M$ is niets anders dan een funktie $f : U \to \mathbb{R}$. Dan is $\nabla_X f := X(f)$ een connectie op deze bundel.

Zij (U,κ) een kaart voor M en schrijf kortheidshalve ∂_i voor het basisvectorveld $\partial/\partial\kappa^i$. Is verder gegeven een basis $(e_1,\dots,e_r)$ van sneden van $\xi|U$ (waar r de rang van ξ is), definieer dan funkties $\Gamma^\sigma_{\rho,i}$ op U door de vergelijking

$$\nabla_{\partial_i} e_\rho = \sum_{\sigma=1}^r \Gamma^\sigma_{\rho,i} e_\sigma.$$

Deze funkties heten de *Christoffelsymbolen* van de connectie met betrekking tot de gegeven bases. Zij bepalen de connectie volledig op U, immers ieder vectorveld X op U laat zich uniek schrijven als $\sum_i X^i\partial_i$ en iedere snede s van $\xi_{|U}$ als $\sum_\rho s^\rho e_\rho$. Toepassen van de definierende eigenschappen van een connectie geeft

$$\nabla_X s = \sum_{\sigma=1}^r \Big(\sum_{i=1}^m \sum_{\rho=1}^r X^i s^\rho \Gamma^\sigma_{\rho,i} + X(s^\sigma)\Big) e_\sigma. \tag{1}$$

In het rechterlid komen van X en s alleen de componentfunkties X^i, s^σ en de afgeleiden $X(s^\sigma)$ voor. Intrinsieker gezegd, de waarde van $\nabla_X s$ in een punt $p \in U$

hangt alleen van het beeld van $X(p)$ onder $D_p s$ (een raakvector van E met voetpunt $s(p)$) af. De Christoffelsymbolen laten zich bschouwen als de coëfficiënten van een m-tal $r \times r$-matrixwaardige funkties $\Gamma_i := (\Gamma^{\sigma}_{\rho,i})^{\sigma}_{\rho}$ op U, die op hun beurt weer de coëfficiënten zijn van een $r \times r$-matrixwaardige differentiaal op U: $\Gamma := \sum_i \Gamma_i d\kappa^i$. Deze differentiaal hangt niet meer van de kaart κ af, wel natuurlijk van de gekozen lokale basis $(e_1, \dots, e_r)$ van ξ. Dit blijkt uit de formule:

$$\nabla_X \begin{pmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^r \end{pmatrix} = (\iota_X \Gamma) \begin{pmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^r \end{pmatrix} + X \begin{pmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^r \end{pmatrix},$$

waar in het rechterlid $\iota_X \Gamma$ een matrixwaardige funktie is en X coëfficiëntsgewijs op een kolomvector werkt. We noemen Γ de *matrix* van de connectie t.a.v. de basis $(e_1, \dots, e_r)$. A priori kan deze $r \times r$-matrixwaardige differentiaal willekeurig zijn, want het is gemakkelijk na te gaan dat voor iedere $r \times r$-matrix van differentialen bovenstaande formule een connectie definieert op de bundel $\mathbb{R}^r \times U \to U$.

We kunnen de connectie op ξ is dus ook opvatten als het geven voor ieder open deel U van M een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding

$$\nabla : \mathcal{E}(U, \xi) \to \mathcal{E}(U, \tau^*_M \otimes \xi)$$

die voldoet aan:

lokaal karakter: voor $s \in \mathcal{E}(U, \xi)$ en $U' \subset U$ open geldt $\nabla(s)|U' = \nabla(s|U')$,

Leibnitzregel: voor iedere funktie $f : U \to \mathbb{R}$ is $\nabla(fs) = f\nabla(s) + df \otimes s$.

Het verband tussen de twee wordt gegeven door $\nabla_X(s) = \iota_X(\nabla(s))$. De laatste definitie is duidelijk korter en we kunnen er ook een aantal eigenschappen wat efficiënter mee afleiden.

Een lokale snede s van ξ noemen we *vlak* als geldt $\nabla(s) = 0$. In termen van een kaart κ komt dit dus neer op de eis dat $\nabla_{\partial_i}(s) = 0$, voor $i = 1, \dots, m$. Is op het domain van de ze kaart ook nog een basis van sneden van ξ gegeven, dan moeten dus de r componentfunkties $s^1, \dots, s^r$ van s aan mr eerste-orde differentiaalvergelijkingen voldoen, wat al een indicatie is dat lokale vlakke sneden in het algemeen niet zullen bestaan als $m > 1$. In het (uitzonderlijke) geval dat er in ieder punt van M een basis bestaat van lokale vlakke sneden, heet ∇ een *vlakke connectie*.

Beschikken we over een trivialisatie van ξ, dan kunnen we op een zinvolle manier spreken over *constante* sneden van ξ. Er is dan precies één connectie die deze sneden als vlakke sneden heeft (en dus zelf vlak is): is $e_1, \dots, e_r$ een basis van constante sneden, dan is iedere lokale snede s te schrijven als $s^1 e_1 + \cdots + s^r e_r$, en we definieren $\nabla_X s := \sum_\rho X(s^\rho) e_\rho$. Ga zelf na dat zo een connectie gedefinieerd is. Omdat s constant is precies dan als de coëfficiënten $s^1, \dots s^r$ constant zijn, zien we s constant $\Leftrightarrow$ s vlak.

De som van twee connecties op bundels waarvan vezel en basis positieve dimensie hebben is nooit een connectie. Een convexe lineaire combinatie is dat echter wel; sterker: zijn $\nabla^1, \dots, \nabla^k$ connecties op ξ, en $\phi_1, \dots, \phi_k$ funkties op M met som constant 1, dan is gemakkelijk na te gaan dat $\phi_1 \nabla^1 + \cdots + \phi_k \nabla^k$ ook een connectie is. Omdat een lokale trivialisatie een lokale (vlakke) connectie bepaalt, kunnen we uit de zo verkregen connecties met behulp van een partitie van 1 een connectie op ξ definieren, tenminste als M compact is.

Als $\dim M = 1$, dan is de connectie altijd vlak:

PROPOSITIE 2.2. *Als M een interval is, en $p \in M$, dan is er voor iedere $e \in E_p$ precies één vlakke snede $s_e : M \to E$ met $s_e(p) = e$, en tezamen definiëren die een trivialisatie $M \times E_p \to E$ van E.*

BEWIJS. Volgens het bovenstaande komt de conditie $\nabla_{\partial/\partial t} s = 0$ neer op het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^r \end{pmatrix} = -\Gamma_1 \begin{pmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^r \end{pmatrix},$$

waar Γ_1 een matrixwaardige funktie in één variabele is. Schrijven we $s(t) = C(t)e$, waar C een matrixwaardige funktie is, dan komt dit neer op $\dot{C}(t) = -\Gamma_1(t)C(t)$ met de voorwaarde $C(p) = \mathbf{1}_r$. Volgens de theorie van gewone differentiaalvergelijkingen heeft dit stelsel een unieke lokale oplossing. Omdat $C(p)$ de identiteit is, is $\det C(t) \neq 0$ op een omgeving van p. Hieruit volgt de bewering voor een omgeving van p in M. Laat p de punten van M doorlopen en vind een overdekking van M van oplossingsintervallen. De lokale uniciteit van de bijbehorende oplossingen, doet die op gemeenschappelijke definitiegebieden overeenstemmen en zo volgt de bewering voor geheel M. □

Terughalen van een connectie. Keren we terug tot de algemene situatie van een vectorbundel $\xi : E \to M$ voorzien van een connectie ∇. Zij N een variëteit en $f : N \to M$ een differentieerbare afbeelding. Dan hebben we de teruggehaalde vectorbundel $f^*\xi = (f^*\pi : f^*E \to N)$, waar $f^*E = \{(e, a) \in E \times N | f(a) = \pi(e)\}$ en $f^*\pi$ is de projectie op de tweede faktor. Een lokale snede van deze bundel over een open deel V van N is dus in feite een afbeelding $s : V \to E$ met $s(q) \in E_{f(q)}$ voor alle $q \in V$. We laten zien dat ook de connectie ∇ kan worden 'teruggehaald' tot een connectie $f^*\nabla$ op N. Het eenvoudigste is dit te beschrijven in termen van een connectiematrix: onderstellen we dat $f(V)$ bevat is in de eerder gebruikte omgeving U, dan bepaalt de basis $(e_1, \ldots, e_r)$ van ξ over U een basis van $f^*\xi$ over V en we nemen dan als connectiematrix voor de laatste de teruggehaalde $f^*\Gamma$ van Γ als matrix van differentialen (zo wordt dit inderdaad een matrix van differentialen op V). Het is niet moeilijk na te gaan dat dit onafhankelijk is van de gekozen basis en zo een connectie definieert.

In combinatie met Propositie 2.2 heeft dit een opmerkelijk gevolg. Is $\gamma : [a, b] \to M$ een kromme in M van $p = \gamma(a)$ naar $q = \gamma(b)$, dan is blijkens het voorgaande $\gamma^*\xi$ uitgerust met een connectie. Volgens Propositie 2.2 is dan de laatste vectorbundel op natuurlijke wijze getrivialiseerd middels zijn vlakke sneden; in het bijzonder geeft dit een lineair isomorfisme van de vezel E_p op de vezel E_q. Is γ gebroken differentieerbaar (maar continu), dan hebben we nog steeds zo'n isomorfisme (verkregen door samenstellen van de isomorfismen horende bij eindig vele paren opvolgende punten van niet-differentieerbaarheid). We noemen dit *parallelle verschuiving langs γ*.

In de regel hangt dit isomorfisme van γ en niet alleen van p en q af, bijvoorbeeld als γ zich sluit: $p = q$, dan is het zo verkregen automorfisme van E_p (de *monodromie* van γ genoemd) niet noodzakelijk de identiteit, ook niet als het beeld van γ zich in een heel kleine omgeving van p bevindt. Dit afwijken van de identiteit wordt infinitesimaal gemeten met de zogenammde *krommingsvorm*.

Een *ξ-waardige k-vorm* op een open deel $U \subset M$ is een snede van de vector bundel $\wedge^k \tau_M^* \otimes \xi$ over U. De ruimte van zulke sneden geven we vaak aan met

$\mathcal{E}^k(U,\xi)$ i.p.v. $\mathcal{E}(U,\wedge^k\tau_M^*\otimes\xi)$ en de vereniging van deze ruimten over alle open $U\subset M$ met $\mathcal{E}_M^k(\xi)$. Merk op dat het wigproduct afbeeldingen

$$(\alpha,\omega)\in\mathcal{E}^k(U)\times\mathcal{E}^l(U,\xi)\to\alpha\wedge\omega\in\mathcal{E}^{k+l}(U,\xi)$$

bepaalt. De connectie ∇ is een afbeelding $\nabla:\mathcal{E}_M^0(\xi)\to\mathcal{E}_M^1(\xi)$.

LEMMA 2.3. *Een connectie ∇ op ξ laat zich éénduidig voortzetten tot een lineaire afbeelding*

$$\nabla:\mathcal{E}_M^k(\xi)\to\mathcal{E}_M^{k+1}(\xi),\quad k=0,1,2,\dots,$$

die voldoet aan de Leibnitzregel

$$\nabla(\alpha\wedge\omega)=d\alpha\wedge\omega=(-1)^k\alpha\wedge\nabla(\omega).$$

BEWIJS. Is over een open deel U van M een basis van sneden $(e_\rho)_\rho$ gegeven. dan definieren we ∇ op $\mathcal{E}^k(U,\xi)$ door

$$\nabla(\sum_\rho\alpha_\rho\otimes e_\rho):=\sum_\rho\big(d\alpha_\rho\otimes e_\rho+(-1)^k\alpha_\rho\wedge\nabla(e_\rho)\big).$$

Met behulp van het feit dat voor een funktie f op U geldt,

$$\begin{aligned}&d(f\alpha\otimes s)+(-1)^kf\alpha\wedge\nabla(s)=fd\alpha\otimes s+df\wedge\alpha\otimes s)+(-1)^kf\alpha\wedge\nabla(s)\\&=d\alpha\otimes fs+(-1)^k\alpha\wedge df\otimes s+(-1)^k\alpha\wedge f\nabla(s)=d(\alpha\otimes fs)+(-1)^k\alpha\wedge\nabla(fs),\end{aligned}$$

is na te gaan dat deze definitie onafhankelijk is van de snedenbasis. Er volgt dan ook gemakkelijk dat deze voortzetting van ∇ aan de Leibnitzregel voldoet. □

PROPOSITIE-DEFINITIE 2.4. *In de situatie van het vorig lemma wordt $\nabla\nabla$: $\mathcal{E}^\bullet(\xi)\to\mathcal{E}^{\bullet+2}(\xi)$ gegeven door een* End(ξ)*-waardige 2-vorm $R:\xi\to\wedge^2\tau_M^*\otimes\xi$:*

$$\nabla\nabla(\alpha\otimes s)=\alpha\wedge R(\omega).$$

We noemen R de krommingsvorm *van de connectie; deze voldoet aan* tweede Bianchi identiteit*: $\nabla R=R\nabla$.*

BEWIJS. Zijn $\alpha\in\mathcal{E}^k(U)$ en $s\in\mathcal{E}(U,\xi)$, dan is

$$\begin{aligned}\nabla\nabla(\alpha\otimes s)&=\nabla(d\alpha\otimes s)+(-1)^k\alpha\wedge\nabla(s)\\&=(-1)^{k+1}d\alpha\wedge\nabla(s)+(-1)^kd\alpha\wedge\nabla(s)+\alpha\wedge\nabla\nabla(s)=\alpha\otimes\nabla\nabla(s).\end{aligned}$$

In het bijzonder geldt voor een funktie f op U dat $\nabla\nabla(fs)=f\nabla\nabla(s)$. Hieruit volgt dat $\nabla\nabla:\mathcal{E}(\xi)\to\mathcal{E}^2(\xi)$ door een vectorbundelhomomorfisme R gegeven wordt. De tweede Bianchi identiteit is triviaal. □

De interpretatie van R als infinitesimale monodromie, waarop we zinspeelden is nu als volgt: gegeven $v,v'\in T_pM$, kies dan lokale coördinaten in M te p, en laat voor kleine $t,t'\in\mathbb{R}$, $\gamma_{t,t'}$ de kromme zijn die (relatief het gekozen coördinatenstelsel) eenparig de omtrek van het parallellogram $(p,p+tv,p+tv+t'v',p+t'v')$ doorloopt. Noteren we de monodromie van deze kromme met $\Phi_{t,t'}$, dan geldt

$$\Phi_{t,t'}=\mathbf{1}+tt'R(v,v')+o(|tt'|).$$

In deze formule is $R(v,v')$ beschouwd als een endomorfisme van E_p.

Is $\Gamma = \mathrm{mat}(\nabla)$ de matrix van differentialen van ∇ t.o.v. een snedenbasis $(e_\rho)_\rho$ over U, dan zal R verschijnen als een matrix van 2-vormen:

$$\begin{aligned} R(e_\rho) &= \nabla\nabla(e_\rho) = \nabla\big(\sum_\sigma \Gamma^\sigma_\rho \otimes e_\sigma\big) \\ &= \sum_\sigma d\Gamma^\sigma_\rho \otimes e_\sigma + \sum_\sigma\sum_\tau \Gamma^\sigma_\rho \wedge \Gamma^\tau_\sigma \otimes e_\tau. \end{aligned}$$

Dus als we $\Gamma \wedge \Gamma$ schrijven voor de samenstelling van Γ met zichzelf als matrix, waarbij coëfficiëntsgewijs het uitproduct genomen wordt, dan laat zich dit schrijven als

$$\mathrm{mat}(R) = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma.$$

De tweede Bianchi-identiteit krijgen we door van deze formuls de uitwendige afgeleide te nemen: $d\mathrm{mat}(R) = d\Gamma \wedge G - \Gamma \wedge d\Gamma$ en hierin de formule te substitueren:

$$d\mathrm{mat}(R) = \Gamma \wedge \mathrm{mat}(R) - \mathrm{mat}(R) \wedge \Gamma.$$

Is gegeven een paar vectorvelden X, Y op U, en beschouwen we $R(X,Y)$ als een vectorbundel-endomorfisme van ξ over U, dan is

$$\begin{aligned} \mathrm{mat}(R)(X,Y) &= d\Gamma(X,Y) + (\Gamma\wedge\Gamma)(X,Y) \\ &= X(\iota_Y\Gamma) - Y(\iota_X\Gamma) - \iota_{[X,Y]}\Gamma + (\iota_X\Gamma)(\iota_Y\Gamma) - (\iota_Y\Gamma)(\iota_X\Gamma) \\ &= (X + \iota_X\Gamma)(Y + \iota_Y\Gamma) - (Y + \iota_Y\Gamma)(X + \iota_X\Gamma) - ([X,Y] + \iota_{[X,Y]}\Gamma). \end{aligned}$$

We herkennen de laatste uitdrukking als de matrix van $\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$. Er geldt dus

$$R(X,Y)s := (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})s.$$

In onderstaande opgaven is steeds $\xi : E \to M$ een differentieerbare vectorbundel voorzien van een connectie ∇.

OPGAVE 43. Laat U het domein van een kaart κ en noteer standaardvectorvelden $\partial_i = \partial/\partial\kappa_i$, $i = 1, \ldots, m$. Laat verder een snedenbasis $(e_\rho)_\rho$ van $\xi|_U$ gegeven zijn zodat R beschreven wordt door de $\binom{n}{2}$ $r \times r$-matrices: $\mathrm{mat}(R)(\partial_i, \partial_j)e_\rho = \sum_\sigma R(\partial_i, \partial_j)^\sigma_\rho e_\sigma$. Bewijs dat de tweede Bianchi-identiteit neerkomt op:

$$\partial_k R(\partial_i,\partial_j)^\sigma_\rho + \partial_j R(\partial_k,\partial_i)^\sigma_\rho + \partial_i R(\partial_j,\partial_k)^\sigma_\rho = 0.$$

OPGAVE 44. Laat $p \in M$. Bewijs dat de monodromieën van gebroken differentieerbare krommen van p naar p een ondergroep van $GL(E_p)$ vormen. (Die wordt de *holonomiegroep* van ξ te p genoemd.)

OPGAVE 45. (a) Bewijs dat op de duale bundel ξ^* een unieke connectie ∇ bestaat met de eigenschap dat voor ieder lokaal vectorveld X en ieder paar lokale sneden s en s^* van ξ resp. ξ^* geldt $X(s^*(s)) = (\nabla_X s^*)(s) + s^*(\nabla_X s)$.

(b) Laat $\xi' = (\pi' : E' \to M)$ nog een differentieerbare vectorbundel zijn, die voorzien is van een connectie (ook genoteerd met ∇). Bewijs dat op $\xi \otimes \xi'$ en $\mathrm{Hom}(\xi, \xi')$ dan connecties eenduidig vastgelegd zijn door

$$\begin{aligned} \nabla_X(s \otimes s') &= (\nabla_X s) \otimes s' + s \otimes \nabla_X s' \\ \nabla_X(\phi)(s) &= \nabla_X(\phi(s)) - \phi(\nabla_X s). \end{aligned}$$

OPGAVE 46. Onderstel dat de connectie vlak is.

(a) Bewijs dat er een bundelatlas is voor ξ met constante overgangsfunkties.

(b) Bewijs dat als M een hyperkubus is, de connectie afkomstig is van een trivialisatie. (Aanw.: Projekteer M loodrecht op een zijhypervlak, zodat de vezels intervallen zijn, en pas 2.2 toe op de vezels.)

OPGAVE 47. Onderstel dat de kromming van ξ constant nul is. Bewijs dat de monodromie van iedere gesloten kromme die bevat is in een open deel dat diffeomorf is met een open bol gelijk is aan de identiteit. Concludeer dat de connectie van ξ vlak is.

TERZIJDE 2.5. In de Yang-Millstheorieën wordt een potentiaal beschreven als een connectie op een vectorbundel. De krommingsvorm heeft dan de interpretatie als het bijbehorende krachtenveld. Het leidende voorbeeld is de Maxwellvergelijking. We hebben hier te maken met een triviale complexe vectorbundel $\mathbb{C}\times M \to M$ van rang 1 over de Minkowskiruimte M. Blijkens het voorgaande is de matrix een connectie een enkele differentiaal Γ op M met complexe coëfficiënten en is zijn kromming $d\Gamma$. Voor de Maxwelltheorie neemt men Γ zuiver imaginair, dus van de vorm $2\pi\sqrt{-1}A$ met A een gewone (reële) differentiaal.

3. De Levi-Civitaconnectie

In dit hoofdstuk is M voorzien van een pseudometriek Riemannmetriek g. We beginnen met de zogenaamde hoofdstelling van de Riemannse meetkunde.

STELLING 3.1. *Er is precies één connectie ∇ op TM met de volgende twee eigenschappen:*

symmetrie: $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$ *en*

vlakheid metrische tensor: $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$,

waar X,Y en Z lokale vectorvelden zijn op M. Deze heet de Levi-Civita-connectie.

BEWIJS. We verifiëren eerst dat ∇ door deze twee condities is vastgelegd. Neem de vlakheidsvergelijking de identiteiten die hieruit ontstaan door X, Y, Z cyclisch te permuteren en trek de laatste van de som van de eerste twee af. We vinden:

$$\begin{aligned}X(g(Y,Z)) &+ Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y))\\ &= g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) + g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X)\\ &= 2g(\nabla_X Y, Z) - g([X,Y],Z) + g(Y,[X,Z]) + g([Y,Z],X).\end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat

$$\begin{aligned}g(\nabla_X Y, Z) = \tfrac{1}{2}\Big(&X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y))\\ &+ g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X)\Big),\end{aligned} \tag{1}$$

wat ∇ inderdaad eenduidig vastlegt. Definiëren we omgekeerd $\nabla_X Y$ door deze formule, dan is gemakkelijk na te gaan dat zo een connectie gedefinieerd is die aan de genoemde eigenschappen voldoet. □

Met formule (1) kunnen we de Christoffelsymbolen van de Levi-Civita-connectie berekenen. Zij (U,κ) een kaart voor M en schrijf ∂_i voor $\partial/\partial\kappa^i$. De metriek laat zich hierin uitdrukken als $g = \sum_{i,j} g_{ij} d\kappa^i d\kappa^j$. Volgens de genoemde formule geldt

$$g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) = \tfrac{1}{2}\Big(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\Big). \tag{2}$$

De Christoffelsymbolen van de Levi-Civitaconnectie met betrekking tot het gegeven coördinatenstelsel zijn gedefinieerd door de identiteit

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ji}\partial_k,$$

dus het linkerlid van (2) is gelijk aan $\sum_{l=1}^{m} \Gamma^l_{ji} g_{lk}$. Noteren we de inverse van de matrix van $(g_{k,l})$ met $(g^{l,k})$, dan levert (2) de zogenaamde *tweede Christoffelidentiteit:*

$$\Gamma^k_{ij} = \tfrac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})g^{lk}. \tag{3}$$

Een eenvoudig voorbeeld is dat van de euclidische ruimte $\mathbb{E}^m$: de matrix $(g_{k,l})$ is constant en gelijk aan de identiteit, dus alle Christoffelsymbolen zijn hiervoor nul. Hieruit volgt dat

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^{m} X^i.(\partial_i Y^j)\partial_j = \sum_{j=1}^{m} X(Y^j)\partial_j, \tag{4}$$

waar $X = \sum X^i\partial_i$ en $Y = \sum Y^i\partial_i$.

Opmerking 3.2. Is X een vectorveld op een open deel U van M, dan is de covariante afgeleide $\nabla_X g$ in de zin van opgave 45 een symmetrische vorm op τ_M die vastgelegd is door $(\nabla_X g)(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(y, \nabla_X Z)$. Volgens de vlakheidseigenschap van g is de laatste uitdrukking nul, dus die naam is terecht: hij komt er op neer dat g vlak is als snede van de bundel $\tau_M^* \otimes \tau_M^*$.

De symmetrie-eigenschap van de Levi-Civitaconnectie laat zich ook op een dergelijke manier duiden: Volgens opgave 45 bepaalt ∇ een connectie op τ_M^*. In termen van de kaart κ:

$$\nabla d\kappa^i = \sum_{j,k} -\Gamma^i_{kj}\, d\kappa^j \otimes d\kappa^k.$$

Dus als $\omega = \sum_i \omega_i d\kappa^i$ een 1-vorm is op U, dan is

$$\nabla\omega = \sum_{i,j} -\omega_i\Gamma^i_{kj} d\kappa^j \otimes d\kappa^k + \sum_{i,j}\partial_j(\omega_i)d\kappa^j \otimes d\kappa^i.$$

Het beeld van het rechterlid onder het uitproduct $\wedge : \tau_M^* \otimes \tau_M^* \to \wedge^2\tau_M^*$ is vanwege de symmetrie-eigenschap van ∇ gelijk aan $\sum_{i,j}\partial_j(\omega_i)d\kappa^j \wedge d\kappa^i = d\omega$. De symmetrie impliceert (en is zelfs equivalent met) de eigenschap dat $d = \wedge\nabla$ op 1-vormen.

Hier is nog een meetkundiger interpretatie van de symmetrie. Zij f een afbeelding van een open deel U van $\mathbb{R}^2$ naar M. Noteren we de coördinaten van $\mathbb{R}^2$ met (s,t), dan zijn $f_*(\partial/\partial_s)$ en $f_*(\partial/\partial_t)$ vectorvelden langs f. Volgens 2 kunnen we die naar vectorvelden op U afleiden. Noteren we suggestief

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial f}{\partial s}\Big) := \nabla_{f_*\frac{\partial}{\partial t}}\Big(f_*\frac{\partial}{\partial s}\Big), \qquad \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}\Big) := \nabla_{f_*\frac{\partial}{\partial s}}\Big(f_*\frac{\partial}{\partial t}\Big),$$

dan komt de symmetrie van de Levi-Civitaconnectie er op neer dat de volgorde van differentiatie geen verschil maakt: de twee uitdrukkingen zijn aan elkaar gelijk.

Snijkromming. De belangrijkste invariant van de Riemannse ruimte M is de krommingstensor $R(X \wedge Y)Z$ van de Levi-Civitaconnectie (hier zijn X, Y, Z alle drie vectorvelden). Naast het ons al bekende feit dat R antisymmetrisch is in zijn eerste twee argumenten, bezit deze tensor nog andere (anti)symmetrie eigenschappen.

PROPOSITIE 3.3. *Er geldt*

Bianchi I: $R(X \wedge Y)Z + R(Y \wedge Z)X + R(Z \wedge X)Y = 0$,
antisymmetrie: $g(R(X \wedge Y)Z, W)$ *is antisymmetrisch in* Z *en* W.

BEWIJS. De Bianchi-identiteit volgt gemakkelijk uit de symmetrie van ∇. Voor de antisymmetrie is het voldoende te laten zien dat $g(R(X \wedge Y)Z, Z) = 0$ voor alle X, Y, Z (pas dit dan toe bij vaste X en Y op W, Z en $W + Z$). Nu is wegens de compatibiliteit met de metriek:

$$XY(g(Z, Z)) = X(2g(\nabla_Y Z, Z)) = 2g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) + 2g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z).$$

Trekken we hiervan af de vergelijking die ontstaat door in de laatste X en Y te verwisselen en tevens de vergelijking $[X, Y](g(Z, Z)) = 2g(\nabla_{[X,Y]} Z, Z)$, dan vinden we $0 = 2g(R(X \wedge Y)Z, Z)$. □

Uit het antisymmetrisch zijn van $g(R(X \wedge Y)Z, W)$ in zijn eerste twee en laatste twee argumenten volgt dat deze expressie opgevat kan worden als een element van $\wedge^2 T^*M \otimes \wedge^2 T^*M$. Deze tensor is symmetrisch in de zin dat die invariant is onder verwisseling van de twee argumenten in $\wedge^2 T^*M$, anders gezegd, $g(R(X \wedge Y)Z, W) = g(R(Z \wedge W)X, Y)$: neem het inprodukt van de Bianchi-identiteit voor (X, Y, Z) met W, doe hetzelfde voor de drietallen plus één $(X, Y, W; Z)$, $(Z, W, X; -Y)$ en $(Z, W, Y; -X)$ en tel die bij elkaar op. De al afgeleide antisymmetrie-eigenschappen van de krommingstensor doen alle termen op twee na wegvallen en wat resteert is de beweerde eigenschap. De krommingstensor kan dus worden opgevat als een symmetrische bilineaire vorm op $\wedge^2 TM$. Omdat een symmetrische bilineaire vorm bepaald wordt door zijn waarden op de diagonaal, ligt R al vast door de funktie $X \wedge Y \mapsto g(R(X \wedge Y)X, Y)$. Zij nu $p \in M$ en σ een 2-dimensionale deelruimte van T_pM waarvoor de beperking van g tot σ nietontaard is (dit is natuurlijk altijd het geval als g een Riemannmetriek is). Dit betekent dat voor iedere basis v, w van σ geldt $g(v, v)g(w, w) \neq g(v, w)^2$. We definiëren de dan de *snijkromming* van σ door

$$K_p(\sigma) := -\frac{g(R(v \wedge w)v, w)}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2}. \tag{5}$$

Dit is inderdaad onafhankelijk van de gekozen basis. Dit getal kan meetkundig geïnterpreteerd worden als de kromming te p van een zeker oppervlak door p dat σ als raakruimte heeft. We zullen in hoofdstuk 5 hierover preciezer zijn.

OPGAVE 48. Bewijs dat de krommingstensor (beschouwd als symmetrische bilineaire vorm op $\wedge^2 T_p^*M$) volledig bepaald wordt door de snijkrommingen van alle nietontaarde vlakken in T_pM.

De *Riccivorm* van M te p is de bilineaire vorm $\mathrm{Ric}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ die aan $(v, w) \in T_pM \times T_pM$ toevoegt het spoor van het endomorfisme $e \in T_pM \mapsto R(e, v)w \in T_pM$. Kies nu een $e \in T_pM$ met $g(e, e) \neq 0$ en neem een diagonale basis $(e_1, \ldots, e_m)$ van T_pM met $e = e_1$. Als $g(e_i, e_i) = \lambda_i$, dan is $\mathrm{Ric}_p(v, w) =$

$\sum_i \lambda_i^{-1} g(R(e_i,v)w,e_i)$. Hieraan zien we direkt dat Ric_p symmetrisch is. Verder blijkt dat

$$g(e,e)^{-1}\,\mathrm{Ric}_p(e,e) = \sum_i \lambda_1^{-1}\lambda_i^{-1} g(R(e_1,e_i)e_i,e_1) = \sum_{i>1} K_p(\sigma_{1i}),$$

waar $\sigma_{ij} = \mathbb{R}e_i + \mathbb{R}e_j$. Het rechterlid is dus de som der snijkrommingen van de coordinaatvlakken in T_pM die $e = e_1$ bevatten.

Met de Riccivorm is geassocieerd het *Ricci-endomorfisme* $\widetilde{\mathrm{Ric}}_p \in \mathrm{End}(T_pM)$ gekarakteriseerd door $g(\widetilde{\mathrm{Ric}}_p(v),w) = \mathrm{Ric}_p(v,w)$. In termen van de diagonale basis:

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}_p(e_i) = \sum_j \lambda_j^{-1}\,\mathrm{Ric}_p(e_i,e_j)e_j$$

Het spoor van dit endomorfisme heet *scalaire kromming* $K(p)$ van M. Dit is de som der snijkrommingen van coordinaatvlakken in T_pM:

$$K(p) = \sum_j \lambda_j^{-1}\,\mathrm{Ric}_p(e_j,e_j) = \sum_{i,j} \lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1} g(R_p(e_i,e_j)e_j,e_i) = \sum_{i<j} 2K_p(\sigma_{ij}),$$

Deze funktie werd door Gauß ingevoerd en bestudeerd in het geval $m = 2$ (dan is dus $K_p(T_pM) = K(p)$) en g een Riemannmetriek is.

OPMERKING 3.4. In de algemene relativiteitstheorie speelt een belangrijke rol de *Einsteintensor*. Dit is de symmetrische bilineaire vorm op de raakbundel gedefinieerd door

$$G_p := \mathrm{Ric}_p - \tfrac{1}{2}K(p)g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}.$$

Uit het voorgaande blijkt dat

$$g(e,e)^{-1}G_p(e,e) = \sum_{1<j<k} K_p(\sigma_{jk}).$$

Het rechterlid is de som der snijkrommingen van de coordinaatvlakken loodrecht op e. We noemen het daarom de *scalaire kromming van het hypervlak* $H := e^{\perp}$, aangegeven met $K_p(H)$.

OPGAVE 49. Bewijs dat de holonomiegroep van de raakbundel van een Riemannse ruimte M te $p \in M$ (zie opgave 44) een ondergroep is van de orthogonale groep van T_pM.

OPGAVE 50. Bewijs dat de snijkromming van de euclidische ruimte constant nul is.

OPGAVE 51. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to (0,\infty)$ een differentieerbare funktie. Bepaal de kromming van de metriek $f\big((dx)^2 + (dy)^2\big)$ op $\mathbb{R}^2$.

OPGAVE 52. Zij M een Riemannse ruimte met vlakke Levi-Civitaconnectie. Bewijs dat M lokaal isometrisch is met $\mathbb{E}^m$. (Aanw.: Lokaal kunnen we een basis van vlakke vectorvelden $X_1,\dots X_m$ vinden. Merk op dat $g(X_i,X_j)$ lokaal constant is, zodat na uitvoering van een Gram-Schmidt-orthonormalisatie, aangenomen mag worden dat $g(X_i,X_j) = \delta_{ij}$. Constateer dat de Liehaakjes tussen deze vectorvelden alle nul zijn en gebruik dit om in te zien dat lokaal deze vectorvelden door een kaart gedefinieerd worden.)

4. Geodeten

In dit hoofdstuk is M een samenhangende Riemannse ruimte met metriek g.

De geodetische differentiaalvergelijking. Het *versnellingsvectorveld* van een differentieerbare kromme $\gamma : I \to M$ is de covariante afgeleide

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma.$$

Als dit constant nul is, dan noemen we γ een *geodeet*. Uit de gelijkheid

$$\frac{d}{dt}g(\dot\gamma,\dot\gamma) = 2g(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\dot\gamma)$$

lezen we af dat voor een geodeet de absolute snelheid $||\dot\gamma||$ constant is. Dus de booglengte-funktie is dan affien-lineair in t. Nu heeft, zoals direkt is na te gaan, γ ook na een affien-lineaire herparametrisering $t \mapsto \gamma(at+b)$ nog versnelling nul, zodat een geodeet na herparametrisatie door booglengte weer in een geodeet overgaat.

Laat $p \in M$ en kies een kaart-omgeving U van p die U identificeert met een open deel van $\mathbb{E}^m$. We schrijven weer $\partial_1,\dots,\partial_m$ voor de door deze kaart bepaalde basis van vectorvelden. Is nu $\gamma = (\gamma^1,\dots,\gamma^m) : (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ een differentieerbare kromme, dan is $\dot\gamma(t) = \sum_i \dot\gamma^i(t)\partial_i$, en dus is

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma &= \sum_i \dot\gamma^i \nabla_{\dot\gamma}\partial_i + \sum_i \ddot\gamma^i\partial_i\\ &= \sum_{i,j,k}\dot\gamma^i\dot\gamma^j\gamma^*(\Gamma^k_{ij})\partial_k + \sum_k \ddot\gamma^k\partial_k.\end{aligned}$$

Derhalve is de versnelling nul dan en slechts dan als aan het stelsel gewone tweede orde differentiaal-vergelijkingen

$$\ddot\gamma^k = -\sum_{i,j,k}\gamma^*(\Gamma^k_{ij})\gamma^i\dot\gamma^j,\ k = 1,\dots,m. \tag{1}$$

is voldaan. Zo'n stelsel heeft bij gegeven beginvoorwaarden $\gamma(0)$ en $\dot\gamma(0)$ precies één (locale) oplossing, welke differentieerbaar van deze beginvoorwaarden afhangt. Onze conventies zijn echter zodanig dat $\gamma(0)$ het voetpunt is van de raakvector $\dot\gamma(0)$, dus is er in feite alleen de beginvoorwaarde die $\dot\gamma(0)$ vastlegt.

LEMMA 4.1. *Er bestaat een open omgeving Ω van de nulsnede van TM in TM en een afbeelding $(t,v) \in [0,1]\times\Omega \to \gamma_v(t) \in M$ met de volgende eigenschappen:*

(i) *$\gamma_v : \Omega_v \to M$ de unieke geodeet is met $\dot\gamma_v(0) = v$*
(ii) *als $v \in \Omega$ en $s \in [0,1]$, dan is $sv \in \Omega$ en er geldt $\gamma_{sv}(t) = \gamma_v(st)$.*

BEWIJS. Uit voorgaande discussie volgt dat er een omgeving W van $\{0\}\times TM$ in $\mathbb{R}\times TM$ is waarop de geodetische stroming $(t,v) \in W \mapsto \gamma_v(t)$ gedefinieerd is (γ_v is de geodeet met beginvoorwaarde $\dot\gamma_v(0) = v$). We nemen W zó dat deze iedere rechte $\mathbb{R}\times\{v\}$ in een interval $W_v\times\{v\}$ snijdt en onderstellen W maximaal voor deze eigenschap. We constateerden al dat voor iedere $s \in [0,1]$, $t \mapsto \gamma_v(st)$ ook een geodeet is. Omdat de afgeleide hiervan te 0 gelijk is aan $s\dot\gamma(0) = sv$, geldt kennelijk $\gamma_v(st) = \gamma_{sv}(t)$, i.h.b. is $sv \in \Omega$. De verzameling $v \in TM$ met $[0,1]\times\{v\} \subset W$ is een open deel Ω van TM. Het is duidelijk dat Ω de nulsnede omvat. □

DEFINITIE 4.2. Nemen we in het voorgaande lemma Ω maximaal voor de genoemde eigenschappen, dan noemen we de afbeelding $v \in \Omega \mapsto \gamma_v(1)$ de *exponentiële afbeelding* van M. We noteren die met exp en zijn beperking tot de doorsnede $\Omega_p := \Omega\cap T_pM$ met $\exp_p$.

Min of meer per definitie is voor $v \in T_pM$, $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. Dus een maximale geodeet door p is het beeld onder $\exp_p$ van een interval-omgeving van $0 \in T_pM$ in een ééndimensionale deelruimte van T_pM De afgeleide van $\exp_p$ in $0 \in T_pM$ (opgevat als een lineaire afbeelding van $T_0T_pM \cong T_pM$ naar zichzelf) is de identiteit, want voor $v \in T_pM$ en kleine t is $\exp(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$, en de afgeleide van deze afbeelding naar t in 0 is $\dot{\gamma}_v(0) = v$.

LEMMA 4.3. *Er bestaat een omgeving U van p in M en een $\varepsilon > 0$ zodat voor iedere $q \in U$, $\exp_q$ de open ε-bol in T_qM diffeomorf op een open deel van M afbeeldt dat U omvat. Bovendien is er voor ieder paar $q, q' \in U$ precies één geodeet geparametriseerd door booglengte $\gamma_{q,q'}$ van lengte $< \varepsilon$ die q met q' verbindt.*

BEWIJS. We hebben net gezien dat $D_0 \exp_p$ niet-singulier is. De eerste uitspraak volgt dus uit de impliciete funktiestelling, toegepast op exp. Zij nu $\gamma : [0, \delta] \to M$ een geodeet geparametriseerd door booglengte van $q \in U$ naar $q' \in U$ met $\delta < \varepsilon$. Dan heeft $v := \dot{\gamma}(0) \in T_qM$ lengte 1 en er geldt $\gamma(t) = \exp_q(tv)$ waar beide gedefinieerd zijn. Omdat $||\delta v|| < \varepsilon$, is dit het gehele interval $[0, \delta]$. Daar $\exp_q$ de open ε-bol diffeomorf op een open deel B_q van M afbeeldt, volgt de eenduidigheid van γ. De existentie van γ bij gegeven $q, q' \in U$ volgt uit het feit dat $q' \in U \subset B_q$. □

We gaan bewijzen dat in de situatie van dit lemma, $\gamma_{q,q'}$ de 'kortste verbinding' tussen q en q' is, m.a.w. de afstand tussen q en q' is de booglengte van $\gamma_{q,q'}$. In 4.4 tot en met 4.8 hebben U en ε dezelfde betekenis als in het lemma.

Het volgende lemma zegt hoe de metriek er in 'poolcoördinaten' uitziet:

LEMMA 4.4 (Lemma van Gauß). *Gegeven $q \in U$, zij S de eenheidssfeer van T_qM en $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times S \to M$, $F(r, v) = \exp(rv)$. Dan heeft de teruggehaalde metriek F^*g de gedaante*

$$F^*g = (dr)^2 + r^2h.$$

Hier is h een van r afhankelijke metriek op S en er geldt $h = h_0 + O(r^2)$, waar h_0 de metriek is welke S tot eenheidssfeer maakt.

BEWIJS. De stralen zijn geparametriseerd door booglengte, dus de beperking van F^*g tot een straal is $(dr)^2$. We bewijzen dat F^*g geen gemengde termen heeft. Merk op dat F een diffeomorfisme is van $(0, \varepsilon) \times S$ op een gepuncteerde omgeving van q. Laat R het beeld zijn onder dit diffeomorfisme van het radiële vectorveld $\partial/\partial r$ en gegeven een vectorveld V op S, laat $\tilde{V}$ het beeld zijn onder dit diffeomorfisme van $(0, V')$. We moeten aantonen dat $g(R, \tilde{V}) = 0$.

Merk eerst op dat de twee vectorvelden commuteren. We laten nu zien dat $g(R, \tilde{V}$ niet van r afhangt. Omdat de Levi-Civitaconnectie compatibel is met de metriek, is de afgeleide van $g(R, \tilde{V})$ naar r,

$$R(g(R, \tilde{V})) = g(\nabla_R R, \tilde{V}) + g(R, \nabla_R \tilde{V}).$$

Het in de eerste term optredende vectorveld $\nabla_R R$ is te $F(r, s)$ precies de versnellingsvector van de geodeet γ_s in r, en is dus nul. De tweede term is vanwege de symmetrie van ∇ gelijk aan $g(R, \nabla_{\tilde{V}} R) = \frac{1}{2}\tilde{V} g(R, R) = \frac{1}{2}\tilde{V}(1) = 0$. De waarde van $g(R, \tilde{V})$ in $F(r, s)$ hangt dus alleen van s af. Beperken we beide vectorvelden tot een geodeet (dus we nemen s vast) en laten we r naar nul gaan, dan gaan resp. R en $\tilde{V}$ hierlangs naar s resp. V_s. Omdat $V_s \in T_sS$ geldt $g(s, V_s) = 0$. Dus $g(R, V) = 0$.

Laat nu h_r de beperking zijn van $r^{-2}F^*g$ tot de sfeer van straal r, beschouwd als metriek op S. We onderzoeken het gedrag van h_r voor $r \to 0$. Daartoe kiezen een $s \in S$ en een $v \in T_sS$ van lengte 1. We laten zien dat $h_r(v,v) = 1 + O(r^2)$ uniform in (s,v). Nu is (s,v) is een orthonormale basis van een vlak $P \subset T_qM$. Gebruiken we in dit vlak gewone poolcoördinaten: $xs + yv = r\cos\theta s + r\sin\theta v$, dan heeft de beperking van exp_q^*g tot P de gedaante $dr^2 + r^{-2}h(r,\theta)d\theta^2$ met $h(r,0) = h_r(v,v)$. Dus de gewenste asymptotiek volgt uit het onderstaand lemma. $\square$

LEMMA 4.5. *Laat op een omgeving van* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$ *een Riemannmetriek* g *gegeven zijn die in poolcoördinaten de gedaante* $dr^2 + r^{-2}h(r,\theta)d\theta^2$ *aanneemt. Dan is* $h = 1 + O(r^2)$ *en er geldt bovendien dat* $g = dx^2 + dy^2 + k.(xdy - ydx)^2$ *voor een funktie* k *te* $(0,0)$.

BEWIJS. Er geldt $rdr = xdx + ydy$ en $d\theta = r^{-2}(xdy - ydx)$. Substitueren we dit in de poolcoördinatengedaante, dan vinden we dat

$$g = r^{-2}(x^2 + hy^2)dx^2 - 2r^{-2}xy(h-1)dxdy + r^{-2}(y^2 + hx^2)dy^2.$$

Omdat de coëfficiënt van $dxdy$ in g differentieerbaar is te $(0,0)$, moet $h-1$ deelbaar zijn door r^2: $h - 1 = r^2k$ voor een funktie k te $(0,0)$. Alle beweringen volgen hieruit. $\square$

GEVOLG 4.6. *De exponentieel teruggehaalde metriek* g, $\exp_q^* g$, *is in de oorsprong gelijk is aan de vlakke metriek op* T_qM *gedefinieerd door* g_q *tot op orde twee. Anders gezegd, is* $e_1, \ldots, e_m$ *een orthonormale basis van* T_qM, *en beschouwen we de hierdoor gedefinieerde kaart* κ *van een omgeving van* q *op een omgeving van* $0 \in \mathbb{E}^m$, *dan is* $g_{ij} = \delta_{ij} + O(\|\kappa\|^2)$ *en de Christoffelsymbolen voor deze kaart zijn alle nul in* q.

GEVOLG 4.7. *Zij* $(r,s) : [a,b] \to (0,\varepsilon) \times S$ *een gebroken differentieerbare kromme. Dan heeft de kromme* $\omega : [a,b] \to M$, $\omega(t) = F(r(t), s(t))$, *booglengte* $\geq |r(b) - r(a)|$, *en gelijkheid kan zich alleen maar voordoen als* s *constant is en* r *monotoon (m.a.w.* ω *doorloopt een stuk van een geodetische straal uit* q*).*

BEWIJS. Waar ω differentieerbaar is geldt volgens het lemma dat $\|\dot\omega\|^2 \geq \|\dot r\|^2$ met $=$ alleen geldend als $\dot s = 0$, m.a.w. als s constant. We krijgen zo de afschatting

$$L(\omega) \geq \int_a^b \|\dot r\| dt \geq |r(b) - r(a)|,$$

die strikt is tenzij r monotoon en s constant genomen wordt. $\square$

GEVOLG 4.8. *Als* $q, q' \in U$, *dan is de booglengte van* $\gamma_{q,q'}$ *de afstand tussen* q *en* q'. *Bovendien is* $\gamma_{q,q'}$ *in wezen uniek voor deze eigenschap: iedere gebroken differentieerbare kromme* ω *van* q *naar* q' *met booglengte gelijk aan de afstand tussen* q *en* q' *is van de gedaante* $\gamma_{q,q'} \circ u$ *met* u *gebroken differentieerbaar en monotoon stijgend.*

BEWIJS. Omdat q' in het beeld van F bevat is kunnen we q' schrijven als $F(r,s) = \exp_q(rs)$. Zij $\omega : I \to M$ een gebroken differentieerbare kromme van q naar q'. Voor iedere $0 < \delta < r$, zal een segment van ω in $F([\delta, r] \times S)$ bevat zijn. Wegens het vorige gevolg heeft dit segment lengte $\geq r - \delta$, terwijl gelijkheid alleen maar kan gelden onder de genoemde voorwaarden. De beweringen volgen nu door δ naar nul te laten gaan. $\square$

STELLING 4.9. *Iedere gebroken differentieerbare weg in M waarvan de booglengte gelijk is aan de afstand tussen zijn eindpunten doorloopt een geodeet.*

BEWIJS. Volgens het laatste gevolg doorloopt de weg in ieder van zijn beeldpunten een (stukje) geodeet. □

OPMERKING 4.10. Geodeten treden op in de klassieke en de relativistische mechanica, en ook in de optica. Onderstel bijvoorbeeld gegeven een (geïdealiseerd) mechanisch systeem dat een puntdeeltje dwingt zich over een oppervlak in $\mathbb{R}^3$ te bewegen. We onderstellen dat er op het deeltje geen krachten werken, en dat het geen wrijving ondervindt. Dan doorloopt het deeltje een geodeet van M. Hetzelfde geldt voor een lichtstraal, die (door bijvoorbeeld M 'in glas uit te voeren en aan weerszijden van een spiegelende laag te voorzien') gedwongen wordt op M te blijven.

Volledigheid. Het is niet altijd mogelijk de afstand tussen twee punten $q, q' \in M$ te realiseren door een gebroken differentieerbare kromme. Voorbeelden krijgen we door uit een Riemannse ruimte M een punt $p \in M$ weg te laten: neem $q, q' \in U - \{p\}$, waar U de omgeving is van p die in Lemma 4.3 optreedt, zodanig dat p op het beeld van $\gamma_{q,q'}$ ligt. Merk op dat de Riemannse ruimte $M' := M - \{q\}$ niet volledig is (een Cauchyrij in M' met limiet q heeft geen limiet in M'. En $\exp_{q'}$ niet overal gedefinieerd als we die beschouwen als een exponentiële afbeelding voor M'. De volgende stelling laat zien dat die twee tekortkomingen niet los van elkaar staan.

STELLING 4.11 (Stelling van Hopf-Rinow). *De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(i) *Er is een $p \in M$ zodat $\exp_p$ gedefinieerd is op T_pM.*
(ii) *De exponentiële afbeelding is gedefinieerd op TM.*
(iii) *M is volledig als metrische ruimte.*

Is aan één van deze condities voldaan, dan is ieder paar punten van M te verbinden door een geodeet waarvan de booglengte gelijk is aan de afstand tussen deze punten.

Deze stelling is in wezen de vereniging van de volgende deelresultaten.

LEMMA 4.12. *Als voor zekere $p \in M$ de exponentiële afbeelding $\exp_p$ gedefinieerd is op de hele raakruimte T_pM, dan is ieder punt van M met p te verbinden door een geodeet waarvan de booglengte gelijk is aan de afstand tussen dit punt en p.*

BEWIJS. Laat $U \ni p$ en $\varepsilon > 0$ als in Lemma 4.3 zijn. Laat $q \in M$ afstand $d > 0$ tot p hebben. Kies $0 < \delta < \varepsilon$ zodat q niet bevat is in het beeld onder $\exp_p$ van de gesloten bol B_δ in T_pM van straal δ. Het is duidelijk dat iedere continue weg van p naar q een punt van zijn rand $S_\delta := \exp_p(\partial B_\delta)$ zal passeren. Ieder punt van S_δ heeft afstand δ tot p wegens 4.7. Omdat de rand compact is, wordt de afstand van S_δ tot q gerealiseerd door een $q' \in S$. Dus

$$\delta + d(q', q) = d. \tag{2_δ}$$

De eigenschappen van U garanderen het bestaan van een geodeet γ van p naar q' van booglengte δ. We onderstellen γ door booglengte geparametriseerd. Volgens aanname is γ op heel $\mathbb{R}$ gedefinieerd. We zullen bewijzen dat $\gamma(d) = q$. Dit is natuurlijk voldoende. In feite bewijzen we dat voor alle $0 \le t \le d$ geldt

$$t + d(\gamma(t), q) = d. \tag{2_t}$$

De verzameling $t \in [0,d]$ waarvoor vgl. (2_t) geldt is gesloten want beide leden van (2_t) zijn continu in t. Is zijn maximaal element t' gelijk aan d, dan zijn we natuurlijk klaar. Als $t' < d$, dan leiden we een tegenspraak af. Laat $p' := \gamma(t')$. Dan is volgens $(2_{t'})$ de afstand tussen p' en q gelijk aan $d - t' > 0$. We passen het reeds gevondene voor het paar p, q toe op p', q: er is een $q'' \in M$ en een geodeet γ' van p' naar q'' van booglengte $0 < \delta' < d - t'$ zodat

$$\delta' + d(q'', q) = d - t'. \tag{3}$$

De geodeten $\gamma|[0,t']$ en γ' laten zich samenvoegen tot een (door booglengte geparamatriseerde) gebroken differentieerbare weg ω van p naar q'' van booglengte $t' + \delta'$. Blijkens (3) is dit laatste gelijk aan $d - d(q'', q)$. De driehoeksongelijkheid (toegepast op p, q'', q) toont dat de afstand van p tot q'' minstens dit getal is, dus wordt de afstand door ω gerealiseerd. Maar dan zegt 4.9 dat ω een geodeet moet zijn. Derhalve is $\gamma'(t) = \gamma(t' + t)$. Dit weerspreekt het maximale karakter van t'. □

GEVOLG 4.13. *Onder de voorwaarden van het bovenstaande lemma is M een volledige metrische ruimte. Sterker: ieder begrensd gesloten deel van M is compact.*

BEWIJS. Zij $K \subset M$ begrensd en gesloten. Dan is er een $r > 0$ zodat ieder punt van K afstand $\leq r$ tot p heeft. Dan volgt uit de vorige stelling dat K bevat is in het beeld B onder $\exp_p$ van de gesloten bol in T_pM van straal r. Nu is B compact als continu beeld van compacte ruimte. Dus K is compact als gesloten deel van de compacte B. Is nu K het beeld van een Cauchyrij zonder limiet, dan is K discreet en oneindig. Maar K is ook begrensd en gesloten, dus compact. Dat kan alleen als K eindig is. Tegenspraak. □

De volgende omkering completeert het bewijs van de stelling van Hopf-Rinow:

PROPOSITIE 4.14. *Als M volledig is als metrische ruimte, dan is de exponentiële afbeelding gedefinieerd op heel TM (en dus wordt volgens lemma 4.12 de afstand tussen ieder tweetal punten van M gerealiseerd door een geodeet).*

BEWIJS. Als het definitiegebied D van exp van TM verschilt, dan zijn er een $v \in TM$ van lengte 1 en een $r > 0$ zodat $tv \in D$ voor $0 \leq t < r$, maar $rv \notin D$ (want D is open).De geodeet $\gamma_v : [0, r) \to M$ is geparametriseerd door booglengte en er geldt voor $0 \leq t \leq t' < r$ dat

$$d(\gamma_v(t), \gamma_v(t')) \leq \int_t^{t'} \|\dot{\gamma}_v(\tau)\| d\tau = t' - t.$$

Dus het beeld van een Cauchyrij in $[0, r)$ is een Cauchyrij in M. Zorgen we dat de eerste naar r convergeert, dan heeft de laatste een limiet $q \in M$. Passen we 4.1 toe te q, dan vinden we dat de exponentiële afbeelding voortzetbaar is over een omgeving van rv. □

Een deelvariëteit N van M noemen we *totaalgeodetisch ingebed* als iedere geodeet van N (voor de geïnduceerde metriek) ook een geodeet van M is. Dat dit niet vanzelf het geval is blijkt al uit zulke simpele voorbeelden als de eenheidssfeer in $\mathbb{E}^n$. Totaal-geodetische deelvariëteiten van dimensie 1 zijn er genoeg: het beeld van iedere geodeet zonder zelfdoorsnijdingen is er één. Interessante voorbeelden van zulke deelvariëteiten van hogere dimensie kunnen soms verkregen worden met behulp van

LEMMA 4.15. *Als een deelvariëteit N van M open is in de verzameling van dekpunten van een isometrie $I : M \to M$, dan is N totaalgeodetisch ingebed.*

BEWIJS. Zij $v \in TN$ en laat γ de geodeet van M zijn met beginvoorwaarde $\dot\gamma(0) = v$. Dan is $I\gamma$ ook een geodeet met beginvoorwaarde $(I\gamma)\dot{}(0) = dI(\dot\gamma(0)) = dI(v) = v$. Vanwege de uniciteit is dan $I\gamma = \gamma$, m.a.w. γ ligt in N. □

OPMERKING 4.16. Aangetoond kan worden dat de verzameling van dekpunten van een isometrie altijd een deelvariëteit is. (Voor diffeomorfismen is er daarentegen nauwelijks een beperking: bijna ieder gesloten deel van van een een variëteit kan als de dekpuntensverzameling van een zelfdiffeomorfisme optreden.)

VOORBEELDEN 4.17. (i) Iedere affien-lineaire deelruimte $V \subset \mathbb{E}^m$ is totaalgeodetisch ingebed. Dit is direkt in te zien, maar volgt ook uit het feit dat de transformatie I van $\mathbb{E}^m$ die de identiteit is op V en minus de identiteit op zijn orthogonaal complement $V^\perp$, V als dekpuntenverzameling heeft. In het bijzonder zijn de rechte lijnen in $\mathbb{E}^m$ geodeten. Dit zijn ze allemaal, want iedere raakvector van $\mathbb{E}^m$ raakt aan een rechte lijn.

(ii) Gaat de deelruimte V door de oorsprong, dan is I een orthogonale transformatie, die de eenheidssfeer $\mathbb{S}^{m-1}$ invariant laat. Hieruit volgt dat de doorsnede van V met $\mathbb{S}^{m-1}$ totaalgeodetisch is ingebed in $\mathbb{S}^{m-1}$. In het bijzonder is iedere grote cirkel beeld van een geodeet. Om analoge reden zijn dit alle geodeten.

(iii) Zij $b(x, y)$ de symmetrische bilineare vorm gedefinieerd door

$$x^1y^1 + \cdots x^my^m - x^{m+1}y^{m+1}$$

en zij $\mathbb{H}^m$ de hyperbolische ruimte gedefinieerd door $b(x, x) = -1$, $x_{m+1} > 0$. Is nu V een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^{m+1}$ die $\mathbb{H}^m$ treft, dan is $\mathbb{R}^{m+1}$ de direkte som van V en zijn b-orthoplement V' (bestaande uit de $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ met $b(x, y) = 0$ voor alle $y \in V$). De transformatie $\tilde I$ die de identiteit is op V en minus de identiteit op V' behoudt de vorm b. Bovendien heeft $\tilde I$ een vast punt in $\mathbb{H}^m$. Hieruit volgt dat deze transformatie $\mathbb{H}^m$ behoudt en in deze ruimte een isometrie induceert. We concluderen weer dat $\mathbb{H}^m \cap V$ een totaalgeodetisch ingebed is, en dat iedere geodeet van $\mathbb{H}^m$ de doorsnede is met een vlak door de oorsprong.

(iv) Zij $E \subset \mathbb{E}^{m+1}$ de m-dimensionale ellipsoïde met vergelijking $\sum_i (x^i/a^i)^2 = 1$, $(a^i > 0)$, voorzien van de geïnduceerde metriek. Dan is de doorsnede van E met de deelruimte opgespannen door een stel basisvectoren een totaalgeodetische deelvariëteit van E. In het bijzonder vinden we $\binom{m+1}{2}$ gesloten geodeten op E. (Voor $m = 2$ zijn er echter veel meer: volgens een stelling van Hilbert liggen hun beelden zelfs dicht in E.)

OPGAVE 53. Zij M een samenhangende Riemannse ruimte, en I een isometrie van M op zichzelf die een punt p vast laat en de identiteit in T_pM induceert. Bewijs dat I de identiteit is. (Hint: benut de exponentiële afbeelding.)

OPGAVE 54. Laat zien dat iedere isometrie van $\mathbb{E}^m$, is als beschreven in 1.5, voorbeeld 1 (dus de samenstelling is van een verschuiving en een orthogonale transformatie). Doe analoog voor de eenheidssfeer $\mathbb{S}^m$ in $\mathbb{E}^{m+1}$ en de hyperbolische ruimte $\mathbb{H}^m$.

OPGAVE 55. Bepaal de (beelden van de) gesloten geodeten op de vlakke torus (zie voorbeeld 1.5-(v) voor de definitie).

OPGAVE 56. Laten p en q punten zijn van een volledige Riemannse ruimte M. Twee continue krommen $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to M$ van p naar q heten *homotoop*, als er een familie $\{\gamma_s : [a,b] \to M\}_{0 \le s \le 1}$ van zulke krommen bestaat zodat de hiermee geassocieerde afbeelding $[a,b] \times [0,1] \to M$ continu is. Bewijs dat iedere differentieerbare kromme $\gamma : [a,b] \to M$ van p naar q homotoop is met een geodeet.

5. De Tweede Fundamentaalvorm

In dit hoofdstuk is $(\tilde{M}, \tilde{g})$ een Riemannse ruimte en $M \subset \tilde{M}$ een deelvariëteit die we voorzien hebben van de geïnduceerde metriek g. De Levi-Civitaconnectie van $\tilde{M}$ noteren we met $\tilde{\nabla}$, die van M met ∇.

De raakbundel van $\tilde{M}$, beperkt tot M is de directe som van TM en het orthogonaal complement $TM^{\perp}$ van TM in $T\tilde{M}$ (de *normalenbundel* van M in $\tilde{M}$ genaamd). Volgens 2 bepaalt $\tilde{\nabla}$ door beperking een connectie in $T\tilde{M}|M = TM \oplus TM^{\perp}$. Deze blijven we met $\tilde{\nabla}$ aangeven. Een vergelijking hiervan met de Levi-Civitaconnectie op de eerste sommand leidt tot het begrip 'tweede fundamentaalvorm'. (Deze naam is afkomstig van Gauß; de eerste fundamentaalvorm was voor hem de Riemannmetriek.)

PROPOSITIE 5.1. *Zijn X en Y lokale vectorvelden op M, dan is $\nabla_X Y$ precies de TM-component van $\tilde{\nabla}_X Y$.*

BEWIJS. Zij $\pi : T\tilde{M}|M \to TM$ de orthogonale projectie. We verifiëren dat $\pi(\tilde{\nabla}_X Y)$ voldoet aan de eigenschappen die de Levi-Civitaconnectie karakteriseren. Wegens de lokale aard van deze kwestie mogen we onderstellen dat ieder lokaal vectorveld X op M de beperking is van een lokaal vectorveld $\tilde{X}$ op $\tilde{M}$. Er geldt nu inderdaad:

$$\pi(\tilde{\nabla}_X Y) - \pi(\tilde{\nabla}_Y X) = \pi((\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X})|M) = \pi([\tilde{X}, \tilde{Y}]|M) = [X, Y],$$

en

$$\begin{aligned} g(\pi(\tilde{\nabla}_X Y), Z) + g(Y, \pi(\tilde{\nabla}_X Z)) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X Z) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z})|M + \tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Z})|M = (\tilde{X}\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z}))|M = Xg(Y, Z). \end{aligned}$$

$\square$

Schrijf $H(X,Y)$ voor de $TM^{\perp}$-component van $\tilde{\nabla}_X Y$, zodat dus $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + H(X,Y)$.

PROPOSITIE-DEFINITIE 5.2. *De waarde van $H(X,Y)$ in een punt $p \in M$ hangt alleen van $X(p)$ en $Y(p)$ af en definieert een symmetrisch homomorfisme $H : TM \otimes TM \to TM^{\perp}$. Dit homomorfisme heet de tweede fundamentaalvorm van M in $\tilde{M}$.*

BEWIJS. We hebben

$$H(X,Y) - H(Y,X) = (\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X) = [X,Y] - [X,Y] = 0.$$

dus H is symmetrisch. Omdat bij vaste Y, de waarden van $\nabla_X Y$ en $\tilde{\nabla}_X Y$ in p alleen van $X(p)$ afhangen, geldt hetzelfde voor $H(X,Y)$. Vanwege de symmetrie blijft dit waar als X en Y van rol wisselen. $\square$

Aan H kunnen we direkt zien of M in $\tilde{M}$ totaalgeodetisch is ingebed:

PROPOSITIE 5.3. *Er geldt: $H = 0 \Leftrightarrow M$ is totaalgeodetisch ingebed in $\tilde{M}$.*

Bewijs. Zij $v \in T_pM$ willekeurig, en zij γ de geodeet van M met beginvoorwaarde $\dot\gamma(0) = v$, zodat dus $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$.
$\Rightarrow$) $\tilde\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma + H(\dot\gamma, \dot\gamma) = 0 + 0 = 0$, dus γ is een geodeet in $\tilde M$.
$\Leftarrow$) Volgens aanname is γ ook een geodeet in $\tilde M$, en derhalve is $H(v, v) = 0$. Omdat v willekeurig gekozen was en H symmetrisch is volgt dat $H = 0$. $\square$

Met behulp van de tweede fundamentaalvorm is de kromming van M in die van $\tilde M$ uit de drukken:

Propositie 5.4. *Voor ieder viertal vectorvelden X, Y, Z, W op M geldt de Gaußvergelijking:*

$$g(R(X \wedge Y)Z, W) = \tilde g(\tilde R(X \wedge Y)Z, W) - \tilde g(H(X, W), H(Y, Z)) - \tilde g(H(X, Z), H(Y, W)).$$

Bewijs. Uit $\nabla_Y Z = \tilde\nabla_Y Z - H(Y, Z)$ volgt

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \pi\tilde\nabla_X \nabla_Y Z = \pi(\tilde\nabla_X \tilde\nabla_Y Z - \tilde\nabla_X H(Y, Z)).$$

Analoog vinden we $\nabla_Y \nabla_X Z = \pi(\tilde\nabla_Y \tilde\nabla_X Z - \tilde\nabla_Y H(X, Z))$. Verder is

$$\nabla_{[X,Y]} Z = \pi\tilde\nabla_{[X,Y]} Z.$$

Trek de onderste twee regels af van hun voorganger, en neem het inprodukt met W. We vinden dan
(1)

$$g(R(X \wedge Y)Z, W) = \tilde g(\tilde R(X \wedge Y)Z, W) - \tilde g(\tilde\nabla_X H(Y, Z), W) + \tilde g(\tilde\nabla_Y H(X, Z), W).$$

Differentiëren van $0 = \tilde g(H(Y, Z), W)$ naar X geeft

$$\tilde g(\tilde\nabla_X H(Y, Z), W) = -\tilde g(H(Y, Z), \tilde\nabla_X W),$$

en daar de normale component van $\tilde\nabla_X W$ per definitie gelijk aan $H(X, W)$ is, is het rechterlid gelijk aan $-\tilde g(H(Y, Z), H(X, W))$. Net zo vinden we dat

$$\tilde g(\tilde\nabla_Y H(X, Z), W) = -\tilde g(H(X, Z), H(Y, W)).$$

De propositie volgt nu door dit te substitueren in vergelijking (1). $\square$

Kromming van een deelvariëteit. Gezien de definitie van de snijkromming 3 wordt de Gaußkromming van M langs het vlak $\sigma \subset T_pM$ opgespannen door $v, w \in T_pM$ gegeven door

$$K(\sigma) = \tilde K(\sigma) + \frac{\tilde g(H(v, v), H(w, w)) - \tilde g(H(v, w), H(v, w))}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2}. \tag{2}$$

Hier is $\tilde K(\sigma)$ de Gaußkromming van $\tilde M$ langs σ. In het bijzonder zien we dat $K(\sigma) = \tilde K(\sigma)$ als M totaalgeodetisch is ingebed.

Interessant is het geval wanneer eerst een vlak $\sigma \subset T_p\tilde M$ gegeven is, en dan voor M het beeld onder exp van een kleine omgeving van de oorsprong van σ in σ gekozen wordt. Dan is M in het algemeen niet totaalgeodetisch ingebed, maar het argument voor het $\Leftarrow$)-deel van 5.3 toont wèl aan dat H nul is op $T_pM \times T_pM$. Dus dan geldt $\tilde K(\sigma) = K(\sigma) = K_M(p)$. Zo wordt de kromming van een Riemannse ruimte van dimensie ≥ 2 uitgedrukt in de kromming van zekere twee-dimensionale deelvariëteiten.

Gauß leidde de identiteit (2) af voor een oppervlak M in $\mathbb{E}^3$ teneinde de naar hem vernoemde kromming van M te berekenen (in dit geval is $\tilde{K} = 0$!). We kunnen dit wat algemener doen voor een georiënteerd hyperoppervlak M in $\mathbb{E}^{m+1}$. Voor $p \in M$ zij $N(p)$ de eenheidsvector (aangrijpend in de oorsprong) en loodrecht op T_pM vastgelegd door de conditie dat een georiënteerde basis van T_pM gevolgd door de naar p verplaatste $N(p)$ een georiënteerde basis van $T_p\mathbb{E}^{m+1} \cong \mathbb{E}^{m+1}$ is. We beschouwen N als een (differentieerbare) afbeelding van M naar de eenheidssfeer $\mathbb{S}^m$ van $\mathbb{E}^{m+1}$. Het orthogonaal complement van $N(p)$ verplaatst naar p is de raakruimte van M te p, en verplaatst naar $N(p)$ is het de raakruimte van $\mathbb{S}^m$ te $N(p)$. De twee raakruimten mogen dus met elkaar geïdentificeerd worden, waardoor bijvoorbeeld de afgeleide van N te p opgevat kan worden als een endomorfisme van T_pM.

Zij h de symmetrische bilineaire vorm op TM gedefinieerd door $h_p(v,w) = (H(v,w) \cdot N(p))$, $v, w \in T_pM$, m.a.w. de coëfficiënt van H op N.

Lemma 5.5. *Als $v, w \in T_pM$, dan is $h(v,w) = -(D_pN(v) \cdot w) = -(v \cdot D_pN(w))$. In het bijzonder is D_pN een symmetrisch endomorfisme van T_pM. Zijn v, w lineair onafhankelijk en is $\sigma \subset T_pM$ het door hen opgespannen vlak, dan is*

$$K(\sigma) = \frac{h(v,v)h(w,w) - h(v,w)^2}{(v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2}. \tag{3}$$

Bewijs. Laten X en Y vectorvelden zijn op een omgeving van p in M die in p de waarde v resp. w aannemen. Uit $(X \cdot N) = 0$ volgt dan

$$0 = Y(X \cdot N) = (\tilde{\nabla}_Y X \cdot N) + (X \cdot \tilde{\nabla}_Y N) = h(X,Y) + (X \cdot \tilde{\nabla}_Y N).$$

Schrijven we $N = \sum_i N^i \partial_i$, dan is $\tilde{\nabla}_Y N = \sum_i Y(N^i)\partial_i$ volgens formule (4) van paragraaf 3. Hiermee is aangetoond dat $h(X,Y) = -(X \cdot DN(Y))$. Samen met de symmetrie van h geeft dit de eerste bewering. De laatste formule volgt uit vergelijking (2). $\square$

Volgens (A. 5.5) is kan iedere kwadratische vorm op een inproduktruimte gediagonaliseerd worden door een orthonormale basis. Passen we dit toe op h, dan volgt dat er een *orthonormale* basis $(e_1, \ldots, e_m)$ is van T_pM is zodat $DN(e_i) = k_i e_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ voor zekere $k_1, \ldots, k_m$. De getallen $k_1, \ldots k_m$ heten de *hoofdkrommingen* van M te p. Dus $h(e_i, e_j) = k_i \delta_{ij}$. Voor $m = 2$ volgt meteen uit formule (3) dat de Gaußkromming van M te p gelijk is aan k_1k_2. Hoewel k_1 en k_2 z.g. *extrinsieke* krommingsgrootheden zijn (waarmee bedoeld wordt dat ze niet alleen van de Riemannmetriek op M, maar (a priori) ook van de inbedding van M in $\mathbb{E}^3$ afhangen), is hun produkt kennelijk 'buigingsinvariant', d.w.z. een intrinsieke krommingsgrootheid is. Toen Gauß dit ontdekte, was hij hiervan zo verrukt, dat hij deze formule het *Theorema Egregium* noemde. Hij maakte gebruik van de volgende, mogelijk concretere, beschrijving van h. Daartoe verplaatsen we M over $-p$ (zodat nu $p = 0$), en passen vervolgens een orthogonale transformatie in $\mathbb{E}^{m+1}$ toe die er voor zorgt dat T_pM opgespannen wordt door de eerste m basisvectoren. Dan is M te p de grafiek van een differentieerbare funktie $\phi = \phi(x^1, \ldots, x^m)$, waarvan de Taylor-ontwikkeling in 0 begint met een kwadratisch deel. Door nog een orthogonale transformatie in T_pM toe te passen, kunnen we zelfs bewerkstelligen dat dit kwadratisch deel de diagonaal-gedaante heeft:

$$\phi(x_1, \ldots, x_m) = \sum_i^m \frac{1}{2}\lambda_i (x^i)^2 + \cdots .$$

Omdat deze transformaties isometrieën zijn, blijven de krommingsinvarianten behouden.

Beschouw nu even het speciale geval $m = 1$ (en noem de coördinaten x, y). Dan is M een kromme die in $p = 0$ raakt aan de x-as. We bepalen de cirkel C die M in p drievoudig raakt. Het is duidelijk dat zijn middelpunt op de y-as moet liggen; C wordt dus gegeven door een vergelijking van de gedaante $x^2 + (y - r)^2 - r^2 = 0$. Schrijven we $\phi(x) = \frac{1}{2}\lambda x^2 + \cdots$ en substitueren we $y = \phi(x)$ in het linkerlid, dan krijgen we $x^2 - r\lambda x^2 +$ hogere orde termen. Drievoudig snijden in p betekent dat deze vergelijking $x = 0$ als drievoudig nulpunt moet hebben, m.a.w. $r\lambda = 1$. Als $\lambda = 0$, dan is er geen oplossing in r, maar dan moeten we natuurlijk voor C de x-as nemen. Dus λ geeft aan hoe 'gekromd' M te p is. Bedenk echter dat M (als Riemannse ruimte van dimensie 1) kromming nul heeft, dus dit is een grootheid die samenhangt met de manier waarop M in $\mathbb{E}^2$ is ingebed. We zullen dit daarom de *extrinsieke kromming* van M te p noemen. Gemakkelijk is na te gaan dat $D_pN : T_pM \to T_{N(p)}\mathbb{S}^1 \cong T_pM$ gelijk is aan vermenigvuldiging met $-\lambda$.

Keren we nu terug naar geval van willekeurige m. We zien dan dat $D_pN_i(e_i) = -\lambda_i e_i$. We concluderen dat

$$h_p(v, w) = \sum_{i=1}^{m} -\lambda_i v^i w^i.$$

Tevens volgt dat de hoofdkrommingen van M te p gelijk zijn aan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Zij $v \in T_pM$ van lengte 1, en zij V het vlak opgespannen door v en de normaal van M te p. Dan is $M \cap V$ een deelvariëteit van V, althans in een omgeving van p. Uit het voorafgaande volgt nu dat $-h_p(v, v)$ precies de uitwendige kromming is van $M \cap V$ in V te p.

VOORBEELDEN 5.6. (i) Laat $r > 0$, en zij S_r de sfeer van vectoren in $\mathbb{E}^{m+1}$ ($m \geq 1$) van lengte r. Dan is $N(x) = x/\|x\|$ en dus is $\partial_j N^i|_{S_r} = r^{-1}\delta_i^j - r^{-3}x^i x^j$. Derhalve geldt in $p = (p^1, \ldots, p^{m+1})$ voor $v, w \in T_pS_r$ dat

$$\begin{aligned} h(v, w) &= -\sum_i r^{-1} v^i w^i + \sum_{i,j} r^{-3} p^i p^j v^i w^j \\ &= -r^{-1}(v.w) + r^{-3}(v.p)(w.p) = -r^{-1}(v.w). \end{aligned}$$

Substitueren we dit in formule (3), dan zien we dat de snijkromming van S_r langs ieder vlak in zijn raakbundel gelijk is aan r^{-2}.
(ii) Beschouw voor $r > 0$ de cylinder C_r in $\mathbb{E}^3$ gedefinieerd door de vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$. Gemakkelijk is na te gaan dat de hoofdkrommingen in ieder punt gelijk zijn aan 0 en r^{-1}. De Gaußkromming is dus overal nul. Dit is ook direkt in te zien: 'afwikkelen' van de cylinder bepaalt een lokale isometrie op $\mathbb{E}^2$.

OPGAVE 57. Laat M een georiënteerd oppervlak zijn in $\mathbb{E}^3$, $N : M \to \mathbb{S}^2$ de in 5 gedefinieerde normalenafbeelding en $K : M \to \mathbb{R}$ het produkt der hoofdkrommingen. We noteren verder met μ_M resp. $\mu_{\mathbb{S}^2}$ de volumevorm van M resp. $\mathbb{S}^2$ (d.w.z. de 2-vorm die in ieder punt van de variëteit de waarde 1 op een georiënteerde orthonormale basis van de raakruimte aldaar aanneemt). Bewijs dat $N^*(\mu_{\mathbb{S}^2}) = K\mu_M$.

OPGAVE 58. Laat M een hyperoppervlak zijn in $\mathbb{E}^{m+1}$, en $p \in M$.

(a) Bereken Ric_p in termen van een orthonormale basis waarop de tweede fundamentaalvorm de diagonaal-gedaante aanneemt.

(b) Onderstel dat Ric_p proportioneel is met de metriek g_p. Bewijs dat de snijkromming op alle vlakken in T_pM constant is.

Opgave 59. Bewijs dat voor een Riemannse ruimte van dimensie 3, de Gaußkromming door de Riccivorm bepaald wordt.

Opgave 60. Zij gegeven een samenhangende Riemannse ruimte M van dimensie ≥ 3 met de eigenschap dat voor iedere $p \in M$ de Gaußkromming van ieder vlak in TM alleen maar afhangt van p. Bewijs dat de zo gedefinieerde krommingsfunktie op M constant is. (Hint: gebruik de identiteit van Bianchi.)

Opgave 61. Zij gegeven een samenhangende Riemannse ruimte M van dimensie ≥ 3 met de eigenschap dat de Riccikromming in ieder punt proportioneel is met de metriek. Bewijs dat deze proportionaliteits-faktor constant op M is. (Aanw.: gebruik weer de identiteit van Bianchi.) Zulke Riemannse ruimte spelen een belangrijke rol in de algemene relativiteitstheorie, en worden ook wel *Einsteinse ruimten* genoemd.

Opgave 62. Zij $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ een differentieerbare funktie en M_f de omwentelingsfiguur van zijn grafiek.

(a) Welke eenvoudige eigenschap moet f hebben opdat M_f overal kromming ≥ 0, resp. ≤ 0 heeft?
(b) Bewijs dat ieder vlak door de omwentelingsas M_f langs twee geodeten snijdt.
(c) Stel de differentiaal-vergelijking op waaraan f moet voldoen opdat M_f constante kromming -1 heeft.

6. De Stelling van Gauß-Bonnet

In dit hoofdstuk is M een georiënteerde Riemannse ruimte van dimensie 2.

We beginnen met de Levi-Civitaconnectie en de krommingsvorm op een andere manier te beschrijven. Zij U een open deel van M waarop gegeven zijn vectorvelden X_1 en X_2 die in ieder punt van U een georiënteerde orthonormale basis van T_pM definieren. Lokaal kunnen we zulke vectorvelden vinden door een georiënteerde kaart te kiezen, en vervolgens op het hierdoor bepaalde paar vectorvelden het Gram-Schmidt orthonormaliseringsprocedé toe te passen. Zij ω_1, ω_2 het hieraan duale paar 1-vormen (dus $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$). Dan is $\omega_1 \wedge \omega_2$ een 2-vorm die op iedere georiënteerde orthonormale basis de waarde 1 aanneemt en dus gelijk aan de oppervlakte-vorm μ_M van M.

Laat $c_i := d\omega_i(X_1, X_2)$, zodat dus $d\omega_i = c_i \omega_1 \wedge \omega_2$ $(i = 1, 2)$. De funkties c_i bepalen de Levi-Civitaconnectie ∇ op U:

Lemma 6.1. *Er geldt*

(i) $[X_1, X_2] = -c_1 X_1 - c_2 X_2$.
(ii) $\nabla_{X_i} X_1 = c_i X_2$ *en* $\nabla_{X_i} X_2 = -c_i X_1$ $(i = 1, 2)$.

Voor het afleiden van (i) gebruiken we:

Lemma 6.2. *Zij ω een 1-vorm, en X, Y vectorvelden op een variëteit die liever onbekend wil blijven. Dan is $d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$.*

BEWIJS. Als ω exact is: $\omega = df$, dan is het rechterlid gelijk aan $XYf - YXf - [X,Y]f = 0$, en dus gelijk aan ddf. Verder controleren we gemakkelijk dat als de identiteit geldt voor een 1-vorm, hij ook geldt voor een differentieerbare funktie maal die 1-vorm. Omdat iedere 1-vorm lokaal te schrijven is als een som van vormen van het type gdf, volgt het lemma. □

BEWIJS VAN LEMMA 6.1. Wegens Lemma 6.2 is

$$c_i = d\omega_i(X_1, X_2) = X_1\omega_i(X_2) - X_2\omega_i(X_1) - \omega_i([X_1, X_2]) = -\omega_i([X_1, X_2]).$$

Omdat $\omega_i([X_1, X_2])$ de X_i-coëfficiënt is van $[X_1, X_2]$, volgt (i).

Uitschrijven van $\nabla_{X_i}X_1$ op de basis X_1, X_2 geeft

$$\nabla_{X_i}X_1 = g(\nabla_{X_i}X_1, X_1)X_1 + g(\nabla_{X_i}X_1, X_2)X_2.$$

Pas nu formule (1) van 3.1 toe (en bedenk daarbij dat $g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$):

$$g(\nabla_{X_i}X_1, X_j) = \tfrac{1}{2}\Big(g([X_i, X_1], X_j) - g([X_i, X_j], X_1) - g([X_1, X_j], X_i)\Big).$$

Substitutie van deze vergelijking levert achtereenvolgens voor $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}\nabla_{X_1}X_1 &= \tfrac{1}{2}\Big(- g([X_1, X_2], X_1) - g([X_1, X_2], X_1)\Big)X_2 \\ &= -g([X_1, X_2], X_1)X_2 = c_1X_2\end{aligned}$$

wegens (1), en

$$\begin{aligned}\nabla_{X_2}X_1 = \tfrac{1}{2}\Big(&g([X_2, X_1], X_1)X_1 - g([X_2, X_1], X_1)X_1 \\ &+ g([X_2, X_1], X_2)X_2 - g([X_1, X_2], X_2)X_2\Big) = -g([X_1, X_2], X_2)X_2 = c_2X_2.\end{aligned}$$

De andere twee identiteiten worden analoog afgeleid. □

GEVOLG 6.3. *$-K\mu_M = d(c_1\omega_1 + c_2\omega_2)$, waarin K de Gaußkromming is.*

BEWIJS. Het rechterlid is gelijk aan

$$\begin{aligned}&dc_1 \wedge \omega_1 + c_1d\omega_1 + dc_2 \wedge \omega_2 + c_2d\omega_2 \\ &\qquad = \Big(- X_2(c_1) + c_1^2 + X_1(c_2) + c_2^2\Big)(\omega_1 \wedge \omega_2),\end{aligned}$$

waar bij de laatste gelijkheid gebruikt is dat voor een differentieerbare funktie f op U geldt dat de ω_i-coëfficiënt van df gelijk is aan $X_i(f)$.

Per definitie is

$$-K = g(\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1, X_2) - g(\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1, X_2) - g(\nabla_{[X_1,X_2]}X_1, X_2).$$

We berekenen iedere term afzonderlijk. Uit Lemma 6.1 volgt:

$$\begin{aligned}g(\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1, X_2) &= g(\nabla_{X_1}(c_2X_2), X_2) \\ &= X_1(c_2)g(X_2, X_2) - c_2c_1g(X_1, X_2) = X_1(c_2), \\ g(\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1, X_2) &= g(\nabla_{X_2}(c_1X_2), X_2) \\ &= X_2(c_1)g(X_2, X_2) - c_1c_2g(X_2, X_1) = X_2(c_1), \\ g(\nabla_{[X_1,X_2]}X_1, X_2) &= -c_1g(\nabla_{X_1}X_1, X_2) - c_2g(\nabla_{X_2}X_1, X_2) \\ &= -c_1g(c_1X_2, X_2) - c_2g(c_2X_2, X_2) = -c_1^2 - c_2^2.\end{aligned}$$

Samen geven deze de gewenste formule. □

Laat $\gamma : [a,b] \to M$ een differentieerbare kromme zijn die geparametriseerd is door booglengte: $\|\dot\gamma\| = 1$. Uit de identiteit $0 = \frac{d}{dt} g(\dot\gamma,\dot\gamma) = 2g(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\dot\gamma)$ lezen we af dat de het versnellingsvectorveld $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ steeds loodrecht staat op $\dot\gamma$. Noteren we met E_t de unieke raakvector in $T_{\gamma(t)}M$ zodat $(\dot\gamma, E_t)$ een georiënteerde orthonormale basis is, dan is dus $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \rho(t)E_t$ voor een scalar $\rho(t)$. Met reden (denk aan het euclidische geval) noemen we $\rho(t)$ de *kromming* van γ te $\gamma(t)$. Deze kromming is dus identiek nul precies dan als γ een geodeet is.

Veronderstel nu dat γ in U afbeeldt. Laat $\phi(t)$ de hoek zijn van $X_1(\gamma(t))$ naar $\dot\gamma$, gemeten volgens de oriëntatie. Die is bepaald modulo 2π, dus de afgeleide $\dot\phi(t)$ ligt éénduidig vast.

LEMMA 6.4. *Dan geldt* $\rho dt = \gamma^*(c_1\omega_1 + c_2\omega_2) + \dot\phi dt$.

BEWIJS. Uit $\dot\gamma = \cos\phi\, X_1{\circ}\gamma + \sin\phi\, X_2{\circ}\gamma$ volgt met behulp van de Leibnitzregel en Lemma 6.1, dat

$$\ddot\gamma = (c_1{\circ}\cos\phi + c_2{\circ}\sin\phi + \dot\phi)(-\sin\phi\, X_1{\circ}\gamma + \cos\phi\, X_2{\circ}\gamma).$$

De laatste uitdrukking tussen haakjes is precies E_t, dus zijn cöefficiënt (de eerste uitdrukking tussen haakjes) is gelijk aan $\rho(t)$. Het lemma volgt nu uit het feit dat $\gamma^*\omega_i = \omega_i(\dot\gamma) =$ de coëfficient van $\dot\gamma$ op X_i, d.w.z. $\cos\phi$ als $i = 1$ en $\sin\phi$ als $i = 2$. $\square$

Een intermezzo over windingsgetallen. Zij $\gamma : [0,L] \to M$ een gebroken differentieerbare kromme die geparametriseerd wordt door booglengte en die gesloten is: $\gamma(L) = \gamma(0)$. De (eindig vele) waarden van het argument waar γ niet differentieerbaar is noteren we $0 < t_1 < \cdots < t_N < L$; we onderstellen gemakshalve dat in $t = 0$ geen kink optreedt: $\dot\gamma(0) = \dot\gamma(L)$. We noteren de buitenhoek $\angle\big(\lim_{t\downarrow t_i}\dot\gamma(t), \lim_{t\uparrow t_i}\dot\gamma(t)\big)$ van de kink te t_i (gemeten volgens de oriëntatie) met $\Delta(t_i) \in (-\pi,\pi)$, en we noemen $\sum_i \Delta(t_i)$ de *kinkensom* van γ (notatie Δ_γ). Waar de raakvector $\dot\gamma(t)$ gedefinieerd is, heeft die lengte 1.

Veronderstel nu verder gegeven een vectorveld Y gedefinieerd en nergens nul op een omgeving van het beeld van γ. Laat $\phi(t) \in \mathbb{R}$ de hoek zijn van $\dot\gamma(t)$ naar $Y(\gamma(t))$; preciezer, laat $\phi : [0,L] \setminus \{t_1,\dots,t_N\} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

(i) ϕ is continu en modulo 2π gelijk aan genoemde hoek en
(ii) $\lim_{t\downarrow t_i}\phi(t) - \lim_{t\uparrow t_i}\phi(t) = \Delta(t_i)$ $(i = 1,\dots,N)$.

Omdat $\gamma(L) = \gamma(0)$, is $\phi(L) - \phi(0)$ een geheel veelvoud van 2π. We noemen dit gehele getal het *windingsgetal* van Y langs γ en noteren het met $w_\gamma(Y)$. Merk op dat geldt

$$\int_0^L \dot\phi dt + \Delta_\gamma = 2\pi w_{\gamma(Y)}. \tag{1}$$

De formule laat zien dat het windingsgetal niet verandert als we γ herparametriseren door een ander beginpunt te kiezen: als $\gamma' : \mathbb{R} \to M$ gedefinieerd is door $\gamma'(t) = \gamma(t+a)$ voor een a, dan is $w_{\gamma'|[0,L]}(Y) = w_\gamma(Y)$. Dus is γ zonder zelfdoorsnijding, dan hangen de termen in bovenstaande vergelijking alleen van het georiënteerde beeld C van γ af; in dat geval schrijven we Δ_C en $w_C(X)$. Omkeren van de oriëntatie van γ doet ook $w_\gamma(X)$ van teken veranderen: $w_{-\gamma}(X) = -w_\gamma(X)$. Is $\{Y_s\}_{0\le s\le 1}$ een continue familie van nergens-nul vectorvelden op een omgeving van γ, dan is de hoekfunkie $\phi_s(t)$ continu in beide variabelen; i.h.b. is $w_\gamma(Y_s)$ continu in s. Anderzijds is deze uitdrukking geheelwaardig, dus constant in s. Om analoge reden is w_γ onafhankelijk van de Riemannmetriek: is g_1 een tweede Riemannmetriek (waarvan we zelfs mogen aannemen dat deze slechts gedefinieerd is op een omgeving V van het beeld van γ), dan is $g_s := (1-s)g|V + sg_1$ een continue familie Riemannmetrieken op V en de bijbehorende funktie $\phi_s(t)$ hangt weer continu van beide variabelen af.

We zijn nu voldoende toegerust om het belangrijkste deel van de stelling van Gauß-Bonnet te kunnen bewijzen.

PROPOSITIE 6.5. *Laat G een compacte tweedimensionale deelvariëteit zijn van M met rand ∂G, waarbij we toelaten dat deze kinken heeft. Geef G de oriëntatie van M en oriënteer met behulp hiervan ∂G volgens de bekende conventie. Zij Y een vectorveld gedefinieerd op een omgeving van G in M dat nergens nul wordt. Dan geldt:*

$$\int_G K\mu_M + \int_{\partial G} \rho\, dt + \Delta_{\partial G} = 2\pi w_{\partial G}(Y). \tag{2}$$

(Hier is dt de lengte-vorm op het gladde deel van ∂G. Verder kan ∂G meerdere componenten hebben; $\Delta_{\partial G}$ en $w_{\partial G}$ zijn dan de som van de bijdragen van elk der componenten.)

BEWIJS. Het linkerlid van de te bewijzen identiteit hangt niet af van Y en het rechterlid verandert niet als we Y door $X_1 := Y/||Y||$ vervangen. Het is dus voldoende die voor X_1 te bewijzen. Nu is er een uniek vectorveld X_2 op het definitiegebied van Y zodat (X_1, X_2) daar een georiënteerde orthonormale basis is. Dan wordt het voorgaande toepasbaar en we vinden

$$\begin{aligned}\int_G -K\mu_M &= \int_G d(c_1\omega_1 + c_2\omega_2) && (6.3)\\ &= \int_{\partial G} c_1\omega_1 + c_2\omega_2 && \text{(Stokes)}\\ &= \int_{\partial G} (\rho - \dot{\phi})dt && (6.4)\end{aligned}$$

De propositie volgt na substitutie van vergelijking (1). □

We beschouwen het geval dat G een *geodetische driehoek* is, d.w.z. het diffeomorfe beeld van een driehoek in $\mathbb{E}^2$, waarvan de zijden op geodeten worden afgebeeld. Dan is de kromming langs ∂G dus identiek nul, en derhalve geeft die geen bijdrage aan het linkerlid van (2). Het windingsgetal mag (zie 6) berekend worden met de euclidische metriek op G. Daarvoor zijn de integranden van beide integralen in 6.5 identiek nul, zodat $2\pi w_{\partial G(X_1)}$ gelijk is aan de som der buitenhoeken van een vlakke driehoek, d.w.z. aan 2π. We concluderen dat $w_{\partial G(X_1)} = 1$. Vullen we dit in, dan zien we de integraal van K over G gelijk is aan $2\pi - \Delta_{\partial G}$. Geven we de *binnenhoeken* van G aan met α, β, γ, dan is dit laatste gelijk aan het *hoekexces* $\alpha + \beta + \gamma - \pi$. Zo vinden we:

PROPOSITIE 6.6 (Gauß-Bonnet voor een geodetische driehoek). *Voor een geodetische driehoek in M is het hoekexces gelijk aan $\int_G K\mu_M$.*

We zien hieraan dat de Gaußkromming in een punt $p \in M$ hetzelfde teken heeft als het hoekexces van een zeer kleine geodetische driehoek om p. Speciaal interessant zijn de Riemannse oppervlakken met constante Gaußkromming $\neq 0$, bijvoorbeeld het boloppervlak ($K > 0$) en het hyperbolische vlak ($K < 0$). Dan is kennelijk de absolute waarde van het hoekexces evenredig het oppervlak van de driehoek. Hieruit is gemakkelijk af te leiden dat de geodetische driehoek op isometrie bepaald wordt door $K \neq 0$ en zijn binnenhoeken. Voor euclidische driehoeken (waarvoor dus $K = 0$), is dit natuurlijk niet het geval: die kunnen gelijkvormig zijn zonder congruent te zijn.

Voor een globalere versie van Gauß-Bonnet moeten we het hebben over vectorveldnulpunten. Is Y een vectorveld op een differentieerbare variëteit N, dan zullen we de verzameling van nulpunten van Y met $\Sigma(Y)$ aangeven. Zonder bewijs vermelden we dat 'in het algemeen' de singuliere verzameling van een vectorveld uit alleen geïsoleerde punten bestaat: voor een geschikte topologie op de lineaire ruimte van vectorvelden op N vormen de vectorvelden met deze eigenschap een open-dicht deel. Dit wordt aannemelijk als we ons realiseren dat $\Sigma(Y)$ de doorsnede is van de twee n-dimensionale deelvariëteiten N en $Y(N)$ van de $2n$-dimensionale variëteit TN, dus als ze elkaar 'goed snijden' dan bestaat $\Sigma(Y)$ inderdaad uit geïsoleerde punten.

We onderstellen nu dat $\dim(N) = 2$ en gaan met iedere geïsoleerde singulariteit p van Y een geheel getal, zijn *index*, associeren. Eerst nemen we aan dat N een open deel is van $\mathbb{R}^2$ en $p = 0$. Laat X een vectorveld zijn op een omgeving van 0 met $X(0) \neq 0$. Kies een $R > 0$ zo klein dat de gesloten schijf D van straal R om 0 in N en het definitiegebied van X en Y bevat is, en bovendien X en Y daarop geen singulariteiten hebben. We parametriseren ∂D door de hoek: $\phi \in \mathbb{R} \mapsto (R\cos\phi, R\sin\phi) \in \partial D$. We laten nu $\alpha(\phi)$ de hoek zijn van X naar Y gemeten volgens de positieve oriëntatie in $(R\cos\phi, R\sin\phi)$ zodat deze continu van ϕ afhangt. Deze funktie is bepaald modulo een constant geheel veelvoud van 2π. Het is duidelijk dat $\alpha(2\pi) - \alpha(0) = 2\pi I$ voor een $I \in \mathbb{Z}$. Omdat het linkerlid continu is in ϕ volgt dat dat I niet afhangt van ϕ; we noteren deze constante (voorlopig) met $I(Y)$.

LEMMA 6.7. (i) *$I(Y)$ hangt noch van R, noch van X af.*
(ii) *Voor ieder diffeomorfisme h van een omgeving van $0 \in N$ op een omgeving van $0 \in \mathbb{R}^2$ met $h(0) = 0$ is $I(h_*Y) = I(Y)$*
Hier is h_*Y het vectorveld is vastgelegd door $h_*Y(h(z)) = Dh(Y(z))$.

BEWIJS. Omdat de identiteit die $I(Y)$ definieert continu van R afhangt en geheelwaardig is, is deze onafhankelijk van R. Een zelfde argument laat zien dat de rest van (i) volgt als we aantonen dat bij een andere keus X_1 voor X het mogelijk is X continu te deformeren in X_1 middels een familie $\{X_t\}_{0\leq t\leq 1}$ die alle zonder singulariteiten zijn op een vaste omgeving U van 0. Zo'n familie is eenvoudig te beschrijven: door X_1 te roteren mogen we aannemen dat $X_1(0)$ gelijk is aan $X(0)$ maal een positieve scalar. Neem dan $X_t = (1-t)X + tX_1$. (Als omgeving U voldoet bijvoorbeeld de verzameling punten van N waar X en X_1 positief inprodukt hebben.)

Voor (ii) laten we h_1 de afgeleide van h te 0 zijn beschouwd als lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$ op zichzelf. Dan heeft $h_t := (1-t)h + th_1$ dezelfde afgeleide als h in 0, en is dus een lokaal diffeomorfisme te 0. De funktie $t \mapsto I(h_{t*}Y)$ is continu in t, en dus constant. Het is bekend dat twee niet-singuliere transformaties in dezelfde boogsamenhangscomponent van $GL_2(\mathbb{R})$ zitten als ze hun determinant dezelfde tekens hebben. Dus h_1 is continu in de identeit of in de spiegeling s t.o.v. x_1-as over te voeren. Blijft dus nog te behandelen het geval dat $h = s$. Wegens (1) mogen we zonder bezwaar aannemen dat $X = \partial_1$. Dan is de hoek van $h_*(Y)$ met ∂_1 in $(R\cos\phi, R\sin\phi)$ gelijk aan minus de hoek van Y met ∂_1 in $(R\cos\phi, -R\sin\phi) = (R\cos(-\phi), R\sin(-\phi))$. Dus de funktie α voor $h_*(Y)$ is $-\alpha(-\phi)$. Nu is

$$-\alpha(-2\pi) - (-\alpha(0)) = \alpha(0) - \alpha(-2\pi) = \alpha(2\pi) - \alpha(0)$$

en dus gelijk aan $I(Y)$. □

Uit dit Lemma volgt dat de index zinvol gedefinieerd is voor ieder geïsoleerd singulier punt p van een vectorveld op een oppervlak N; we noteren deze met $I_p(Y)$. Is C een kleine positief georiënteerde cirkel om p (relatief een kaart te p), dan is voor iedere $q \in C$ de hoek van $(X(q)$ naar $Y(q)$ het verschil van de hoek van de positief georiënteerde halfrechte $T_q^+C \subset T_qC$ naar $X(q)$ en de hoek van T_q^+C naar $Y(q)$. De definities impliceren dan dat

$$I_p(Y) = w_C(X) - w_C(Y) = 1 - w_C(Y). \tag{3}$$

Terug naar M.

STELLING 6.8 (Stelling van Gauß-Bonnet). *Laat M een compact georiënteerd oppervlak zijn en Y een vectorveld op M met slechts geïsoleerde singulariteiten. Dan is*

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\mu_M = \sum_{p\in\Sigma(Y)} I_p(Y).$$

BEWIJS. Kies bij iedere $p \in \Sigma(D)$ een gesloten omgeving D_p diffeomorf met de gesloten eenheidsschijf in $\mathbb{R}^2$, zodat $D_p \cap D_q = \emptyset$ als $p \neq q$. De oriëntatie van M bepaalt er één voor D_p en dus ook voor zijn rand ∂D_p. Het complement G in M van de inwendigen van deze schijven is een georiënteerde variëteit met rand $\partial G = \cup(-\partial D_p)$, waar het minteken aangeeft dat de oriëntatie tegengesteld is aan die we zoëven beschreven. Volgens 6.5 geldt:

$$\int_G K\mu_M = -\int_{\partial G} \rho\, dt + 2\pi w_{\partial G}(Y).$$

Op D_p laten we X_p een vectorveld zonder singulariteiten zijn. Er geldt weer volgens 6.5:

$$\int_{D_p} K = -\int_{\partial D_p} \rho\, dt + 2\pi w_{\partial D_p}(X_p).$$

Tellen we bovenstaande identiteiten bij elkaar op, dan vinden we

$$\begin{aligned}\int_M K\mu_M &= \sum_{p\in\Sigma(Y)} 2\pi\big(w_{-\partial D_p}(Y) + w_{\partial D_p}(X_p)\big)\\ &= \sum_{p\in\Sigma(Y)} 2\pi\big(-w_{\partial D_p}(Y) + w_{\partial D_p}(X_p)\big)\\ &= \sum_{p\in\Sigma(Y)} 2\pi I_p(Y),\end{aligned}$$

vanwege (3). (De ρ-termen vielen tegen elkaar weg door verschil in oriëntatie.) □

De stelling van Gauß-Bonnet is om minstens twee redenen opmerkelijk. Ten eerste blijkt dat de integraal van de krommingsfunktie over M een geheel veelvoud is van 2π *dat onafhankelijk van de metriek is.* Ten tweede vinden we dat de som der indices van een vectorveld met slechts geïsoleerde singulariteiten een constante is die onafhankelijk van het vectorveld is. We noemen deze constante de *Eulerkarakteristiek* van M, en noteren die met $e(M)$. Als deze $\neq 0$ is, dan kan de raakbundel van M dus niet triviaal zijn.

Euler voerde hem anders in: hij ging uit van een *triangulatie* van M, d.w.z. een overdekking van M met diffeomorfe beelden van volle driehoeken, waarvan de zijden aansluiten. (Een triangulatie bestaat altijd, het bewijs is echter nogal technisch.) Gegeven een triangulatie van M, dan kunnen we een vectorveld Y op M maken door zijn beperking tot iedere driehoek er als volgt uit te laten zien:

Dan krijgen we singulariteiten in de hoekpunten (van index +1), in de middens der zijden (van index -1), en in de zwaartepunten (van index +1). Dus

$$e(M) = \sum_p I_p(Y) = \#(hoekpunten) - \#(zijden) + \#(driehoeken).$$

Een samenhangend oriënteerbaar compact oppervlak is diffeomorf met het oppervlak van een lichaam met $g \geq 0$ 'hengsels'. Nu gaat men gemakkelijk na (door bijvoorbeeld te trianguleren) dat de Eulerkarakteristiek van zo'n oppervlak gelijk is aan $2 - 2g$. Derhalve wordt g door M bepaald; we noemen dit het *geslacht* van M. Dus als M een triviale raakbundel heeft, dan is zijn Eulerkarakteristiek nul, zijn geslacht dus $= 1$, en derhalve is M diffeomorf met een torus (die heeft inderdaad een triviale raakbundel).

Gauß-Bonnet zegt dus dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K\mu_M = 2 - 2g.$$

GEVOLG 6.9. (i) *Er is geen metriek op S^2 met kromming overal ≤ 0.*

(ii) *Als een metriek op een torus kromming overal ≥ 0 (resp. ≤ 0) heeft, dan is die kromming constant nul.*

(iii) *Als M geslacht ≥ 2 heeft, dan bestaat er geen metriek op M met kromming ≥ 0.*

OPMERKINGEN 6.10. Twee metrieken g, g' op een Riemannse ruimte N heten *conform-equivalent* als er een differentieerbare funktie $f : N \to (0, \infty)$ bestaat zodat $g' = f.g$. Anders gezegd, g en g' bepalen hetzelfde hoekbegrip. Bewezen kan worden dat voor een samenhangend georiënteerd compact oppervlak, iedere metriek conform equivalent is met één die constante kromming $1, 0$, of -1 heeft, overeenkomstig het teken van de Eulerkarakteristiek. We krijgen dan achtereenvolgens

(i) de eenheidssfeer $\mathbb{S}^2$ van $\mathbb{R}^3$,
(ii) een torus die de gedaante $\mathbb{E}^2/(\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b)$ heeft, waar (a, b) een basis is van $\mathbb{E}^2$,
(iii) een Riemanns oppervlak dat isometrisch is $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$, waar Γ een zekere discrete groep van isometrieën is van $\mathbb{H}^2$, die vrij werkt.

Een conforme equivalentieklasse (=een hoekbegrip) op een samenhangend compact georiënteerd oppervlak blijkt een 'complexe structuur' op M te bepalen: M kan dan beschouwd worden als een complex-analytische variëteit van complexe dimensie 1.

Opgave 63. Formuleer en bewijs een gemeenschappelijke generalisatie van 6.5 en 6.8.

Opgave 64. Zij M een georiënteerd compact oppervlak met rand en zij Y een vectorveld op M dat raakt aan ∂M en waarvan de singulariteiten in het inwendige bevat zijn en eindig in aantal zijn. Is verder M voorzien van een Riemannmetriek, bewijs dan dat

$$\int_M K\mu_M + \int_{\partial M} \rho\, dt = \sum_{p\in\Sigma(Y)} I_p(Y).$$

Concludeer dat het linkerlid onafhankelijk van de metriek is en het rechterlid onafhankelijk van Y.

Veronderstel nu M getrianguleerd. Bewijs dat de leden van bovenstaande identiteit ook gelijk zijn aan $\#(hoekpunten) - \#(zijden) + \#(driehoeken)$.

HOOFDSTUK 3

Excursies

1. De Euler-Lagrangevergelijkingen

In de volgende paragrafen beschrijven we heel beknopt de meetkundige context van de klassieke mechanika: het Lagrangeformalisme en het daaruit afgeleide (en algemenere) Hamiltonformalisme. (Voor meer hierover zie b.v. V.I. Arnol'd: *Mathematical methods of Classical Mechanics.*) Hun quantummechanische pendanten zijn in wezen oneindig dimensionale versies: men zou kunnen zeggen dat met het Hamiltonformalisme correspondeert de theorie van de Schrödingervergelijking en met het Lagrangeformalisme de Feynman padintegraal. De laatste heeft generalisaties (met name oppervlakteintegralen) die een belangrijke rol spelen in de snarentheorie.

Eén van de opmerkelijkste paradigma's in de natuurkunde is Fermat's *principe van de kleinste tijd*: grosso modo zegt dit dat de baan van een lichtstraal in een inhomogeen medium zó is dat een gegeven traject in de kleinst mogelijke tijd doorlopen wordt. Hieruit kan bijvoorbeeld worden afgeleid de wet van Snellius over het breken van licht bij een doorzichtige vloeistofspiegel: die wordt dan gevolg van het feit dat het licht in de vloeistof zich langzamer voortplant dan in lucht. Fermat's principe is in feite een variatieprincipe, wat geformaliseerd wordt door de volgende beschouwing. Zij M een variëteit, $L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een funktie en laat $a, b \in M$ vast. Voor iedere differentieerbare kromme $q : [0, r] \to M$ van a naar b beschouwen we de integraal

$$S(q) := \int_0^r L(\dot{q}(t), t)dt.$$

We zoeken nu naar een q waarvoor deze integraal minimaal is. We nemen eerst het geval dat $M = U$ open is in $\mathbb{R}^m$. We vereenzelvigen TU met $U \times \mathbb{R}^m$ en geven een punt van $U \times \mathbb{R}^m$ weer met $(x^1, \dots, x^m, v^1, \dots, v^m)$. Dus dan is

$$S(q) = \int_0^r L(q(t), \dot{q}(t), t)dt.$$

STELLING 1.1 (Euler-Lagrangevergelijking). *Beschouw S als funktie op de verzameling differentieerbare krommen gedefinieerd op het interval $[0, r]$ die 0 op a en r op b afbeelden. Als S in q een lokaal extremum heeft, dan geldt*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(q(t), \dot{q}(t), t)\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(q(t), \dot{q}(t), t)$$

voor alle $t \in [0, r]$ en $i = 1, \dots, m$.

BEWIJS. Een kleine variatie van q met behoud van eindpunten is te geven door $q_s(t) := q(t) + sh(t)$, waar $h : [0, r] \to \mathbb{R}^m$ met $h(0) = h(r) = 0$. De afgeleide van

$s \mapsto S(q_s)$ moet nul zijn in $s = 0$, dus

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} S(q_s) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^r \big(\frac{\partial L}{\partial x^i}(q(t), \dot{q}(t), t) h_i(t) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(q(t), \dot{q}(t), t) \dot{h}_i(t)\big) dt.$$

De afgeleide van h_i kunnen we elimineren door middel van partiële integratie:

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial L}{\partial v^i}&(q(t), \dot{q}(t), t) \dot{h}_i(t) dt \\ &= -\int_0^r \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial L}{\partial v^i}(q(t), \dot{q}(t), t)\big) h_i(t) dt + \frac{\partial L}{\partial v^i}(q(t), \dot{q}(t), t) h_i(t)\Big|_0^r \\ &= -\int_0^r \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial L}{\partial v^i}(q(t), \dot{q}(t), t)\big) h_i(t) dt,\end{aligned}$$

waar we gebruikten dat $h_i(r) = h_i(0) = 0$. Dus we vinden dat

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \int_0^r \big(\frac{\partial L}{\partial x^i}(q(t), \dot{q}(t), t) h_i(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i}(q(t), \dot{q}(t), t)\big) h_i(t) dt$$

Dit geldt voor alle funkties $h : [0, r] \to \mathbb{R}^m$ met $h(0) = h(r) = 0$. De stelling volgt nu uit het simpele feit dat een funktie $f : [0, r] \to \mathbb{R}$ waarvoor $\int_0^r f(t) g(t) dt = 0$ voor alle funkties $g : [0, r] \to \mathbb{R}$ met $g(0) = g(r) = 0$ alleen maar identiek nul kan zijn. □

VOORBEELD 1.2. Een deeltje met massa m dat zich in $\mathbb{E}^3$ beweegt volgens een baan $q(t)$ heeft kinetische energie $\frac{1}{2}m\|\dot{q}(t)\|^2$. Stel het is onderhevig is aan een conservatief krachtenveld F met potentiaalfunktie U: $F = -\operatorname{grad} U$. De *Lagrangiaan* van het systeem is het verschil tussen die twee: $L(x, v) = \frac{1}{2}m\|v\|^2 - U(x)$. De Euler-Lagrangevergelijking voor γ luidt

$$\frac{d}{dt} m\dot{q}(t) = -\operatorname{grad} U(q(t)).$$

Dit komt neer op $m\ddot{q}(t) = F(q(t))$: dat is dus de wet van Newton. Zo is deze wet geformuleerd als een variatieprincipe: de baan $q(t)$ is blijkbaar zó, dat $S(q)$ daarlangs een lokaal extremum heeft (in feite een lokaal minimum). Dit is het *principe van de kleinste actie* zoals gepostuleerd door Hamilton, die zich hierbij liet leiden door Fermat's principe van de kleinste tijd. Belangrijk hieraan is vooral het verplaatste gezichtspunt: een misschien weinig tot de verbeelding sprekende differentiaalvergelijking krijgt een meetkundige interpretatie, waardoor we er anders over gaan denken.

De extremaliteitseigenschap van q voor S heeft betekenis voor variëteiten, dus verwachten we dat hetzelfde geldt voor het voldoen aan de Euler-Lagrange vergelijkingen. Met als gevolg dat de wet van Newton een plaats krijgt in de theorie van variëteiten, met alle flexibiliteit en mogelijkheden tot generalisaties die deze context eigen is. Toch is het niet zo eenvoudig die formulering te vinden. We doen dit in stappen: eerst bespreken we de Legendretransformatie, vervolgens de beginselen van de symplectische meetkunde en tenslotte geven we aan hoe we de Euler-Lagrangevergelijkingen de Hamiltonvorm kunnen geven.

OPMERKING 1.3. In de literatuur komen we het variatiesymbool δ tegen, zoals in de formule:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{m} \int_0^r [\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial v^i}(q(t), \dot{q}(t), t)) - \frac{\partial L}{\partial x^i}(q(t), \dot{q}(t), t)]\delta q^i(t)dt.$$

De interpretatie hiervan is als volgt: de verzameling $\mathcal{Q}$ van differentieerbare krommen van Stelling 1.1 is te interpreteren als een (oneindigdimensionale) variëteit waarvoor $S : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ een differentieerbare funktie is. De raakruimte van $\mathcal{Q}$ te q bestaat uit alle krommen $\delta q : [0, r] \to \mathbb{R}^m$ met $\delta q(0) = \delta q(r) = 0$. Bovenstaande formule beschrijft nu de afgeleide van S te q toegepast op δq. De Euler-Lagrange vergelijkingen komen neer op de uitspraak dat de afgeleide van S in een lokaal extremum nul is.

Als $\mathcal{Q}$ de collectie krommen $q : [0, r] \to M$ is in een variëteit M van een vast punt a naar een vast punt b, dan is de raakruimte van $\mathcal{Q}$ te q de ruimte van vectorvelden langs q, d.w.z. de collectie afbeeldingen $\delta q : [0, r] \to TM$ waarvoor $q(t)$ het voetpunt is van $\delta q(t)$ met $\delta q(0) = 0$ en $\delta q(r) = 0$. (Dit is inderdaad een vectorruimte.)

2. Legendretransformatie

Zij V een reële, eindigdimensionale vectorruimte. Een inprodukt op V bepaalt een inprodukt op V^*. Noemen we de bijbehorende kwadratische vormen q en q', dan is $\frac{1}{2}q'(\phi) = \max_{v \in V}\{\phi(v) - \frac{1}{2}q(v)\}$ (dit volgt door q op standaardgedaante te brengen). Er is een grotere klasse van paren funkties op V en V^* waarvoor zo'n betrekking geldt.

DEFINITIE 2.1. Zij O een open deel van de vectorruimte V. Een funktie $L : O \to \mathbb{R}$ noemen we *sterk convex* als de afgeleide $v \in O \mapsto dL_v \in V^*$ een diffeomorfisme is van O op een open deel $\check{O}$ van V^* en L zijn eerste orde benadering in ieder punt v strikt majoreert buiten dat punt: $L(v') > L(v) + dL_v(v' - v)$ voor alle $v' \neq v$. Voor $\phi = dL_v \in \check{O}$, geldt dus dat

$$v' \in O \mapsto \phi(v') - L(v') = \phi(v) - L(v) - \big(L(v') - L(v) - dL_v(v' - v)\big)$$

in v zijn (unieke) maximum heeft. De funktie op $\check{O}$ die aan $\phi \in \check{O}$ dit maximum toekent: $\phi \mapsto \phi(v) - L(v)$, waar v gekarakteriseerd is door $\phi = dL_v$, heet de *Legendre-getransformeerde* van L. We noteren die met $\check{L}$. Als $O = V$ en $\check{O} = V^*$, dan zeggen we dat L *globaal sterk convex*[1] is.

VOORBEELD 2.2. Neem het geval dat $L : V \to \mathbb{R}$ een veeltermfunktie is van graad 2 waarvan het homogene deel van graad twee positief definiet is. Voor een passende basis $(e_1, \ldots, e_m)$ van V met duale basis $(x^1, \ldots, x^m)$ krijgt L de gedaante $L(v) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2}(v^i - a^i)^2 + c$. Dus dL_v is de lineaire vorm $x \mapsto \sum_i (v^i - a^i)x^i$. We zien: $v \mapsto dL_v$ is een diffeomorfisme van V op V^*. Is gegeven een $\phi \in V^*$, en schrijven we $\sum_{i=1}^m \phi_i x^i$, dan heeft $dL_v = \phi$ als enige oplossing $v^i = \phi_i + a^i$ en inderdaad neemt $x \mapsto \phi(x) - L(x)$ hier zijn maximum aan. Dit maximum is gelijk aan $\sum_{i=1}^m \phi_i(\phi_i + a^i) - \sum_{i=1}^m \frac{1}{2}(\phi_i)^2 - c = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2}(\phi_i + a^i)^2 - c - \sum_{i=1}^m \frac{1}{2}(a^i)^2$.

OPGAVE 65. Bewijs dat toepassen van de Legendretransformatie op $\check{L}$ L teruggeeft.

---

[1]NB: Deze terminologie en onze notatie voor de Legendretransformatie is niet algemeen gangbaar.

Deze definitie laat zich zonder problemen overzetten naar het geval van een open deel O van een willekeurige vectorbundel $E \to M$ (de constructie geschiedt dan vezelsgewijs). Ons interesseert alleen het geval van de raakbundel van M (of iets algemener, het geval dat $E = TM \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$). Met name wanneer M een Riemannmetriek g heeft en $U : M \to \mathbb{R}$ een funktie is: dan is M te interpreteren als de configuratieruimte van een conservatief mechanisch systeem met $U(a)$ de potentiële energie te a en $\frac{1}{2}g(v,v)$ de kinetische energie. In dit geval heet $L : TM \to \mathbb{R}$, $L(v) = \frac{1}{2}g(v,v) - U(a)$ (a is het voetpunt van v) de *Lagrangiaan* van dit systeem en zijn Legendre-getransformeerde kan als de energie worden geduid:

Voorbeeld 2.3. We vervolgen voorbeeld 1.2, dus $M = \mathbb{E}^3$ en $L(x,v) = \frac{1}{2}m\|v\|^2 - U(x)$. Merk op dat L globaal convex is en dat $dL_{x,v} = (x, mv)$. We herkennen mv als de impuls. Blijkbaar moet die niet als een raakvector maar als een coraakvector worden opgevat. Schrijven we een coraakvector als (x,p), dan vinden we dat

$$\check{L}(x,p) = \frac{1}{2m}\|p\|^2 + U(x).$$

Hier staat de som van de kinetische energie en de potentiële energie, de totale energie dus.

De coordinaten van de raakbundel resp. coraakbundel van $\mathbb{R}^m$ noteren we met (x,v) resp. (x,y), waar $v = (v^1, \dots, v^m)$ en $y = (y_1, \dots, y_m)$. Laat O een open deel zijn van $T\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ en $L : O \to \mathbb{R}$ een sterk convexe funktie. We hebben dus een open deel $\check{O}$ in $T^*\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ waarop gedefinieerd is de Legendre-getransformeerde $\check{L}$ en er geldt

$$(*) \qquad \check{L}(x,y,t) = \sum_i y_i v^i - L(x,v,t), \text{ waar } y = \frac{\partial L}{\partial v}(x,v,t).$$

Lemma 2.4. *Als $y = \partial L/\partial v(x,v,t)$, dan gelden de volgende betrekkingen:*

$$\frac{\partial \check{L}}{\partial y}(x,y,t) = v, \quad \frac{\partial \check{L}}{\partial x}(x,y,t) = -\frac{\partial L}{\partial x}(x,v,t), \quad \frac{\partial \check{L}}{\partial t}(x,y,t) = -\frac{\partial L}{\partial t}(x,y,t).$$

Bewijs. Dit is een eenvoudige berekening. Differentieren van $(*)$ naar v^j geeft:

$$\sum_i \frac{\partial \check{L}}{\partial y_i}(x,y,t)\frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}(x,v,t) = \frac{\partial L}{\partial v^j}(x,v,t) + \sum_i \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}(x,v,t)v^i - \frac{\partial L}{\partial v^j}(x,v,t).$$

Omdat de Hessiaan $(\frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^k})_{j,k}$ is nietsingulier is volgt de eerste relatie. De andere twee gaan analoog. $\square$

Laat nu $q : [0,r] \to U$ een kromme zijn waarvoor zijn afgeleide $t \mapsto (q(t), \dot{q}(t))$ beeld in O heeft. We definiëren $(q,p) : [0,r] \to \check{O}$ als de samenstelling van $(q,\dot{q})$ met het diffeomorfisme van O op $\check{O}$ gegeven door de differentiaal van L, dus

$$p(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(q(t), \dot{q}(t), t).$$

De notatie is zo gekozen omdat die de gebruikelijke is in de mechanika: q is dan een plaatsvector, $\dot{q}$ een snelheidsvector en p is een impulsvector of een generalisatie daarvan.

GEVOLG 2.5. *De kromme $q : [0, r] \to U$ voldoet aan de vergelijking van Euler-Lagrange van L:*

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial v^i}(q(t), \dot q(t), t)\Big) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(q(t), \dot q(t), t)$$

precies dan als voor $i = 1, \ldots, m$ geldt

$$\dot q^i(t) = \frac{\partial \check L}{\partial y_i}(q(t), p(t), t), \quad \dot p_i(t) = -\frac{\partial \check L}{\partial x^i}(q(t), p(t), t).$$

3. Structuur op een coraakbundel

Laat M een variëteit zijn. De coraakruimte T^*M van M draagt een natuurlijke differentiaal $\eta = \eta_M$ die we als volgt verklaren: een punt van T^*M is een coraakvector $\phi \in T_p^*M$. De projectie $\pi : T^*M \to M$ heeft als afgeleide dus een lineaire afbeelding $D\pi_\phi : T_\phi^*(M) \to T_pM$. We kunnen die samenstellen met $\phi : T_pM \to \mathbb{R}$ en zo vinden we een lineaire funktie $\eta_\phi : T_\phi^*(M) \to \mathbb{R}$. Equivalent hiermee: η_ϕ is het beeld van ϕ onder de duale $D\pi_\phi^* : T_p^*M \to T_\phi^*(T^*M)$. De afbeelding $\phi \mapsto \eta_\phi$ definieert een differentiaal op T^*M.

Laten we eens zien wat we krijgen voor een open deel U van $\mathbb{R}^m$. We vereenzelvigen T^*U met $U \times (\mathbb{R}^m)^*$. Preciezer, de coordinaten $x^1, \ldots, x^m$ en de coordinaatvectorvelden $\partial/\partial x^1|_U, \ldots, \partial/\partial x^m|_U)$ vormen samen een kaart voor T^*U. We vatten hier dus x^i op als een funktie op T^*U: eerst projekteren volgens $T^*U \to U$ en dan x^i toepassen. Verder zullen we schrijven y_i voor $\partial/\partial_i|_U$. Dus voor een vaste $\phi \in T^*U$ is $dx_\phi^1, \ldots, dx_\phi^m, dy_{\phi,1}, \ldots, dy_{\phi,m}$ een basis voor de coraakruimte van T^*U te ϕ. De afbeelding $D\pi_\phi^*$ is eenvoudig gegeven door $dx_p^i \mapsto dx_\phi^i$. Dus als $\phi = \sum_{i=1}^m \phi_i dx_p^i$, dan is $\eta_\phi = \sum_{i=1}^m \phi_i dx_\phi^i$. Bedenk nu dat ϕ_i niets anders is dan de waarde van y_i op ϕ. Zo vinden we dus

$$\eta = \sum_{i=1}^m y_i dx^i.$$

Merk op dat geldt:

$$d\eta = \sum_{i=1}^m dy_i \wedge dx^i$$

en

$$(d\eta)^m = m!\, dy_1 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dy_m \wedge dx^m.$$

In het bijzonder is $(d\eta)^m$ nergens nul. Maar zo'n uitspraak blijft behouden onder diffeomorfismen: als hij geldt op een open deel van $\mathbb{R}^m$, dan geldt hij altijd. Dus:

GEVOLG 3.1. *De $2m$-vorm $(d\eta)^m$ is nergens nul.*

Dit gevolg is aanleiding voor de volgende definitie:

DEFINITIE 3.2. Zij N een variëteit van even dimensie $n = 2m$. Een *symplectische structuur* op N is een gesloten 2-vorm ω op N met ω^m nergens nul. Het paar (N, ω) heet dan een *symplectische variëteit*. De $2m$-vorm ω^m op N heet de *Liouvillemaat* van (N, ω).

Dus de coraakbundel van een variëteit is op natuurlijke wijze een symplectische variëteit, waarvan de symplectische vorm zelfs exact is. Symplectische variëteiten bieden de natuurlijke context voor het zogenaamde Hamiltonformalisme uit de klassieke mechanika, terwijl coraakbundels die vervullen voor het Lagrangeformalisme. Bij de eerste horen de Hamiltonvergelijkingen, bij de laatste het principe van de kleinste actie (met de daar van afgeleide Euler-Lagrangevergelijkingen). We zullen het verband beknopt weergeven.

4. Hamiltonsystemen

Zij (N, ω) een symplectische variëteit van dimensie n. De 2-vorm ω bepaalt op iedere raakruimte T_pN een nietontaarde antisymmetrische bilineaire afbeelding $\omega_p : T_pN \times T_pN \to \mathbb{R}$. Dus $n = 2m$ is even en $\tilde{\omega}_p : T_pN \to T_p^*N$ is een isomorfisme. Globaler: $\tilde{\omega}$ bepaalt een isomorfisme van de raakbundel van M op de coraakbundel van M. In het bijzonder kunnen vectorvelden op N als differentialen worden opgevat en vice versa. Stel b.v. gegeven een funktie $H : N \to \mathbb{R}$. Dan is dH een differentiaal en dus krijgen we via de inverse van $\tilde{\omega}$ een vectorveld op N. We geven dat vectorveld aan met X_H. Dat is dus gekarakteriseerd door de eigenschap dat voor ieder locaal vectorveld Y geldt $\omega(X_H, Y) = dH(Y)(= Y(H))$. Anders gezegd, $\iota_{X_H}\omega = dH$. Zo'n vectorveld heet een *Hamiltonvectorveld* en de daarbij horende lokale stroming een *Hamiltonstroming*.

LEMMA 4.1. *De Hamiltonstroming voortgebracht door X_H behoudt zowel de funktie H als de symplectische vorm ω.*

BEWIJS. Het is voldoende na te gaan dat de Lie-afgeleide van H resp. ω naar X_H nul is. Er geldt $X_H(H) = dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$. Verder is ω gesloten, dus $(d\iota_{X_H} + \iota_{X_H}d)\omega = d\iota_{X_H}\omega = ddH = 0$. □

Met ω wordt natuurlijk ook iedere macht van ω door X_H behouden. In het bijzonder geldt dat voor het volume-element ω^m op N. Dit feit staat in de mechanika bekend als de *stelling van Liouville*. De eigenschap dat de Hamiltonstroming voortgebracht door X_H de funktie H behoudt betekent dat banen van X_H de niveaufiguren behouden. In de mechanika stelt H vaak de totale energie voor; die wordt dus behouden. Er kunnen meer funkties zijn op N die door X_H behouden worden (zo'n funktie heet een *eerste integraal*).

OPGAVE 66. Een *Poissonstructuur* op een variëteit M voegt aan ieder paar funkties f, g op een open deel U van M een funktie $\{f, g\}$ op U toe die voldoet aan:

locaal karakter: zijn f, g gedefineerd op U en is $U' \subset U$, dan geldt $\{f, g\}_{|U'} = \{f_{|U'}, g_{|U'}\}$,
antisymmetrie: $\{f, g\} := \{g, f\}$,
Jacobi-identiteit: $\{f, g\}, h\}\} = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\}$,
Leibnitzregel: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$.

(i) Bewijs dat er dan een uniek 2-*vectorveld* η op M bestaat (d.w.z. een snede η van $\wedge^2\tau_M$) zodat $\{f, g\} = \eta(df, dg)$.
(ii) Laat zien dat een symplectische vorm op M een Poissonstructuur op M bepaalt middels het voorschrift $\{f, g\} := X_f(g)$.

Stel nu dat $(U, (x^1, \ldots, x^m, y_1, \ldots, y_m))$ een kaart is voor N met waarvoor $\omega|_U = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy_i$. (Zulke kaarten hebben we in ieder geval als N een coraakbundel is, maar het Lemma van Darboux zegt dat iedere symplectische variëteit van dimensie $2m$ met zulke kaarten overdekt kan worden.) Laat $H : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, maar beschouw H als een funktie op U die met de tijd varieert. Dan is in termen van deze coordinaten

$$dH = \sum_{i=1}^{m} (\frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial H}{\partial y_i} dy_i) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

en dus

$$X_H = \sum_{i=1}^{m} (\frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y_i}).$$

Een kromme in U geven we weer als $t \mapsto \gamma(t) = (q^1(t), \ldots, q^n(t), p^1(t), \ldots, p^n(t))$. Dan is dit een integraalkromme van X_H precies dan als $\dot\gamma(t) = X_{H,\gamma(t)}$ voor alle t. Dat komt neer op

$$\dot q^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p^i}(q(t), p(t), t), \quad \dot p^i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t), p(t), t).$$

Dat is precies het stel vergelijkingen dat we in 2.5 in verband brachten met de Euler-Lagrange vergelijkingen. We kunnen nu samenvatten:

STELLING 4.2. *Zij M een variëteit, O open deel van TM en $L : O \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een sterk-convexe funktie. Is $\gamma : [0, r] \to M$ een kromme zodat het beeld van $\dot\gamma$ in O ligt, dan voldoet γ aan de Euler-Lagrangevergelijking voor L precies dan als de kromme $\check\gamma : [0, r] \to \check O$ verkregen door $\dot\gamma$ samen te stellen met het door L bepaalde diffeomorfisme van O op $\check O$ een integraalkromme is van het Hamiltonvectorveld $X_{\check L}$ op $\check O$.*

5. Het spanningstensorveld

Een lichaam onderscheidt zich van een stofwolk doordat er inwendige krachten zijn die het bijéén houden. Die krachten zijn soms zichtbaar te maken (Feynman noemt het voorbeeld van een geleipudding, die, als we eenmaal het mes er hebben in gezet, aan weerszijde van de snede een nieuwe vorm gaat aannemen). We zullen zien dat ze hun wiskundige expressie krijgen als een tensorveld. Deze discussie is ook van toepassing op (mogelijk stroperige) vloeistoffen.

Laten we de ons omringende ruimte met zijn standaard inprodukt en oriëntatie aangeven met $\mathbb{E}^3$ (de $\mathbb{E}$ van Euclidisch). We schrijven kortweg T_p voor de raakruimte van $\mathbb{E}^3$ te p.

Zij nu $K \subset \mathbb{E}^3$ een lichaam; we onderstellen K stabiel in de zin dat er geen delen van K zich t.o.v. de rest van K aan het bewegen zijn. Gegeven een vlakje Π door een punt p van K en een keuze van een normale eenheidsvector n te p op Π, dan oefent het materiaal dat zich aan de kant van Π tegenover n bevindt op Π een kracht uit die in eerste benadering evenredig is met het oppervlak van Π. De component langs n is een soort interne druk en de component langs Π is de *(af)schuifspanning*. Omdat de K stabiel is verandert de kracht van teken als we n door $-n$ vervangen. Zijn dus $(a_1, a_2) \in T_p \times T_p$ lineair onafhankelijke raakvectoren, dan is de kracht die werkt op het parallelogram opgespannen te p door εa_1 en εa_2 (voor de normaalrichting n die langs $a_1 \times a_2$ valt) gelijk aan $\varepsilon^2 S_p(a_1 \times a_2) + o(\varepsilon^2)$ voor een raakvector $S_p(a_1 \times a_2) \in T_p$. Voor een isotrope vloeistof is de schuifspanning nul en is er een positieve constante c waarvoor $S_p(a) = -ca$.

We laten nu zien dat $S_p : T_p \to T_p$ lineair is, aannemende dat S continu in al zijn argumenten is. Daartoe beschouwen we voor een georiënteerde basis (a_1, a_2, a_3) van T_p het driezijdig prisma $P(\varepsilon)$ met grondvlak de hoekpunten $p, p + \varepsilon a_1, p + \varepsilon a_2$

en als bovenvlak het grondvlak verschoven over εa_3. De massa van dit prisma is van orde ε^3, dus volgens Newton's formule 'kracht is massa maal versnelling' werken alle externe krachten hierop met een grootte van dezelfde orde ε^3. Omdat we gaan rekenen modulo $o(\varepsilon^2)$ kunnen we die verwaarlozen. Dus de som der spankrachten op de zijvlakken van P is van orde $o(\varepsilon^2)$. Nu hebben de krachten werkend op grond en bovenvlak som

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 S_{p+\varepsilon a_3}(a_1 \times a_2) - \frac{1}{2}\varepsilon^2 S_p(a_1 \times a_2) + o(\varepsilon^2) = o(\varepsilon^2),$$

vanwege de continuiteit van S. De bijdragen van de drie zijvlakken zijn

$$\begin{aligned}\varepsilon^2(S_p(a_1 \times a_3) - S_p(a_2 \times a_3) + S_{p+\varepsilon a_1}((a_2 - a_1) \times a_3) + o(\varepsilon^2) = \\ = \varepsilon^2(S_p(a_1 \times a_3) - S_p(a_2 \times a_3) + S_p((a_2 - a_1) \times a_3) + o(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Dit geeft de gevraagde lineariteit, want we zien nu dat $S_p((a_2 - a_1) \times a_3) = S_p(a_2 \times a_3) - S_p(a_1 \times a_3)$. Deze afbeelding voldoet ook aan een symmetrie-eigenschap: we beweren dat geldt

$$\langle S_p(a_1), a_2\rangle = \langle a_1, S_p(a_2)\rangle$$

Dit zien we in als volgt: zonder bezwaar mogen we onderstellen dat a_1 en a_2 onderling loodrechte eenheidsaectoren zijn. Beschouw de kubus $K(\varepsilon)$ met middelpunt p en ribben aan lengte ε parallel aan $a_1, a_2, a_3 := a_1 \times a_2$. De kubus draait niet om p, dus de som der momenten van de op de kubus werkende krachten is nul. We bepalen de component van het totale draaimoment langs a_3 (waarvan dus bekend is dat die gelijk nul is) in termen van de spankrachten tot op orde $o(\varepsilon^3)$. De uitwendige krachten hoeven we hierbij niet te beschouwen: die hebben orde $O(\varepsilon^3)$, dus de bijbehorende draaimomenten orde $O(\varepsilon^4)$; de spankrachten aangrijpend op boven resp. en ondervlak hebben weliswaar een moment van orde $O(\varepsilon^2)$, maar hun component langs a_3 is $o(\varepsilon^3)$. Blijft over de bijdrage van de vier zijvlakken. De kracht aangrijpend op het zijvlak door $p - \frac{1}{2}\varepsilon a_1$ is gelijk aan $-\varepsilon^2 S_p(a_1) + o(\varepsilon^3)$. Vanuit p heeft deze kracht dus een draaimoment gelijk aan $\frac{1}{2}\varepsilon$ maal deze kracht: $\frac{1}{2}\varepsilon^3 a_1 \times S_p(a_1) + o(\varepsilon^4)$. Dezelfde bijdrage aan het draaimoment krijgen we van de overliggende zijde. Voor de vier zijvlakken samen wordt dat $\varepsilon^3(a_1 \times S_p(a_1) + a_2 \times S_p(a_2)) + o(\varepsilon^3)$. Het inprodukt hiervan met a_3 is $o(\varepsilon^3)$, dus

$$\langle a_3, a_1 \times S_p(a_1)\rangle + \langle a_3, a_2 \times S_p(a_2)\rangle = 0,$$

wat neerkomt op $\langle S_p(a_1), a_2\rangle = \langle S_p(a_2), a_1\rangle$.

We kunnen S_p natuurlijk ook opvatten als de lineaire afbeelding $\wedge^2 T_p \to T_p$: die aan $a_1 \wedge a_2$ het element $S_p(a_1 \times a_2)$ toevoegt. Deze beschrijving is fysisch direkter, want $S_p(a_1 \times a_2)$ beschrijft de kracht op het vlakje door opgespannen door εa_1 en εa_2. Omdat hij het inprodukt van $\mathbb{E}^3$ niet van node heeft, is hij ook wiskundig aantrekkelijker. (Wel gebruiken we hier de oriëntatie.) Nu hebben we vanwege Lemma 2.2 en Opmerking 3.3 van de Bijlage een vereenzelviging

$$\mathrm{Hom}(\wedge^2 T_p, T_p) \cong (\wedge^2 T_p)^* \otimes T_p \cong \wedge^2(T_p^*) \otimes T_p.$$

Daarmee kan S opgevat worden als een 2-vorm op K 'met waarden in de raakbundel van $\mathbb{E}^3$', te schrijven dus als

$$\sigma := \sum_{i,j} (-1)^{j-1} S^{ij} dx^1 \wedge \cdots \widehat{dx^j} \cdots dx^3 \otimes \frac{\partial}{\partial x^i},$$

waar $S^{ij} = \langle e_i, S(e_j)\rangle$ (de symmetrie-eigenschap van S komt dus neer op $S^{ij} = S^{ji}$). In de literatuur beschouwt men S_p meestal als een element van $T_p \otimes T_p$. Hiervoor hebben we nodig het georiënteerde volume-element $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ beschouwd als een 3-vorm op $\mathbb{E}^3$. De contractie $T_p \to \wedge^2(T_p^*)$, die aan aan $a \in T_p$ het inwendig produkt $\iota_a dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ toevoegt is een isomorfisme van vectorruimten en via dit isomorfisme is

$$S_p = \sum_{ij} S^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \in T_p \otimes T_p.$$

De symmetrie betekent dan eenvoudig dat S_p niet verandert onder de verwisselingsinvolutie van $T_p \otimes T_p$. Er is altijd een orthonormale basis (a_1, a_2, a_3) van T_p te vinden waaropt S_p de diagonaalvorm aanneemt: $S_p = \sum_i \lambda_i a_i \otimes a_i$. Onderstellen we dat de λ_i's hetzelfde teken hebben, dan definieert S_p dus een ellipsoïde in T_p. Deze beschrijft hoe de spanning de eenheidsbol van T_p wil vervormen. We noemen S, opgevat als een snede van $\tau_{\mathbb{E}^3} \otimes \tau_{\mathbb{E}^3}$, het *spanningstensorveld* van K.

We keren terug naar σ. Dit is een voorbeeld van een vectorwaardige vorm. d.w.z. een snede van een bundel $\wedge^k(\tau_M^*) \otimes V$, waar M een variëteit is en V een reële vectorruimte. Zo'n vorm ω heeft een uitwendige afgeleide: schrijven we hem als $\sum_i \omega_i \otimes v_i$, waar $v_i \in V$, dan definiëren we $d\omega = \sum_i (d\omega_i) \otimes v_i$. Dit is onafhankelijk van de gekozen voorstelling van ω. In ons geval is dus

$$d\sigma = \sum_{i,j} \frac{\partial S^{ij}(t)}{\partial x^j} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Is $\Omega \subset K$ als is in de stelling van Stokes, dan is volgens diezelfde stelling

$$\int_{\partial\Omega} \sigma = \int_{\Omega} d\sigma$$

(dit is dus een identiteit van vectoren). Het linkerlid is de totale spankracht die Ω uitoefent. Daarmee is $(d\sigma)_p$ te duiden als de spankracht die uitgeoefend wordt door het infinitesimaal volume-element $(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)_p$.

We onderstellen nu dat K in beweging is, gegeven door een tijdsafhankelijk snelheidsvectorveld $v_p(t)$, en onderworpen aan een tijdsafhankelijk krachtenveld gegeven als een dichtheid: $\phi_p(t) = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \otimes k_p(t)$. De spanningtensor is ook een tijdsafhankelijke $\mathbb{E}^3$-waardige 2-vorm $\sigma(t)$. De totale kracht die het volume-element $(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)_p$ ondervindt ten tijde t is dus $\phi_p(t) + (d\sigma(t))_p$. Nu is de totale kracht de afgeleide van het impulsmoment naar de tijd. Dus als we de massadichtheid ten tijde t geven als een 3-vorm $\mu_p(t) = \rho(t,p) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, dan is

$$(*) \qquad (\mu \otimes v)^{\cdot}(t) = \phi(t) + d\sigma(t).$$

Beschouw $v(t)$ als een gewoon vectorveld V op een open deel U van $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$: $V_{(t,p)} = (\partial/\partial t, v_p(t))$. Verder beschouwen we μ, ϕ en σ als (vectorwaardige) vormen op U. De formule (*) laat zich dan schrijven als

$$(**) \qquad \mathcal{L}_V(dt \wedge \mu \otimes v) = dt \wedge \phi + d(-dt \wedge \sigma).$$

(bedenk dat $\mathcal{L}_V$ op een 4-vorm werkt als $d\iota_V$). De massa van een volume-element blijft behouden als we die volgen onder de door V voortgebrachte stroming. Dat betekent dat de Lie-afgeleide naar V van de 4-vorm $dt \wedge \mu$ gelijk nul is:

$$\mathcal{L}_V(dt \wedge \mu) = 0$$

(in mogelijk wat vertrouwdere termen: $\dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$). Combineren we dit met (**), dan vinden we $\mathcal{L}_V(dt \wedge \mu \otimes V) = dt \wedge \phi - d(dt \wedge \sigma)$ ofwel

$$d\Big(\iota_V(dt \wedge \mu) \otimes V + dt \wedge \sigma\Big) = dt \wedge \phi.$$

Vereenzelvigen een raakvectorwaardige 3-vorm op U met een snede van $\tau_U \otimes \tau_U$ (zoals we dat deden op $\mathbb{E}^3$), dan correspondeert het gedeelte tussen haakjes in het linkerlid met het zogenaamde *spannings-momenttensorveld*

$$T := \rho V \otimes V - S.$$

Dit is nog steeds symmetrisch. Zijn analogon in de speciale en algemene relativiteitstheorie speelt daar een voorname rol. Bovenstaande formule zegt dat de divergentie van T m.b.t. de eerste component gelijk is aan de krachtdichtheid k.

6. De Galileïwereld

Volgens Newton is er een uitverkoren klasse van waarnemers (de *inertiële waarnemers*): dat zijn waarnemers die t.o.v. elkaar in éénparige beweging zijn en voor wie de natuurwetten gelijk zouden moeten zijn. Zij meten van rondvliegende massa's dezelfde versnellingen (die zij toeschrijven aan krachten), maar in het algemeen verschillende snelheden. Geen van hen geniet een bevoorrechte positie: voor twee zulke waarnemers kan worden vastgesteld of ze zich ten opzichte van elkaar in rusttoestand bevinden, maar het heeft geen zin te beweren dat een dezer waarnemers zich in rusttoestand bevindt. Dit is het relativiteitsbeginsel van Galileï.

Het wiskundige model dat aan dit ruimte-tijdscontinuüm ten grondslag is de *Galileïruimte* der gebeurtenissen: Dit is een 4-dimensionale affiene ruimte $\mathbb{G}$, waarvan de schuifruimte G voorzien is van een lineaire funktie $t : G \to \mathbb{R}$ (de tijd) die niet constant nul is. Verder veronderstellen we dat de driedimensionale deelruimte $G_0 := t^{-1}(0)$ voorzien is van een inprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ en een oriëntatie. We definiëren het *snelheidshypervlak* $G_1 \subset G$ als de verzameling $v \in G$ met $t(v) = 1$ (dit is een affiene deelruimte van G met G_0 als schuifruimte) en elementen van G_0 heten *snelheidsvectoren*. Een inertiële waarnemer wordt nu voorgesteld door een affiene rechte l in $\mathbb{G}$ die niet parallel is aan G_0; zo'n rechte noemen we een *wereldrechte*). Bij zo'n rechte hoort precies één snelheidsvector $v_l \in G_1$ die parallel is aan l.

Gegeven $p_0 \in \mathbb{G}$ en een snelheidsvector v_0, dan hebben we een parametrisatie $\mathbb{R} \times G_0 \cong \mathbb{G}$, $(\tau, x) \mapsto p_0 + \tau v_0 + x$). (Kiezen we verder nog een georiënteerde orthonormale basis (e_1, e_2, e_3) van G_0, dan heet de zo verkregen parametrisatie $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{G}$ een *inertieel systeem*.) Twee gebeurtenissen $p, q \in \mathbb{G}$ heten gelijktijdig als $t(p - q) = 0$. Dat betekent dat $p - q \in G_0$ en dus alleen voor zulke gebeurtenissen hebben we een afstandsbegrip $d(p, q) := ||p - q||$.

Twee inertiële waarnemers zijn t.o.v. elkaar in rust precies dan als hun wereldrechten l, l' parallel zijn (equivalent: als ze dezelfde snelheidsvector hebben). Die hebben dan een vaste afstand $d(l, l')$ tot elkaar. De eis dat alle inertiële waarnemers dezelfde de natuurwetten zullen vinden komt er op neer dat die wetten een formulering moeten hebben die niet verandert onder elke transformatie $\mathbb{G} \to \mathbb{G}$ die

- — wereldrechten in wereldrechten overvoert,
- — ieder parallel paar wereldrechten op een parallel paar afbeeldt onder behoud van afstand en
- — de tijdsverschillen behoudt.

Het is niet moeilijk te bewijzen dat dit precies de transformaties zijn de gegeven struktuur op $\mathbb{G}$ behouden: in termen van een inertiële parametrisatie zijn het de transformaties van de vorm $(t, x) \mapsto (t + t_0, A(x)) + v_0$ met $v_0 \in \mathbb{R}^3$ en $A \in \mathrm{SO}(3)$. Dit is de zogenaamde *Galileïgroep*.

Een deelverzameling $w \subset \mathbb{G}$ heet een *wereldkromme* als die door de tijd geparametriseerd kan worden, d.w.z. als er een afbeelding γ van een interval I op w bestaat met $t(\gamma(\tau) - \gamma(\tau_0)) = \tau - \tau_0$, of equivalent, als $\dot{\gamma}$ steeds een snelheidsvector is. Dit geeft dus een afbeelding $v_w : w \to G_1$ en daarmee wordt de versnelling een afbeelding $a_w : w \to G_0$. In tegenstelling tot de (momentane) snelheid is de (momentane) versnelling te $p \in W$ dus een ruimtelijke vector. Newton kent ieder deeltje een constante karakteristieke grootheid toe (massa) (en additief is t.a.v. vereniging) zodat massa maal versnelling altijd toe te schrijven is aan invloeden van buitenaf: de som der krachten die op dat deeltje aangrijpen (van die krachten wordt in wezen gepostuleerd dat ze onafhankelijk van dat deeltje bestaan).

Omdat er geen absoluut begrip van snelheid is, is er evenmin een absoluut begrip van kinetische energie. We kunnen die alleen meten t.o.v. een inertiële waarnemer, of preciezer, t.o.v. een gegeven snelheidsvector v_0: een deeltje van massa m met snelheid v heeft kinetische energie $\frac{1}{2}m||v - v_0||^2$.

Een *snelheidsvectorveld* op een open deel U van $\mathbb{G}$ is een afbeelding $V : U \to G_1$. Is dit het snelheidsvectorveld van materie met een massadichtheid $\rho : U \to \mathbb{R}$ en spanningstensor $S : U \to G_0 \otimes G_0$, dan is het bijbehorende spanningsmomenttensorveld T gelijk aan de eerder gegeven formule $\rho V \otimes V - S$.

7. De Minkowskiwereld

Maxwell's vergelijkingen passen niet in het zojuist beschreven model, want hierin komt op een wezenlijke manier een snelheid voor die geen snelheidsverschil is, te weten de lichtsnelheid. Anders gezegd, deze wetten zijn niet invariant onder de Galileïgroep. De fysici van de late 19e eeuw onderstelden daarom toch maar het bestaan van een absoluut begrip van rusttoestand, dat zich dan aan ons voor zou moeten doen als alomtegenwoordige, in rust verkerende ether, totdat het befaamde experiment van Michelson-Morley daar mee afrekende. Dit leidde tot Einstein's correctie op het Galileïmodel (zijn speciale relativiteitstheorie van 1905) die wel in staat is Maxwell's vergelijkingen (althans in vacuüm) onderdak te bieden. De Minkowskiruimte der gebeurtenissen $\mathbb{M}$ is weer een 4-dimensionale affiene ruimte, zijn schuifruimte M is weer georiënteerd, maar nu voorzien van een pseudo-inprodukt g van signatuur $(1, 3)$. Er is geen afzonderlijke 'tijdsfunktie', alleen een bescheiden residu hiervan: De vectoren die voldoen aan $q(v) > 0$ bestaan uit twee disjunkte antipodale volle kegels (als we de bijbehorende kwadratische vorm diagonaliseren: $q = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$, dan gaat het dus om de verzameling waar $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 < (x^0)^2$ en de twee componenten corresponderen met $x^0 > 0$ en $x^0 < 0$). We kiezen één dezer componenten en noemen die de *toekomstkegel*. Een vector v in de toekomstkegel met $q(v) = 1$ heet een *snelheidsvector*, de verzameling van zulke vectoren is het *snelheidshypervlak*. De klasse van inertiële waarnemers wordt weer voorgesteld door de zogenaamde *tijdachtige rechten*: dat zijn rechten l parallel aan een snelheidsvector. Die snelheidsvector is natuurlijk uniek en we geven hem aan met v_l. (Zo wordt l meteen georiënteerd.) Voor een paar $p, p' \in l$ is $q(p' - p) > 0$ en de wortel hiervan is te interpreteren als het door de desbetreffende waarnemer ervaren tijdverschil ('proper time').

De groep van transformaties van $\mathbb{M}$ die alle gegeven structuur behouden heet de *Poincarégroep*; het is de groep van transformaties van de vorm $p \mapsto A(p - p_0) + v_0$ met $p_0 \in \mathbb{M}$, $v_0 \in M$ en $A \in \mathrm{GL}(M)$ een lineaire transformatie die q, de positieve kegel en de oriëntatie behoudt. Evenals voor de Galileïwereld zijn voor de Minkowskiwereld alleen maar toegelaten natuurwetten waarover alle inertiële waarnemers het eens zijn, anders gezegd, die invariant zijn onder de Poincarégroep. De Maxwellvergelijkingen vallen hieronder.

Een interval parallel aan een vector v met $q(v) = 0$ is te interpreteren als een foton (of lichtstraal). Ook zo'n interval is georiënteerd. Als een gebeurtenis $p \in \mathbb{M}$ uit een lichtflits bestaat, dan zijn de uitgezonden fotonen de beschrijvenden van de verplaatste toekomstkegel met top p.

De definitie van een *wereldkromme* is bijna dezelfde als voor de Gaileïruimte: dat is een deelverzameling $w \subset \mathbb{M}$ die door de tijd geparametriseerd kan worden, d.w.z. waarvoor een afbeelding γ van een interval I op w bestaat zodat $\dot\gamma$ steeds een snelheidsvector is. (Voor iedere $p_0 \in\ w$, is de verzameling van $p \in \mathbb{M}$ met $p - p_0$ loodrecht op $v_w(p_0)$ het 'ruimelijk front' voor w te p_0.) Omdat $q(\dot\gamma)$ constant 1 is geldt dat snelheid $v_w : w \to M_1$ en vernelling $a_w : w \to M$ voortdurend loodrecht op elkaar staan t.o.v. q.

Aan ieder deeltje is een positief getal m_o toegekend, zijn *rustmassa*. Beweegt dat deeltje langs een wereldkromme w met snelheidsvector v_0 te p_0, dan heeft $m_o v_0$ een intrinsieke betekenis: een waarnemer W met snelheidsvector v ontbindt die vector in een component langs v en interpreteert de grootte $m_o g(v_0, v)$ hiervan als de kinetische energie van het geobserveerde object en een vector g-loodrecht hierop die hij als *impulsmoment* duidt. Vandaar dat $m_o v_0$ de *energie-momentvector* genoemd wordt. (Voor gesloten systemen van (botsende) massadeeltjes blijft de som van hun energie-momentvectoren behouden.) Nu is $g(v_0, v) \geq 1$ en de waarde 1 wordt aangenomen alleen voor $v_1 = v_0$. Dus de waarnemer die met het deeltje meereist dient er een kinetische energie ter grootte m_o aan toe te kennen. (Dit is een incarnatie van de fameuze formule $E = mc^2$.) De wet van Newton behoudt zijn geldigheid: $m_o a_w(p) = F(p)$, waar F de kracht is die te p werkzaam is.

Fotonen hebben geen rustmassa maar wel energie, die zich als frequentie manifesteert.

Opgave 67. Voor een (inertiële) waarnemer is het firmament de collectie fotonen die haar oog op een gegeven moment ontmoeten. Bewijs dat dit een variëteit is diffeomorf met S^2. Hoe is het hoekbegrip hierop gedefinieerd?

Opgave 68 (Lorentzcontractie). Voor deze opgave mag zonder bezwaar de discussie beperkt worden tot het Minkowskivlak (met één ruimtelijke dimensie).

(a) Twee waarnemers w en w' hebben maar één manier om contact met elkaar te hebben en dat is met fotonen. Als w op een gegeven moment de afstand tussen beide wil vaststellen, dan zendt ze een foton naar w' met wie ze afgesproken heeft dat hij een spiegel meevoert en meet dan de tijd die het foton nodig heeft om terug te keren. Bewijs dat als beide waarnemers inertiëel zijn en in rust t.o.v. elkaar, dit precies twee keer de afstand is tussen hun wereldrechten.

(b) De eindpunten van een lang objekt L dat niet aan krachten onderhevig is kan worden voorgesteld door twee inertiële waarnemers die zich aan de eindpunten hebben opgesteld en zich t.o.v. elkaar in rust bevinden. De intrinsieke lengte d van L is de afstand tussen beide waarnemers zoals zij die zelf ervaren, dus de afstand tussen hun wereldrechten. Een derde inertiële waarnemer, waarvan de wereldrechte zich in hetzelfde vlak bevindt als de twee bij L meet zijn afstand tot de uiteinden van L op de hierboven beschreven manier. Het verschil interpreteert hij als de lengte van L. Laat zien dat die kleiner is dan d tenzij hij zich t.o.v. L in rust bevindt.

TERZIJDE 7.1. Als we er van afzien een tijdschaal in te voeren, dan kunnen we in het Galileïmodel t vergeten en alleen G_0 (voorzien van zijn inprodukt) geven; tijdsverschillen behoren dan tot de ééndimensionale vectorruimte G/G_0. Dit komt neer op het geven van een ontaarde kwadratische vorm $\check{q}$ op de duale G^* met signatuur $(3,0)$. We kunnen dit dan als limietgeval beschouwen van het Minkowskimodel waarbij de 'lichtsnelheid naar oneindig gaat': Laat $e_0,\dots,e_3$ een basis zijn van de Minkowskischuifruimte M, waarvoor q de standaardvorm $q=(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2$ heeft. Voor $c>0$, is de inverse van de vorm $(cx^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2$ op M^* gelijk aan $(c^{-1}e_0)^2-(e_1)^2-(e_2)^2-(e_3)^2$. Laten we $c\to\infty$, dan vinden we de ontaarde kwadratische vorm $-e_1^2-e_2^2-e_3^2$. Vermenigvuldigen we die met -1, dan is de inverse hiervan een positief definiete vorm op de deelruimte opgespannen door e_1,e_2,e_3. Dit is dus de Galileïwereld.

De Maxwellvergelijkingen. Die luiden in vacuüm (en in een passend systeem van eenheden) als volgt:

$$\text{rot}(E)+\frac{\partial}{\partial t}B=0,\quad \text{div}(B)=0, \tag{1}$$

$$\text{rot}(B)-\frac{\partial}{\partial t}E=I,\quad \text{div}(E)=\rho. \tag{2}$$

Hier zijn E, B en I tijdsafhankelijke vectorvelden op $\mathbb{R}^3$: het zijn respectievelijk het *elektrisch veld*, het *magnetisch veld* en de *elektrische stroom*, en ρ is een tijdsafhankelijke funktie op $\mathbb{R}^3$, de *ladingsdichtheid*. We gaan die herschrijven in termen van de uitwendige afgeleide en de steroperator, niet in $\mathbb{R}^3$, maar in de Minkowskiruimte $\mathbb{M}$. We hebben op de Minkowskischuifruimte M een georiënteerde basis (e_0,e_1,e_2,e_3) waarop g de diagonaalgedaante heeft met op de diagonaal $(1,-1,-1,-1)$. Is (x^0,x^1,x^2,x^3) de duale basis, dan schrijven we ook t voor x^0. Voor de bijbehorende vormen op $\mathbb{M}$ hebben we dan

$$\star dt = dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3,\quad \star\, dt\wedge dx^1=-dx^2\wedge dx^3,$$
$$\star dx^1 = dt\wedge dx^2\wedge dx^3,\quad \star\, dx^1\wedge dx^2 = dt\wedge dx^3$$

Nu combineren we elektrisch en magnetisch veld in een enkele 2-vorm:

$$F:=-\sum_{i=1}^{3}E_i dt\wedge dx^i+B_1dx^2\wedge dx^3+B_2dx^3\wedge dx^1+B_3dx^1\wedge dx^2$$

en ladingsdichtheid en stroom tot een 3-vorm:

$$j:=\rho dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3-I_1dt\wedge dx^2\wedge dx^3-I_2dt\wedge dx^3\wedge dx^1-I_3dt\wedge dx^1\wedge dx^2$$

De vergelijkingen (1) en (2) komen dan eenvoudig neer op

$$dF=0,$$
$$d\star F=j.$$

Dit is een formulering waarin geen basis voorkomt en die daarom invariant is onder de Poincarégroep. Dus acceptabel voor de gemeenschap van inertiële waarnemers.

Blijkbaar is voor de speciale relativiteitstheorie het elektromagnetisch veld op te vatten als een gesloten 2-vorm F. Maar hij manifesteert zich natuurlijk door de manier waarop hij geladen deeltjes versnelt: een deeltje met snelheidsvector v te $p \in \mathbb{M}$ en lading q_o ondervindt een kracht f_L (die bijdraagt aan een versnelling ter grootte $m_o^{-1} f_L$). Die zogenaamde Lorentzkracht is te karakteriseren door de identiteit $\langle f_L, v' \rangle = q_o \iota_v F_p(v')$ voor alle $v' \in M$. (De Lorenzkracht manifesteert zich dus eigenlijk als veld op de bundel van snelheidsvectoren.)

Is $\Omega \subset M$ een compacte 3-dimensionale deelvariëteit van M met rand $\partial\Omega$, dan is volgens Stokes

$$\int_{\partial\Omega} F = 0, \quad \int_{\partial\Omega} \star F = \int_{\Omega} j.$$

(Als Ω 'ruimte-achtig' is in de zin dat g op ieder raakruimte $T_p\Omega$ negatief definiet is, dan kan het rechterlid van de tweede vergelijking als de door Ω gedragen lading worden opgevat.)

OPMERKING 7.2. Volgens het Poincarélemma is $F = dA$ voor een 1-vorm A. Zo'n A is niet uniek, want met A voldoet ook $A + df$ voor iedere funktie f op A. Een keus van A heet een *potentiaal* voor F. In termen van een potentiaal reduceren de Maxwellvergelijkingen zich tot de enkele vergelijking: $d \star dA = j$. De *Yang-Millstheorie* beziet de potentiaal A als het primaire object en niet F.

OPGAVE 69. Laat zien dat de Maxwellvergelijkingen niet behouden blijven onder de Galileïtransformatie $(t, x^1, x^2, x^3) \mapsto (t, x^1 + t, x^2, x^3)$. Wat gebeurt er met de Maxwellvergelijkingen onder de transformatie $(t, x^1, x^2, x^3) \mapsto (-t, -x^1, -x^2, -x^3)$ die wel de Minkowskivorm en de oriëntatie behoudt, maar niet de toekomstkegel?

8. De Hilbert-aktie en de Einstein-tensor

In deze paragraaf is M een georiënteerde variëteit van dimensie m voorzien van een Riemannmetriek g. Maar de motivatie (en de beoogde toepassing) betreft de algemene relativiteitstheorie, en daar hebben we van doen met een pseudometriek ($m = 4$ en g van signatuur $(1, 3)$). Gelukkig blijkt dat met een paar eenvoudige teken-aanpassingen de discussie zijn geldigheid voor een pseudometriek behoudt.

We herinneren er aan dat de metriek g en de oriëntatie van M een volumevorm $\mu_M = \star 1_M$ op M bepalen. Dus als K de scalaire kromming is, dan is $K\mu_M$ de voor de hand liggende veralgemening van de Gauß-Bonnet-integrand. We gaan onderzoeken hoe deze infinitesimaal met g varieert, met andere woorden, we bepalen de afgeleide van de afbeelding die aan een Riemannmetriek de gegeneraliseerde Gauß-Bonnet-integrand toevoegt.

Daartoe geven we de formules voor de verschillende krommingstensoren in een punt $p \in M$ in termen van een kaart $\kappa : U \to \mathbb{R}^m$ te p met $\kappa(p) = 0$. Is $\partial_1, \dots, \partial_m$ de bijbehorende basis van vectorvelden, dan schrijven we $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$. Er geldt dus $g = \sum_{i,j} g_{ij} d\kappa^i d\kappa_j$. We reproduceren de definiërende eigenschap en de formule 3 voor de Christoffelsymbolen:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ji}^k \partial_k, \quad \Gamma_{ij}^k = \tfrac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) g^{lk},$$

waar (g^{ij}) de inverse matrix van (g_{ij}) is. De krommingstensor R is per definitie gegeven door $R(\partial_i,\partial_j)\partial_k = (\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j} - \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j})\partial_k$. Uitwerken geeft

$$R(\partial_i,\partial_j)\partial_k = \sum_l \Big(\partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik}\Big)\partial_l + \sum_{l,m}\Big(\Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{il} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{jl}\Big)\partial_m.$$

De Ricci-vorm krijgen we door in het rechterlid de coëfficiënt van ∂_i te nemen en te sommeren over i:

$$\mathrm{Ric}(\partial_j,\partial_k) = \sum_i \Big(\partial_i\Gamma^i_{jk} - \partial_j\Gamma^i_{ik}\Big) + \sum_{i,l}\Big(\Gamma^l_{jk}\Gamma^i_{il} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{jl}\Big).$$

De scalaire krommimg K is dus

$$K = \sum_{j,k}\mathrm{Ric}(\partial_j,\partial_k)g^{jk} = \sum_{i,j,k}\Big(\partial_i\Gamma^i_{jk} - \partial_j\Gamma^i_{ik}\Big)g^{jk} + \sum_{i,j,k,l}\Big(\Gamma^l_{jk}\Gamma^i_{il} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{jl}\Big)g^{jk}.$$

Volgens 4.6 kan κ zo gekozen worden dat (g_{ij}) te p in eerste benadering de vlakke euclidische metriek voorstelt: $g_{ij} = \delta_{ij} + O(\|\kappa\|^2)$; we onderstellen dat dit het geval is. Dan is dus ook $g^{ij} = \delta_{ij} + O(\|\kappa\|^2)$.

Laat nu dat g_t een krommetje van metrieken zijn met $g_0 = g$. We gebruiken de notatie δ voor de afgeleide naar t in $t=0$ van een van t afhankelijke grootheid. Uit $\sum_j g_{ij}(t)g^{jk}(t) = \delta_{ik}$ volgt dat

$$\delta g_{ij} + \delta g^{ij} = O(\|\kappa\|).$$

Verder zien we dat

$$\delta K = \sum_j \delta\,\mathrm{Ric}(\partial_j,\partial_j) + \sum_{j,k}\mathrm{Ric}(\partial_j,\partial_k)(\delta g)^{jk} + O(\|\kappa\|).$$

Uit het bovenstaande volgt dat

$$\begin{aligned}\sum_j \delta\,\mathrm{Ric}(\partial_j,\partial_j) &= \sum_{i,j}\tfrac{1}{2}\Big(\partial_i(\partial_j\delta g_{ji} + \partial_j\delta g_{ji} - \partial_i\delta g_{jj}) - \partial_j\partial_j\delta g_{ii}\Big) + O(\|\kappa\|)\\ &= \partial_i\partial_j\delta g_{ij} + O(\|\kappa\|)\end{aligned}$$

Nu is $\mu_M(t) = \sqrt{\det(g_{ij}(t))}d\kappa^1\wedge\cdots\wedge d\kappa^m$. Voor een $m\times m$-matrix A geldt dat $\det(I_m + tA) = I + t\,\mathrm{spoor}(A) +$ hogere orde termen. Dus

$$\delta(\mu_M) = \delta(\sqrt{\det(g_{ij})})\mu_M = \tfrac{1}{2}(\sum_i \delta g_{ii})\mu_M + O(\|\kappa\|) = -\tfrac{1}{2}(\sum_i \delta g^{ii})\mu_M + O(\|\kappa\|)$$

Deze formules geven samen dat

$$\begin{aligned}\delta(Kd\mu_M) &= \sum_i\Big(\sum_j \partial_i\partial_j\delta g_{ij} + \mathrm{Ric}(\partial_i,\partial_j)\delta g^{ij} - K.\tfrac{1}{2}\delta g^{ii}\Big)\mu_M + O(\|\kappa\|)\\ &= \sum_{i,j}\Big(-\partial_i\partial_j\delta g^{ij} + G_{ij}\delta g^{ij}\Big)\mu_M + O(\|\kappa\|),\end{aligned}$$

waar $G_{ij} = G(\partial_i,\partial_j)$ een coëfficiënt is van de Einsteintensor. We gaan nu het rechterlid van bovenstaande formule voor $\delta(Kd\mu_M)$ herschrijven in termen van g en wel zo dat de kaart κ daar niet meer in optreedt anders dan in het O-symbool.

De Einsteintensor G van g is een kwadratische vorm op τ_M en dus op te vatten als een symmetrische snede van $\tau^*_M\otimes\tau^*_M$. We gebruiken het door g bepaalde isomorfisme tussen raak en coraakbundel om de Einsteintensor G op te vatten als symmetrische snede T van $\tau_M \otimes \tau_M$. In termen van de kaart: $T = \sum_{i,j} T^{ij}\partial_i \otimes \partial_j$, waar $T^{ij} = \sum_{k,l} G_{kl} g^{ik} g^{il}$. In het bijzonder is $T^{ij} = G_{ij} + O(\|\kappa\|^2)$ en dus

$$T(\delta g) = \sum_{i,j} G_{ij}\delta g^{ij} + O(\|\kappa\|^2).$$

Vervolgens associeren we met δg een vectorveld $V(\delta g)$ op M. Beschouw $\nabla(\breve{g})$ als een snede van $\tau_M^* \otimes \tau_M \otimes \tau_M$ en contraheer de eerste twee tensorfactoren: dit geeft het vectorveld in kwestie. In termen van de kaart:

$$\nabla(\delta g) = \sum_{i,j,k} \partial_k(\delta g^{ij}) d\kappa^k \otimes \partial_i \otimes \partial_j + O(\|\kappa\|)$$

(want de Christoffelsymbolen zijn nul in p) en dus

$$V(\delta g) = \sum_{i,j} \partial_i(\delta g^{ij})\partial_j + O(\|\kappa\|).$$

De Lie-afgeleide van μ_M naar $V(\delta g)$ geeft

$$\mathcal{L}_{V(\delta g)}\mu_M = d\iota_{V(\delta g)}\mu_M = \sum_{i,j} \partial_i\partial_j(\delta g^{ij})\mu_M.$$

Combineren we dit alles, dan vinden dan dat

$$\delta(K d\mu_M) = T(\delta g)\mu_M - d\iota_{V(\delta g)}\mu_M + O(\|\kappa\|).$$

Maar omdat behoudens het O-symbool alle termen kaartonafhankelijk zijn, mag het O-symbool worden weggelaten. We hebben zo gevonden:

PROPOSITIE 8.1. *Er geldt:* $\delta(K\mu_M) = T(\delta g)\mu_M - d\iota_{V(\delta g)}\mu_M$.

Een toepassing van de stelling van Stokes geeft dan

GEVOLG 8.2 (Hilbert-Einstein). *Voor variaties van g met compacte drager is*

$$\delta\Big(\int_M K\mu_M\Big) = \int_M T(\delta g)\mu_M.$$

Met de eerste component van T nemen we het inproduct met μ_M om zo te vinden een τ_M-waardige $(m-1)$-vorm $\tau \in \mathcal{E}^{m-1}(M, \tau_M)$. Dus

$$\tau = \sum_{i,j} T^{ij}\iota_{\partial_i}\mu_M \otimes \partial_j = \sum_{i,j} (-1)^{i-1} T^{ij}\sqrt{\det(g_{ij})}\, d\kappa^1 \wedge \cdots \widehat{d\kappa^i} \cdots \wedge d\kappa^m \otimes \partial_j.$$

PROPOSITIE 8.3. *Deze τ_M-waardige $(m-1)$-vorm voldoet aan $\nabla\tau = 0$.*

BEWIJS. We controleren dit te p in termen van de eerder gekozen kaart κ. Voor deze kaart is dan

$$\begin{aligned}\nabla\tau &= \sum_{i,j} \partial_i\Big(T^{ij}\sqrt{\det(g_{ij})}\Big) d\kappa^1 \wedge \cdots \wedge d\kappa^m \otimes \partial_j \\ &= \sum_{i,j} \partial_i G_{ij} d\kappa^1 \wedge \cdots \wedge d\kappa^m \otimes \partial_j + O(\|\kappa\|).\end{aligned}$$

We moeten dus inzien dat voor iedere j, $\sum_i \partial_i G_{ij}$ nul is te p. Dit leiden we af uit de tweede Bianchi identiteit; volgens Opgave 43 geldt voor de matrixcoëfficiënten van R:

$$\partial_i R(\partial_j, p_k)^\sigma_\rho + \partial_j R(\partial_k, p_i)^\sigma_\rho + \partial_k R(\partial_i, p_j)^\sigma_\rho = 0$$

Neem nu $\rho = k$, $\sigma = j$ en sommeer over j en k. Dan geven de identiteiten

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k} \partial_i R(\partial_j, p_k)^j_k &= \sum_k \partial_i \operatorname{Ric}(\partial_k, \partial_k) = \sum_{k,l} \partial_i \Big(\operatorname{Ric}(\partial_k, \partial_l) g^{kl} \Big) + O(\|\kappa\|) \\
&= \partial_i K + O(\|\kappa\|), \\
\sum_{j,k} \partial_j R(\partial_k, p_i)^j_k &= -\sum_{j,k} \partial_j R(\partial_k, p_i)^k_j = -\sum_j \partial_j \operatorname{Ric}(\partial_i, \partial_j), \\
\sum_{j,k} \partial_k R(\partial_i, p_j)^j_k &= -\sum_{j,k} \partial_k R(\partial_j, p_i)^j_k = -\sum_k \partial_k \operatorname{Ric}(\partial_i, \partial_k)
\end{aligned}$$

na sommeren dat $\partial_i K - 2\sum_j \partial_j \operatorname{Ric}(\partial_i, \partial_j) = O(\|\kappa\|)$ voor iedere i. Dit komt neer op $\sum_j \partial_j G_{ij} = O(\|\kappa\|)$. □

9. De Rhamcohomologie II

Complexen. Voor een efficiënte discussie is het gewenst over het idioom en en een enkel resultaat uit de *homologische algebra* te beschikken.

DEFINITIE 9.1. Een *complex* (van vectorruimten) is een rij van vectorruimten geïndiceerd door $\mathbb{Z}$ en verbonden door homomorfismen

$$\cdots \to C^{k-1} \xrightarrow{d} C^k \xrightarrow{d} C^{k+1} \to \cdots$$

zo dat $dd = 0$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

We denken zo'n complex vaak als een directe som $C^\bullet = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} C^k$ voorzien van een lineaire afbeelding $d : C^\bullet \to C^\bullet$ die de graad met 1 verhoogt en die voldoet aan $dd = 0$.

We geven de kern van d in graad k aan met Z^k (dit is dus $\operatorname{Ker}(d : C^k \to C^{k+1})$); elementen hiervan worden *k-cykels* genoemd. Het beeld in graad k van d, $d(C^{k-1})$, noteren we met B^k en de elementen hiervan heten *k-randen*. Omdat een rand altijd een cykel is kunnen we invoeren de *cohomologie* van $C^\bullet$:

$$H^\bullet(C^\bullet) := \ker(d)/d(C^\bullet) = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} Z^k/B^k;$$

elementen hiervan heten *cohomologieklassen*. Een k-cykel $c \in Z^k$ bepaalt per definitie een cohomologieklasse $[c] \in H_k(C^\bullet)$, die we kortweg de *klasse* van c noemen. Twee cykels $c, c' \in Z^k$ bepalen dezelfde klasse precies dan als hun verschil een rand is. We zeggen dan ook wel dat c en c' *cohomoloog* zijn. Als alle cohomologie nul is, anders gezegd als in iedere graad het beeld van d gelijk is aan de kern van d, dan zeggen we dat het complex *exact* is.

Propositie 10.1 zegt dus dat $\mathcal{E}^\bullet(M)$ voorzien van de uitwendige afgeleide een complex is. We noemen dit het *De Rhamcomplex* van M. Zijn cohomologie is de De Rhamcohomologie $H^\bullet_{DR}(M)$.

DEFINITIE 9.2. Zijn $C^\bullet$ en $D^\bullet$ complexen, dan is een *ketenafbeelding* tussen deze twee een graadbehoudende lineaire afbeelding $\phi : C^\bullet \to D^\bullet$ die met de randoperatoren commuteert: $d\phi = \phi d$. Dan volgt direct dat ϕ cykels naar cykels en randen naar randen afbeeldt en dus een lineaire afbeelding $H^k(\phi) : H^k(C^\bullet) \to H^k(D^\bullet)$ bepaalt.

Blijkens 9.2 geeft een afbeelding $f : M \to N$ van variëteiten een ketenhomomorfisme $f^* : \mathcal{E}^\bullet(N) \to \mathcal{E}^\bullet(M)$. De bijbehorende afbeeldingen op cohomologie zijn de afbeeldingen $H^k(f^*) : H^k_{DR}(N) \to H^k_{DR}(M)$.

Een speciaal geval van een ketenhomomorfisme is wanneer ϕ een inclusie is. We spreken dan van een *deelcomplex*. Dat is dus een collectie deelruimten $\{C'^k \subset C^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ met de eigenschap dat $d(C'^k) \subset C'^{k+1}$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. Het is duidelijk dat, zoals de terminologie suggereert, $C'^\bullet$ een complex is, maar we hebben nu ook een *quotiëntcomplex* $\bar{C}^\bullet := C^\bullet/C'^\bullet$, want de randoperator d bepaalt dan een lineaire afbeelding $\bar{d} : \bar{C}^k \to \bar{C}^{k+1}$ bepaalt met $\bar{d}\bar{d} = 0$.

VOORBEELD 9.3. (De Rhamcohomologie met compacte drager). We geven aan met $\mathcal{E}^k_c(M) \subset \mathcal{E}^k(M)$ de deelruimte van k-vormen met compacte drager. Het is duidelijk dat de uitwendige afgeleide deze in $\mathcal{E}^{k+1}_c(M)$ afbeeldt. Dit is dus een deelcomplex van het De Rhamcomplex van M. Zijn cohomologie heet de *De Rham-cohomologiegroep met compacte drager* van M, aangegeven met $H^k_{DR,c}(M)$.

Als $U \subset M$ open is, dan kunnen we iedere vorm op U met compacte drager met nul voortzetten tot een vorm op M en zo opvatten als één op M. Zo wordt dus $\mathcal{E}^k_c(U)$ een deelcomplex van $\mathcal{E}^k_c(M)$.

VOORBEELD 9.4. (Mayer-Vietoriscomplex) Zij M een variëteit en U en V open delen van M met $U \cup V = M$. Een k-vorm op M is volledig bepaald door zijn beperkingen tot U en V. Op deze manier kunnen we $\mathcal{E}^\bullet(M)$ opvatten als een deelcomplex van het directe somcomplex $\mathcal{E}^\bullet(U) \oplus \mathcal{E}^\bullet(V)$ bestaande uit paren (α, β) met gelijke beperking tot $U \cap V$. Anders gezegd, $\mathcal{E}^\bullet(M)$ wordt zo de kern van de ketenafbeelding

$$\mathcal{E}^\bullet(U) \oplus \mathcal{E}^\bullet(V) \to \mathcal{E}^\bullet(U \cap V), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \beta|_{U\cap V} - \alpha|_{U\cap V}.$$

Als die surjectief is kunnen we dus het quotiëntcomplex vereenzelvigen met $\mathcal{E}^\bullet(U \cap V)$. Een voldoende voorwaarde hiervoor is het bestaan van een partitie $\{\phi, 1-\phi\}$ van 1 die ondergeschikt is aan de 2-elementige overdekking $\{U, V\}$ (dus ϕ heeft zijn drager in U en $1-\phi$ heeft zijn drager in V): als ω een k-vorm is op $U \cap V$, dan is $-\phi\omega$ te interpreteren als een vorm β op V (die nul is op $V - U \cap V$) en $(\phi - 1)\omega$ als een vorm α op U. Er geldt dat $\beta|_{U\cap V} - \alpha|_{U\cap V} = \omega$.

VOORBEELD 9.5. (Mayer-Vietoriscomplex met compacte drager) Het vorige voorbeeld heeft een analogon voor voor vormen met compacte drager, zij het dat de meeste afbeeldingen de andere kant op gaan. We beschouwen nu $\mathcal{E}^\bullet_c(U \cap V)$ als deelcomplex van de directe som $\mathcal{E}^\bullet_c(U) \oplus \mathcal{E}^\bullet_c(V)$ door op de eerste summand minus de inclusie te nemen en op de tweede de inclusie. Daarmee wordt dit deelcomplex de kern van de somafbeelding $\mathcal{E}^\bullet_c(U) \oplus \mathcal{E}^\bullet_c(V) \to \mathcal{E}^\bullet_c(M)$. Dus als deze afbeelding surjectief is, dan kan $\mathcal{E}^\bullet_c(M)$ opgevat worden als het quotiëntcomplex. Dat is altijd het geval: is ω een vorm op M met compacte drager K, dan bestaan volgens 12.4 bestaat een partitie van 1, $\{\phi_K, 1-\phi_K\}$ voor K ondergeschikt aan $\{U, V\}$ en daarmee is ω te schrijven als de som van $\phi_K\omega \in \mathcal{E}^\bullet_c(U)$ en $(1-\phi_K)\omega \in \mathcal{E}^\bullet_c(V)$.

In de situatie van zo-even definiëren we een lineaire afbeelding

$$\delta^k : H^k(\bar{C}^\bullet) \to H^{k+1}(C'^\bullet)$$

als volgt. Ieder element $w \in H^k(\bar{C}_\bullet)$ is voor te stellen door een $c \in C_k$ met $d(c) \in C'^{k-1}$. De ambiguïteit is gelegen in $d(C^{k-1}) + C'^k$. Omdat $dd(c) = 0$, volgt dat $d(c)$ een cykel is van $C'_\bullet$ (maar omdat c niet tot C'_k hoeft te behoren, kunnen we niet zeggen dat $d(c)$ rand is voor $C'_\bullet$). De klasse van $d(c)$ in $H^{k+1}(C'^\bullet)$ is dan onze $\delta^k(w)$. Dit is goed gedefinieerd, want in het geval dat als c zich in de ambiguïteitsruimte $d(C^{k-1}) + C'^k$ bevindt, dan is $d(c) \in dd(C^{k-1}) + d(C'^k) =$

$d(C'^k)$ en derhalve is zijn klasse in $H^{k+1}(C'_\bullet)$ nul. We hebben dan de volgende stelling, waarvan het bewijs in ieder leerboek over homologische algebra te vinden. (Het is niet moeilijk en kan evengoed als een oefening beschouwd worden.)

PROPOSITIE 9.6. (Lange exacte homologierij) Gegeven een deelcomplex $C'^\bullet \subset C^\bullet$ met quotiëntcomplex $\bar{C}^\bullet = C^\bullet / C'^\bullet$, dan hebben we een exacte rij

$$\dots \xrightarrow{\delta^{k-1}} H^k(C'^\bullet) \longrightarrow H^k(C^\bullet) \longrightarrow H^k(\bar{C}^\bullet) \xrightarrow{\delta^k} H^{k+1}(C'^\bullet) \longrightarrow \cdots .$$

Hier zijn de graadbehoudende afbeeldingen afkomstig van inclusie en projectie.

In het bijzonder zien we dat $H^k(C^\bullet)$ een deelruimte heeft die de opgevat kan worden als cokern van δ^{k-1} terwijl de bijbehorende quotiëntruimte vereenzelvigd mag worden met de kern van δ^k. Anders gezegd, we hebben exacte rijtjes

$$(\dagger) \qquad 0 \to \operatorname{Coker}(\delta^{k-1}) \to H^k(C^\bullet) \to \ker(\delta^k) \to 0$$

Dit heeft interessante gevolgen.

GEVOLG 9.7 (Mayer-Vietoris). *Laat M een variëteit zijn die de vereniging is van twee open delen U en V. Dan hebben een lange exacte cohomologierij:*

$$\to H^k_{DR,c}(U\cap V) \to H^k_{DR,c}(U) \oplus H^k_{DR,c}(V) \to H^k_{DR,c}(M) \xrightarrow{\delta^k} H^{k+1}_{DR,c}(U\cap V) \to$$

Als er op M een partitie van 1 ondergeschikt aan $\{U, V\}$ bestaat, dan hebben we ook een lange exacte cohomologierij:

$$\to H^{k-1}_{DR}(U\cap V) \xrightarrow{\delta^{k-1}} H^k_{DR}(M) \to H^k_{DR}(U) \oplus H^k_{DR}(V) \to H^k_{DR}(U\cap V) \xrightarrow{\delta^k}$$

GEVOLG 9.8. *De totale De Rhamcohomologie van S^m is van dimensie 2 met een voortbrenger in graad 0 (representeerd door de constante functie 1_{S^m}) en een voortbrenger in graad m .*

BEWIJS. Omdat $S^0 = \{-1, 1\}$ is dit duidelijk voor $m = 0$. We gaan verder met induktie: onderstel $m > 0$ en het gevolg voor $m-1$ bewezen. Kies $p \in S^m$. Dan is $U := S^m - \{p\}$, $V := S^m - \{-p\}$ een open overdekking van S^m waarop het vorig gevolg van toepassing is. Deze twee open delen zijn ieder diffeomorf met $\mathbb{R}^m$ en hebben dus alleen De Rham cohomologie in graad 0 (een voorbrenger is de constante functie 1). Verder is $U \cap V = S^m - \{p, -p\}$ diffeomorf met $\mathbb{R} \times S^{m-1}$ en heeft dus volgens 11.3 dezelfde De Rhamcohomologie als S^{m-1}. In de Mayer-Viëtorisrij van deze overdekking treedt op de afbeelding

$$\delta^k : H^k_{DR}(U) \oplus H^k_{DR}(V) \to H^k_{DR}(U\cap V) \cong H^k_{DR}(S^{m-1}).$$

Als $k \neq 0$, dan is $\ker(\delta^k) = 0$ en $\operatorname{Coker}(\delta^k) \cong H^k_{DR}(S^{m-1})$. Verder is $\delta^0(-1_U, 0) = \delta^0(0, 1_V) = 1_{U\cap V}$. Dus $\ker(\delta^0)$ is voortgebracht door $(1_U, 1_V)$ en $\operatorname{Coker}(\delta^0) = 0$ Substitueren we dit in de exacte rij $(\dagger)$, dan volgt de bewering. $\square$

Poincarélemma voor vormen met compacte drager. We gaan de De Rhamcohomologie met compacte drager van $\mathbb{R} \times M$ uitdrukken in die van M, net zoals we dat deden bij de gewone De Rhamcohomologiegroepen. Daartoe is eerst gewenst over een afbeelding tussen deze groepen te beschikken. Laat $\pi : \mathbb{R} \times M \to M$ de projectie zijn. Aan π^* hebben we weinig, want de drager van $\pi^*\omega$ is $\mathbb{R}$ maal de drager van ω en dus niet compact als $\omega \neq 0$. In plaats hiervan nemen we de lineaire afbeelding

$$\pi_! : \mathcal{E}^\bullet_c(\mathbb{R} \times M) \to \mathcal{E}^{\bullet-1}_c(M), \quad \alpha \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \alpha''\, dt,$$

waar α'' is als in het bewijs van 11.3. Deze afbeelding is goed gedefinieerd, want de drager van $\pi_!(\alpha)$ is bevat in het beeld van de drager van α en dus compact. Nu is $d\alpha = d_M\alpha' + dt\wedge(\dot\alpha' - d_M\alpha'')$, waar d_M de uitwendige afgeleide is in de M-richting. Dus $(d\alpha)'' = \dot\alpha' - d_M\alpha''$ en derhalve

$$\begin{aligned}\pi_!(d\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot\alpha' - d_M\alpha''\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -d_M\alpha''\,dt \text{ (want } \alpha' \text{ heeft compacte drager)}\\ &= -d\int_{-\infty}^{\infty}\alpha'' = -d\pi_!(\alpha)\end{aligned}$$

Dus $\pi_!$ voert gesloten resp. exacte vormen in dito vormen over. In het bijzonder hebben een lineaire afbeelding

$$H^\bullet(\pi_!) : H^\bullet_{DR,c}(\mathbb{R}\times M) \to H^{\bullet-1}_{DR,c}(M).$$

Zij nu $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie met compacte drager en met totale integraal $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)dt = 1$. De afbeelding

$$i_! : \omega \in \mathcal{E}^\bullet_c(M) \mapsto d\phi\wedge\pi^*(\omega) \in \mathcal{E}^{\bullet+1}_c(\mathbb{R}\times M)$$

is dan een rechtsinverse is van $\pi_!$ ($\pi_! i_!$ is de identieke afbeelding in $\mathcal{E}^\bullet_c(M)$). Verder is $di_!(\omega) = d(d\phi\wedge\pi^*(\omega)) = -d\phi\wedge d\pi^*(\omega) = -d\phi\wedge\pi^*(d\omega) = -i_!d(\omega)$. Dus zo wordt bepaald een lineaire afbeelding

$$H^\bullet(i_!) : H^\bullet_{DR,c}(M) \to H^{\bullet+1}_{DR,c}(\mathbb{R}\times M)$$

die rechtsinverse is voor $H^\bullet(\pi_!)$.

Propositie 9.9. *De afbeelding $H^\bullet(\pi_!) : H^\bullet_{DR,c}(\mathbb{R}\times M) \to H^{\bullet-1}_{DR,c}(M)$ is een isomorfisme welke $H^\bullet(i_!)$ als inverse heeft.*

Bewijs. Het is voldoende te bewijzen dat $H^\bullet(i_!)H^\bullet(\pi_!)$ de identieke afbeelding in $H^\bullet_{DR,c}(\mathbb{R}\times M)$ is. Voor $\alpha\in\mathcal{E}^\bullet_c(\mathbb{R}\times M)$ definiëren we een vorm $\hat\alpha\in\mathcal{E}^{\bullet-1}(\mathbb{R}\times M)$ die vrij is van dt door

$$\hat\alpha_p(t) := \int_{-\infty}^{t}\alpha''_p(t)\,dt.$$

Deze is goed gedefinieerd en $\alpha - d\hat\alpha$ is vrij van dt. We onderzoeken de drager van $\hat\alpha$. Omdat α compacte drager heeft, bestaan een compacte $K\subset M$ en een $R>0$ zodat de drager van α bevat is in $[-R,R]\times K$. Het is a priori duidelijk dat de drager van $\hat\alpha$ bevat is in $[-R,\infty)\times K$ en dat zijn beperking tot $[R,\infty)\times K$ niet van t afhangt. Dus op $[R,\infty)\times K$ is $\hat\alpha$ de teruggehaalde van een vorm op M. We zien meteen dat de laatste vorm in feite $\pi_!(\alpha)$ is. We onderstellen nu α gesloten en bewijzen dat $\beta := \alpha - i_!\pi_!(\alpha)$ het nulelement van $H^\bullet_{DR,c}(\mathbb{R}\times M)$ voorstelt. Merk allereerst op dat $\pi_!(\beta) = 0$. Dus het voorgaande toepassend op β geeft dat $\hat\beta$ compacte drager heeft. We weten verder dat $\beta - d\hat\beta$ vrij is van dt. Omdat $\beta - d\hat\beta$ ook gesloten is, betekent dit dat $\beta - d\hat\beta$ onafhankelijk is van t. Maar dan moet $\beta - d\hat\beta$ identiek nul zijn, immers $\beta - d\hat\beta$ heeft ook nog eens compacte drager. Dus β stelt het nulelement van $H^\bullet_{DR,c}(\mathbb{R}\times M)$ voor. ☐

Gevolg 9.10. *De De Rhamcohomologie met compacte drager van $\mathbb{R}^m$ is van dimensie 1 in graad m en 0 anders.*

Poincarédualiteit. Zij nu M een (nietlege) georiënteerde variëteit van dimensie m. De integraal van een m-vorm met compacte drager is gedefinieerd en volgens de stelling van Stokes is die nul als de vorm in kwestie exact is. We hebben zo dus gevonden een lineaire funktie $\int_M : H^m_{DR,c}(M) \to \mathbb{R}$. We zetten die voort tot geheel $H^\bullet_{DR,c}(M)$ door die eenvoudig in graden $\neq m$ nul te laten zijn. Het uitwendig product van een vorm met compacte drager met een willekeurige vorm heeft weer compacte drager. De zo gedefinieerde bilineaire afbeelding $\mathcal{E}^\bullet_c(M) \times \mathcal{E}^\bullet(M) \to \mathcal{E}^\bullet_c(M)$ bepaalt een bilineaire afbeelding $H^\bullet_{DR,c}(M) \times H^\bullet_{DR,}(M) \to H^\bullet_{DR,c}(M)$. Stellen we die samen met integratie, dan krijgen we een paring

$$H^\bullet_{DR,c}(M) \times H^\bullet_{DR}(M) \to \mathbb{R}.$$

Hiermee is geassocieerd de *Poincaré-afbeelding*

$$I_M : H^\bullet_{DR,c}(M) \to H^\bullet_{DR}(M)^*, I_M([\alpha]) : [\omega] \mapsto \int_M \alpha \wedge \omega.$$

We willen laten zien dat die onder een passende eindigheidshypothese een isomorfisme van eindigdimensionale vectorruimten is.

DEFINITIE 9.11. We zeggen dat een variëteit *van eindig type* is als deze diffeomorf is met een open deel Ω van een variëteit waarvoor $\bar{\Omega}$ compact is en overdekt wordt door de domeinen van kaarten (U, κ) waarvoor $U \cap \Omega$ gedefinieerd wordt door $\kappa_1 < 0$ (zoals bij de stelling van Stokes).

Het is duidelijk dat iedere compacte variëteit van eindig type is. Ook $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^m - \{0\}$ zijn dat (want diffeomorf met een open bol resp. $S^{m-1} \times (0,1)$). Algemener is het complement van een gesloten deelvariëteit van een compacte variëteit van eindig type (het bewijs is niet zo lastig, maar we laten het achterwege). De variëteit $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ is niet van eindig type: laat voor $n \in \mathbb{Z}$, $f_n : \mathbb{C} - \mathbb{Z} \to S^1$ gedefinieerd zijn door $f_n(z) = \arg(z - n)$. Dan is $\omega_n := f_n^* d\theta$ gesloten en zijn integraal over een cirkel met straal $< \frac{1}{2}$ en middelpunt $m \in \mathbb{Z}$ is nul als $m \neq n$ en 2π als $m = n$. Dus $([\omega_n] \in H^1_{DR}(\mathbb{C} - \mathbb{Z}))_{n \in \mathbb{Z}}$ is een onafhankelijk stelsel en derhalve is $H^1_{DR}(\mathbb{C} - \mathbb{Z})$ niet van eindige dimensie. Maar we zullen aanstonds aantonen dat de De Rhamcohomologie van een variëteit van eindig type eindigdimensionaal is.

LEMMA 9.12. *Een m-variëteit van eindig type heeft een eindige partitie van* 1 *waarvoor de drager van iedere term bevat is een open deel diffeomorf met $\mathbb{R}^m$.*

BEWIJS. We hoeven dit alleen aan te tonen voor een open deel Ω in een m-variëteit zoals in Definitie 9.11. De compacte $\bar{\Omega}$ kan overdekt worden door eindig veel kaartdomeinen $\{U_i\}_{i=1}^r$ waarvoor $U_i \cap \Omega$ diffeomorf is met de doorsnede van een open bol in $\mathbb{R}^m$ met de halfruimte $x^1 < 0$. Zo'n doorsnede is, indien nietleeg, zelf diffeomorf met $\mathbb{R}^m$. Kies een partitie van 1 voor $\bar{\Omega}$ ondergeschikt aan deze overdekking en beperk die vervolgens tot Ω. $\square$

STELLING 9.13 (Poincarédualiteit). *Als M een m-variëteit van eindig type is, dan is $I_M : H^\bullet_{DR,c}(M) \to H^\bullet_{DR}(M)^*$ een isomorfisme van eindigdimensionale vectorruimten.*

BEWIJS. Het basisgeval $M = \mathbb{R}^m$ volgt om een dimensiereden: we weten dat $H^\bullet_{DR}(\mathbb{R}^m)$ bestaat uit de constante funkties (Poincarélemma), dat $H^\bullet_{DR,c}(\mathbb{R}^m)$ een voorbrenger in graad m heeft en dat dat $\int_{\mathbb{R}^m}$ niet de nulfunktie is. Hieruit volgt natuurlijk ook het geval van een variëteit die diffeomorf is met $\mathbb{R}^m$. Laat nu $(\phi_i)_{i=1}^r$

een partitie van 1 zijn van M als in 9.12, dus de drager van ϕ_i is bevat in een open deel U_i dat diffeomorf is met $\mathbb{R}^m$. We hebben al gezien dat de stelling juist is voor $r = 1$. We gaan verder met induktie naar r en nemen daarom aan dat $r > 1$ en de stelling bewezen voor $r-1$. Laat $U = U_1 \cup \cdots \cup U_{r-1}$, $\phi := \sum_{i=1}^{r-1} \phi_i$ en $V := U_r$. Dan is $(\phi, 1-\phi)$ een partitie van 1 ondergeschikt aan $\{U, V\}$, dus we hebben een exacte Mayer-Vietorisrij voor (U, V). Omdat U en V eindigdimensionale De Rhamcohomologie hebben, geldt hetzelfde voor M. Verder volgt uit de induktie-aanname dat I_U, I_V en $I_{U\cap V}$ isomorfismen van eindigdimensionale vectorruimten zijn. We hebben nu een diagram

$$\begin{array}{ccccc}
\to H^k_{DR,c}(U) \oplus H^k_{DR,c}(V) & \longrightarrow & H^k_{DR,c}(M) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}_{DR,c}(U\cap V) \to \\
{\scriptstyle I_U \oplus I_V}\downarrow & & {\scriptstyle I_M}\downarrow & & {\scriptstyle I_{U\cap V}}\downarrow \\
\to H^{m-k}_{DR}(U)^* \oplus H^{m-k}_{DR}(V)^* & \longrightarrow & H^{m-k}_{DR}(M)^* & \xrightarrow{\delta^*} & H^{m-k-1}_{DR}(U\cap V)^* \to,
\end{array}$$

waarvan de onderste de duale van de Mayer-Vietorisrij is. We zien dat de rijen eindigdimensionaal en exact zijn. De ladder is commutatief op teken na en van de sporten zijn $I_U \oplus I_V$ en $I_{U\cap V}$ isomorfismen. Uit het onderstaande vijflemma volgt dat ook I_M een isomorfisme is. □

LEMMA 9.14 (Vijflemma). *Laat gegeven zijn het onderstaande commutatieve diagram van vectorruimten en lineaire afbeeldingen.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
V^0 & \xrightarrow{g^0} & V^1 & \xrightarrow{g^1} & V^2 & \xrightarrow{g^2} & V^3 & \xrightarrow{g^3} & V^4 \\
{\scriptstyle f^0}\downarrow & & {\scriptstyle f^1}\downarrow & & {\scriptstyle f^2}\downarrow & & {\scriptstyle f^3}\downarrow & & {\scriptstyle f^4}\downarrow \\
W^0 & \xrightarrow{h^0} & W^1 & \xrightarrow{h^1} & W^2 & \xrightarrow{h^2} & W^3 & \xrightarrow{h^3} & W^4.
\end{array}$$

Onderstel dat de rijen exact zijn en dat de alle verticale afbeeldingen m.u.v. de middelste isomorfismen zijn. Dan is ook de middelste een isomorfisme.

BEWIJS. Gebruik de isomorfismen om V^i met W^i te vereenzelvigen voor $i \neq 3$. Dan is $g^0 = h^0$ en $g^3 = h^3$. We kunnen nu zonder bezwaar V^1 vervangen door $V^1/g^0(V^0)$ (zodat g^1 en h^1 injectief worden) en V^3 door $\mathrm{Ker}(g^3)$ (zodat g^2 en h^2 surjectief worden). We hebben dan de situatie dat f^2 een deelruimte van V^2 isomorf op een deelruimte van W^2 afbeeldt en een isomorfisme tussen de bijbehorende quotiënten induceert. Zo'n afbeelding is inderdaad een isomorfisme. □

We vinden zo een omkering van de stelling van Stokes:

GEVOLG 9.15. *Voor een samenhangende georiënteerde variëteit M is $\int_M : H^m_{DR,c}(M) \to \mathbb{R}$ een isomorfisme. Anders gezegd, een m-vorm met compacte drager heeft integraal nul precies dan als hij de uitwendige afgeleide is van een $(m-1)$-vorm met compacte drager.*

BEWIJS. Zij α een m-vorm met compacte drager en integraal nul. Deze compacte drager is bevat in een samenhangend open deel Ω als in de Definitie 9.11. Volgens Stelling 9.13 is dan $I_\Omega : H^m_{DR,c}(\Omega) \to H^0_{DR}(\Omega)^*$ een isomorfisme. Omdat $H^0_{DR}(\Omega)$ uit de constante funkties bestaat, komt dit neer op: $\int_\Omega : H^m_{DR,c}(\Omega) \to \mathbb{R}$ is een isomorfisme. Dus α is de uitwendige afgeleide van een $(m-1)$-vorm met compacte drager (bevat in Ω). □

OPGAVE 70. Laat M een samenhangende georiënteerde m-variëteit zijn van eindig type die niet compact is. Bewijs dat $H^m_{DR}(M) = 0$.

De Künnethformule. Tenslotte bepalen we de De Rhamcohomologie van een product. Als $M \times N$ een product van variëteiten is met projecties π_M en π_N, dan vinden bij een paar vormen op de factoren $(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}^k(M) \times \mathcal{E}^l(N)$ een vorm op het product: $\pi^*\alpha \wedge \pi^*\beta$. Hebben beide compacte drager, dan geldt hetzelfde voor $\pi^*\alpha \wedge \pi^*\beta$. Verder is

$$\begin{aligned} d(\pi^*\alpha \wedge \pi^*\beta) &= d(\pi^*\alpha) \wedge \pi^*\beta + (-1)^k \pi^*\alpha \wedge d(\pi^*\beta) \\ &= \pi^* d\alpha \wedge \pi^*\beta + (-1)^k \pi^*\alpha \wedge \pi^* d\beta. \end{aligned}$$

Hieraan zien we dat als α en β gesloten zijn, $\pi^*\alpha \wedge \pi^*\beta$ het ook is. Is bovendien één van de twee exact, dan is $\pi^*\alpha \wedge \pi^*\beta$ het ook (als b.v. $\alpha = d\alpha'$, dan is $\pi^*\alpha \wedge \pi^*\beta = d(\pi^*\alpha' \wedge \pi^*\beta)$). Zo vinden we bilineaire afbeeldingen, *uitwendige producten* genaamd:

$$\begin{aligned} \times : H^\bullet_{DR}(M) \times H^\bullet_{DR}(N) &\to H^\bullet_{DR}(M \times N), \\ \times : H^\bullet_{DR,c}(M) \times H^\bullet_{DR,c}(N) &\to H^\bullet_{DR,c}(M \times N). \end{aligned}$$

OPGAVE 71. Laat $a, a' \in H^\bullet_{DR}(M)$ en $b, b' \in H^\bullet_{DR}(N)$ homogeen van graad k, k', l, l' zijn.

(a) Bewijs dat $aa' \times bb' = (-1)^{k'l}(a \times b)(a' \times b')$ als a' resp. b van graad k' resp. l zijn.
(b) Bewijs dat als $T : M \times N \to N \times M$ de verwisseling is, er geldt $H(T^*)(b \times a) = (-1)^{kl}(a \times b)$.
(c) Laat $D : M \to M \times M$, $p \mapsto (p, p)$, de diagonale inbedding zijn. Bewijs dat geldt $H(D^*)(a \times a') = aa'$.

STELLING 9.16. (Künnethformule voor De Rhamcohomologie) *De door het uitwendig product bepaalde lineaire afbeelding*

$$H^\bullet_{DR,c}(M) \otimes H^\bullet_{DR,c}(N) \to H^\bullet_{DR,c}(M \times N)$$

is een isomorfisme van vectorruimten. Als één van de twee factoren van eindig type is, dan geldt hetzelfde voor $H^\bullet_{DR}(M) \otimes H^\bullet_{DR}(N) \to H^\bullet_{DR}(M \times N)$.

BEWIJS. Als $M = \mathbb{R}$ volgt dit uit de Proposities 11.3 en 9.9. Met induktie volgt dit dan ook voor $M = \mathbb{R}^m$, of algemener voor het geval dat M diffeomorf is met $\mathbb{R}^m$. Als M de vereniging is van twee open delen U en V die ondergeschikt zijn aan een partitie van 1 voor M, en de stelling geldt voor de eerste factor gelijk aan $U, V, U \cap V$, dan volgt uit de Mayer-Vietorisrijen en het vijflemma dat de stelling geldt voor M. Met induktie volgt dan dat de stelling juist is indien M van eindig type is. Deze voorwaarde kunnen we laten vallen voor De Ram cohomologie met compacte drager, want ieder compact deel van $M \times N$ is bevat in $\Omega \times N$ voor een open deel $\Omega \subset M$ van eindig type. $\square$

10. De stelling van Hodge-De Rham

In deze paragraaf is (M, g) een georiënteerde Riemannse ruimte. Iedere raakruimte (en dus ook iedere coraakruimte) heeft dan een oriëentatie en een inprodukt en dus een ster-operator. Die geeft een afbeelding

$$\star : \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{m-k}(M).$$

De afbeelding $\star\star$ is op $\mathcal{E}^k(M)$ vermenigvuldiging met $(-1)^{k(m-k)} = (-1)^{k(m+1)}$. In het bijzonder is $\star$ een lineair isomorfisme. De m-vorm $\star 1$ noemen we de *volumevorm* van M welke noteren we met μ_M. Deze heeft de eigenschap dat voor iedere funktie $f : M \to [0, \infty)$ met compacte drager de integraal $\int_M f\mu_M$ positief is tenzij f identiek nul is. Dit leidt tot een inprodukt op de ruimte $\mathcal{E}_c^\bullet(M)$ der vormen op M met compacte drager: als $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_c^k(M)$, laat dan

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_M g(\alpha, \beta)\mu_M = \int_M \alpha \wedge \star\beta.$$

Merk op dat dit inprodukt al betekenis heeft als maar één van de argumenten compacte drager heeft. Neem nu $\alpha \in \mathcal{E}_c^{k-1}(M)$ en $\beta \in \mathcal{E}_c^k(M)$. Dan is

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \int_M (d\alpha) \wedge \star\beta = \int_M d(\alpha \wedge \star\beta) - (-1)^{k-1} \int_M \alpha \wedge d \star \beta.$$

De stelling van Stokes (toegepast op $\Omega = M$) impliceert dat de integraal van een exacte m-vorm met compacte drager nul is. Dus als we invoeren

$$d^\star\beta := (-1)^k \star^{-1} d \star \beta = -(-1)^{(k-1)m} \star d \star \beta,$$

dan we vinden zo dat

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d^\star\beta \rangle.$$

De funktionaalanalyticus zegt in zo'n geval dat $d^\star$ de *formeel geadjungeerde* is van d. Laten we vervolgens definiëren de *Laplace-Beltrami-operator*

$$\Delta := (d + d^\star)^2 = dd^\star + d^\star d.$$

Die behoudt dus de graad van een vorm.

OPGAVE 72. Voor funkties op $\mathbb{E}^m$ is $\Delta = d^* d = - * d * d$ en Voorbeeld (6.2-ii) in de bijlage is afgeleid dat $*d * d$ de gewone Laplace operator

$$L := \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i}$$

is. Laat zien dat algemener geldt

$$\Delta(\sum_{|I|=k} f_I dx^I) = \pm \sum_{|I|=k} L(f_I) dx^I.$$

PROPOSITIE-DEFINITIE 10.1. *Onderstel nu M compact. Dan heet $\alpha \in \mathcal{E}^k(M)$* harmonisch *als aan de volgende equivalente eigenschappen is voldaan:*

(i) $\Delta(\alpha) = 0$,
(ii) $d\alpha = 0$ *en* $d^\star\alpha = 0$,
(iii) α *is gesloten en staat loodrecht op de ruimte der exacte k-vormen.*

Noteren we de ruimte van harmonische k-vormen met $\mathcal{H}^k(M)$, dan beeldt de ster-operator $\mathcal{H}^k(M)$ isomorf af op $\mathcal{H}^{m-k}(M)$

BEWIJS. Van de gelijkheid

$$\langle \Delta(\alpha), \alpha \rangle = \langle dd^\star\alpha, \alpha \rangle + \langle d^\star d\alpha, \alpha \rangle = \langle d^\star\alpha, d^\star\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle$$

lezen we af dat (i) en (ii) equivalent zijn. Vanwege de identiteit $\langle \alpha, d\beta \rangle = \langle d^\star\alpha, \beta \rangle$ staat α loodrecht op de ruimte der exacte k-vormen precies dan als $\langle d^\star\alpha, \beta \rangle = 0$ voor alle $(k-1)$-vormen β. Dat laatste betekent dat $d^\star\alpha = 0$.

De laatste uitspraak volgt direkt uit het feit dat $\star : \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{m-k}(M)$ een lineair isomorfisme is. □

We onderstellen M nog steeds compact. De ruimte van harmonische k-vormen noteren we dan met $\mathcal{H}^k(M)$. Uit eigenschap (iii) volgt dat de inclusie van de harmonische vormen in de gesloten vormen een injectie $\mathcal{H}^k(M) \to H^k_{DR}(M)$ bepaalt. Als de ruimte van gesloten k-vormen een Hilbertruimte zou zijn geweest (d.w.z. volledig voor de norm) dan hadden we zelfs kunnen concluderen dat dit een isomorfisme is. Maar dat is niet het geval zodra $m > 0$ en dus is het opmerkelijk dat niettemin geldt:

STELLING 10.2. (Hodge-De Rham) *De harmonische k-vormen op (M, g) vormen een ruimte $\mathcal{H}^k(M)$ van eindige dimensie en de afbeelding $\mathcal{H}^k(M) \to H^k_{DR}(M)$ is een isomorfisme.*

We vinden zo opnieuw (9.13):

GEVOLG 10.3. (Poincaré dualiteit) *De De-Rhamcohomologiegroepen van een ge-oriënteerde compacte variëteit M zijn van eindige dimensie en de afbeelding*

$$H^k_{DR}(M) \times H^{m-k}_{DR}(M) \to \mathbb{R} \quad (m := \dim M)$$

bepaald door $(\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$ is een volkomen paring in de zin dat $H^k_{DR}(M)$ vereenzelvigd kan worden met de duale van $H^{m-k}_{DR}(M)$.

BIJLAGE A

Voortgezette lineaire algebra

De resultaten in deze appendix hebben we alleen nodig voor reële vectorruimten. We zullen vaststellen dat de geldigheid van een groot deel van de discussie zich uitstrekt tot vectorruimten over een willekeurig lichaam. We onderstellen daarom gegeven een lichaam K en nemen aan dat alle vectorruimten K-vectorruimten zijn en alle lineaire afbeeldingen daartussen K-lineair. Realo's kunnen voor K $\mathbb{R}$ (eventueel $K = \mathbb{C}$) invullen, Fundi's nemen K willekeurig.

1. Dualisatie

Laat V een vectorruimte zijn. De verzameling lineaire funkties $l : V \to K$ vormt ook een vectorruimte (optellen van funkties gaat puntsgewijs, scalaire vermenigvuldiging is duidelijk), genaamd de *duale* van V en aangegeven met V^*. Een lineaire afbeelding $s : V \to W$ van vectorruimten bepaalt dan een afbeelding $s^* : W^* \to V^*$, door samenstellen: $s^*(l) := ls$. Deze afbeelding is lineair (duidelijk); hij heet de *duale* van s.

VOORBEELDEN 1.1. Hier zijn een paar oneindigdimensionale voorbeelden ontleend aan de functionaalanalyse.

(i) Zij V de $\mathbb{R}$-vectorruimte van willekeurige (niet noodzakelijk continue) funkties $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dan is $v \in V \mapsto v(0)$ een lineaire funktie op V. (Die staat bekend als de δ-funktie.)

(ii) Zij V de $\mathbb{R}$-vectorruimte van continue funkties $v : [a, b] \to \mathbb{R}$. Is $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue funktie op een interval $[a, b]$, dan is $v \in V \mapsto \int_a^b v(t)u(t)\,dt$ een lineaire funktie op V.

(iii) Zij V de $\mathbb{R}$-vectorruimte van C^k-funkties $v : (-1, 1) \to \mathbb{R}$. Dan is voor $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, $v \in V \mapsto \sum_{i=0}^k a_k v^{(k)}(0)$ een lineaire funktie op V.

Onderstel V van eindige dimensie m. Is $(e_1, \dots, e_m)$ een basis van V, laat dan voor $i = 1, \dots, m$, $x^i : V \to \mathbb{R}$ de lineaire funktie zijn met $x^i(e_j) = \delta^i_j$ (dit is de *Kronecker delta*: d.w.z. gelijk aan 1 als boven- en onderindex gelijk zijn en 0 anders).

LEMMA 1.2. *De funkties $x^1, \dots, x^m$ vormen een basis voor V^*.*

BEWIJS. Ze zijn onafhankelijk: stel maar dat $\sum_i \lambda_i x^i = 0$ voor zekere scalairen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. De waarde van $\sum_i \lambda_i x^i$ op e_j is λ_j, dus $\lambda_j = 0$ voor alle j.

Ze brengen V^* voort: voor iedere lineaire $l : V \to \mathbb{R}$ heeft $\sum_i l(e_i)x^i$ dezelfde waarde als l op de basis $e_1, \dots, e_m$. Deze twee lineaire funkties zijn dus gelijk: $l = \sum_i l(e_i)x^i$. □

We noemen $(x^1, \dots, x^m)$ de aan $(e_1, \dots, e_m)$ *duale basis*.

De getransponeerde van een matrix kan intrinsieker begrepen worden als de matrix van de duale van een lineaire transformatie: Laat $s : V \to W$ een lineaire afbeelding zijn van eindigdimensionale vectorruimten. Onderstel gegeven een bases $(e_1, \dots, e_m)$ van V en $(f_1, \dots, f_n)$ van W en noteer hun dualen met $(x^1, \dots, x^m)$ en $(y^1, \dots, y^n)$. Dan is de matrix $\mathrm{mat}(s) := (s_i^j)$ van s t.o.v. deze bases gegeven door $s(e_i) = \sum_{j=1}^n s_i^j f_j$ met dus $s_i^j = y_j s(e_i)$. (De kolomindex is altijd die van een basisvector van het domein en de rij-index een van bereik.) Nu is voor $j = 1, \dots, n$, $s^*(y^j) = y^j s$ de lineaire funktie op V die in e_i de waarde s_i^j aanneemt. Anders gezegd, $s^*(y^j) = \sum_{i=1}^m s_i^j x^i$. Dus $(s^*)_j^i = s_i^j$: $\mathrm{mat}(s^*) = \mathrm{mat}(s)^t$.

Kiezen we een vaste vector $v \in V$, dan is 'evaluatie in v', $l \in V^* \mapsto l(v)$ een lineaire funktie op V^*. Noem deze lineaire funktie ι_v:

$$\iota_v(l) := l(v).$$

We zien hieraan dat ι_v lineair is in v: $\iota_{v+v'}(l) = l(v+v') = l(v)+l(v') = \iota_v(l)+\iota_{v'}(l)$ en $\iota_{\lambda v}(l) = l(\lambda v) = \lambda l(v) = \lambda\iota_v(l)$. We hebben dus een lineaire afbeelding

$$\iota : V \to V^{**}, \quad v \mapsto \iota_v$$

LEMMA 1.3. *Laat V van eindige dimensie m zijn. Dan is de afbeelding $\iota : V \to V^{**}$ is een isomorfisme van vectorruimten. Deze beeldt een basis $(e_1, \dots, e_m)$ van V af op de basis van V^{**} dubbelduaal aan $(e_1, \dots, e_m)$.*

BEWIJS. Er geldt dat $\iota_{e_j}(x^i) = x^i(e_j) = \delta_j^i$, wat laat zien dat $(\iota_{e_1}, \dots, \iota_{e_n})$ de basis van V^{**} is duaal aan $x^1, \dots, x^n$. De rest volgt. □

Dit lemma wordt weerspiegeld door de eigenschap dat twee keer transponeren een matrix onveranderd laat.

OPGAVE 73. Laat $s : V \to W$ en $u : W \to X$ lineaire afbeeldingen zijn van vectorruimten. Bewijs dat $(us)^* = s^*u^*$. Breng dit in verband met het feit dat als A en B matrices zijn waarvoor het matrixprodukt $A \cdot B$ gedefinieerd is, er geldt dat $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

OPGAVE 74. Laat V en W vectorruimten en $B : V \times W \to K$ een bilineaire afbeelding. Dat betekent voor iedere $v \in V$, de funktie $w \in W \mapsto B(v, w)$ lineair is en dat de zo verkregen afbeelding $b' : V \to W^*$ dat ook is. Evenzo vinden we een lineaire afbeelding $b'' : W \to V^*$.

(i) Bewijs dat b' en b'' elkaars dualen zijn.
(ii) Neem het speciale geval $W = V^*$ en $B(v, l) := l(v)$ (dit heet de *natuurlijke paring* van V met V^*). Wat zijn dan b' en b''?
(iii) Onderstel V en W van eindige dimensie. Bewijs dat b' een isomorfisme is precies dan als b'' een isomorfisme is. (We noemen B dan een *volkomen paring* van V met W.) Laat ook zien dat er dan bij iedere lineaire transformatie $s : W \to W$ precies één lineaire transformatie $s^t : V \to V$ bestaat zo dat $B(s^t(v), w) = B(v, s(w))$ voor alle $v \in V$ en $w \in W$. (We noemen s^t de *geadjungeerde* van s t.o.v. B.)

2. Het tensorprodukt

Laat V, W, X vectorruimten zijn. Een afbeelding $B : V \times W \to X$ noemen we *bilineair* als deze lineair is in ieder argument afzonderlijk, dus

$$B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w), \quad B(v, \lambda w) = \lambda B(v, w)$$
$$B(v + v', w) = B(v, w) + B(v', w), \quad B(v, w + w') = B(v, w) + B(v, w').$$

voor alle $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ en $\lambda \in K$. Dit motiveert de volgende constructie.

Beschouw de K-vectorruimte $K^{(V\times W)}$ opgespannen door de elementen van de *verzameling* $V \times W$. Dus deze vectorruimte heeft (per definitie) een basis geïndiceerd door de verzameling $V \times W$: $(e_{v,w})_{v\in V, w\in W}$ en een element hiervan wordt voorgesteld als een **eindige** som $\sum_i \lambda_i e_{v_i,w_i}$ met $\lambda_i \in K$, $v_i \in V$ en $w_i \in W$. Een bilineaire afbeelding B als boven bepaalt vanzelf een lineaire afbeelding $\tilde{b} : K^{(V\times W)} \to X$ door $\sum_i \lambda_i e_{v_i,w_i} \mapsto \sum_i \lambda_i B(v_i, w_i)$. Deze afbeelding bevat in zijn kern de elementen

$$e_{\lambda v,w} - \lambda e_{v,w}, \quad e_{v,\lambda w} - \lambda e_{v,w},$$
$$e_{v+v',w} - e_{v,w} - e_{v',w}, \quad e_{v,w+w'} - e_{v,w} - e_{v,w'},$$

waar $\lambda \in K$, $v, v' \in V$ en $w, w' \in W$. Dus als $H \subset K^{(V\times W)}$ de deelruimte is opgespannen door al deze elementen, dan volgt uit één der homomorfiestellingen dat $\tilde{b} : K^{(V\times W)} \to X$ factoriseert over een lineaire afbeelding $b : K^{(V\times W)}/H \to X$. We noteren het quotient $K^{(V\times W)}/H$ als $V \otimes W$ en noemen dit het *tensorproduct* van V en W. Het beeld van $e_{v,w}$ hierin geven we aan met $v \otimes w$. Er geldt dus

$$(\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) = v \otimes (\lambda w),$$
$$(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w, \quad v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'$$

als $\lambda \in K$, $v, v' \in V$ en $w, w' \in W$. Anders gezegd, de afbeelding

$$\otimes : V \times W \to V \otimes W, \quad (v, w) \mapsto v \otimes w$$

is bilineair. Deze is *universeel* in de zin dat iedere bilineaire afbeelding $B : V\times W \to X$ de samenstelling is van de bilineaire $\otimes : V \times W \to V \otimes W$ en precies één lineaire afbeelding $V \otimes W \to X$.

Lemma 2.1. *Onderstel dat V en W eindige dimensie hebben en dat bases $(e_1, \dots, e_m)$ van V en $(f_1, \dots, f_n)$ van W gekozen zijn. Dan is $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ een basis van $V \otimes W$, i.h.b. heeft $V \otimes W$ dimensie mn.*

Bewijs. De elementen $e_i \otimes f_j$ brengen $V \otimes W$ voort: gegeven $v \in V$ en $w \in W$, schrijf ze uit op de bases: $v = \sum_i v^i e_i$, $w = \sum_j w^j f_j$ en merk op dat $v \otimes w = (\sum_i v^i e_i) \otimes (\sum^j w^j f_j) = \sum_{i,j} v^i w^j (e_i \otimes w_j)$.

De elementen $e_i \otimes f_j$ zijn onafhankelijk: zijn $(x^1, \dots, x^m)$ en $(y^1, \dots, y^n)$ de duale bases, dan is voor een gegeven paar (i, j) de funktie $B^{ij} : V \times W \to K$, $(v, w) \mapsto x^i(v)y^j(w)$ bilineair. Voor de bijbehorende $b^{ij} : V \otimes W \to K$ geldt dat $b^{ij}(e_{i'} \otimes f_{j'}) = \delta^i_{i'}\delta^j_{j'}$, d.w.z. 1 als $(i', j') = (i, j)$ en 0 anders. Dit bewijst dat $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ lineair onafhankelijk is en dus een basis. (We zien ook dat $(b^{ij})_{i,j}$ de hieraan duale basis is.) □

We geven de verzameling lineaire afbeeldingen $V \to W$ aan met $\mathrm{Hom}(V, W)$. Dit is een vectorruimte. Is $l \in V^*$ en $w \in W$, dan bepalen die een eenvoudige lineaire afbeelding $V \to W$, $v \mapsto l(v)w$. Zo hebben we dus een afbeelding $V^* \times$

$W \to \mathrm{Hom}(V, W)$. Deze is bilineair (ga na) en geeft dus aanleiding tot een lineaire afbeelding

$$V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W).$$

LEMMA 2.2. *Als V en W eindige dimensie hebben, dan is de lineaire afbeelding $V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ een isomorfisme van vectorruimten.*

BEWIJS. Kies bases als voorheen. Dan gaat $x^i \otimes f_j$ over in het homomorfisme $u^i_j : V \to W$ dat e_i op f_j afbeeldt en ieder andere basisvector $e_{i'}$ op 0. Deze collectie homomorfismen vormt een basis voor $\mathrm{Hom}(V, W)$ (corresponderend met de matrixposities). □

OPGAVE 75. Bewijs dat $V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ al een isomorfisme is als V *of* W eindige dimensie hebben.

OPGAVE 76. (i) Laat $s : V \to W$ en $s' : V' \to W'$ lineaire afbeeldingen zijn. Bewijs dat $v \otimes v' \mapsto s(v) \otimes s'(v')$ een lineaire afbeelding $V \otimes V' \to W \otimes W'$ definieert (gewoonlijk aangegeven met $s \otimes s'$).

(ii) Bewijs dat deze constructie een lineaire afbeelding

$$\mathrm{Hom}(V, W) \otimes \mathrm{Hom}(V', W') \to \mathrm{Hom}(V \otimes V', W \otimes W')$$

definieert. Bewijs dat dit een isomorfisme is als alle vier de vectorruimten eindige dimensie hebben.

(iii) Onderstel dat alle vier de vectorruimten voorzien zijn van een eindige basis en geef $V \otimes V'$ en $W \otimes W'$ de bijbehorende bases. Als (s^i_j) de matrix is van s en $u^{i'}_{j'}$ die van u, bepaal dan de matrixcoëfficiënten van $s \otimes s'$.

OPGAVE 77. Onderstel V van eindige dimensie. De afbeelding $V^* \times V \to K$ gedefinieerd door $(l, v) \mapsto l(v)$ is bilineair (ga na) en bepaalt dus een lineaire funktie $V^* \otimes V \to K$. Met welke bekende funktie op $\mathrm{Hom}(V, V) = \mathrm{End}(V)$ correspondeert dit?

Het tensorprodukt is associatief in de zin dat voor drie vectorruimten V, W, X, de geïtereerde tensorprodukten $(V \otimes W) \otimes X$ en $V \otimes (W \otimes X)$ met elkaar vereenzelvigd kunnen worden middels $(v \otimes w) \otimes x \leftrightarrow v \otimes (w \otimes x)$. De haakjes kunnen dus weggelaten worden: $v \otimes w \otimes x \in V \otimes W \otimes X$. Algemener hebben we voor een eindig stel vectorruimten $V_1, \dots, V_k$ het k-voudige tensorproduct $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$. Er is een zelfde beschrijving als voor het gewone tensorproduct, nu in termen van *multilineaire* afbeeldingen $M : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ (waarvan de definitie zich laat raden). Zo'n afbeelding factoriseert als een universele multilineaire afbeelding $V_1 \times \cdots \times V_k \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ gevolgd door een lineaire afbeelding $m : V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \to W$.

3. Tensoralgebra en uitwendige algebra

De tensoralgebra. Voor een vectorruimte V korten we het k-voudige tensorprodukt $V \otimes \cdots \otimes V$ af als $V^{\otimes k}$ en we stipuleren dat voor $k = 0$ dit gelijk is aan het lichaam K. De direkte som

$$T(V) := \oplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}$$

is dan een ring als we $\otimes$ als produkt nemen. Deze omvat het lichaam K en is daarom een K-algebra. We noemen $T(V)$ de *tensoralgebra* van V.

Is V van eindige dimensie m en is $(e_1, \dots, e_m)$ een basis van V, dan wordt voor $k > 0$ een basis van $V^{\otimes k}$ geïndiceerd door de rijen $(i_1, \dots, i_k)$ van lengte k in

$\{1,\ldots,m\}$: $e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_k}$. Zulke uitdrukkingen kunnen we beschouwen als 'niet-commutatieve monomen' in $e_1,\ldots,e_m$. Omdat die lineair onafhankelijk zijn mogen we $T(V)$ opvatten als de 'vrije (niet-commutatieve) K-algebra' voortgebracht door $e_1,\ldots,e_m$.

De uitwendige algebra. Laat nu $I(V)\subset T(V)$ het tweezijdige ideaal zijn voortgebracht door de elementen $v\otimes v$, $v\in V$. Een element hiervan kan dus geschreven worden als een lineaire combinatie van tensoren van de gedaante $v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_k$, waarbij het rijtje $(v_1,\ldots,v_k)$ minstens één keer even stokt: $v_\kappa=v_{\kappa+1}$ voor een κ. In het bijzonder is $I(V)$ de direkte som van zijn homogene delen:

$$I(V)=\oplus_{k\geq 2}I(V)^k \text{ met } I(V)^k\subset V^{\otimes k}.$$

De quotiëntalgebra $T(V)/I(V)$ noemen we de *uitwendige algebra* van V en schrijven die als $\wedge(V)$. Het deel in graad k, $V^{\otimes k}/I(V)^k$, noteren we als $\wedge^k V$, dus

$$\wedge(V)=\oplus_{k\geq 0}\wedge^k V.$$

In het bijzonder is $\wedge^0 V=K$ en $\wedge^1 V=V$. Het produkt in $\wedge(V)$ heet het *uitprodukt* en geven we aan met $\wedge$, dus het beeld van $v_1\otimes\cdots\otimes v_k$ is $v_1\wedge\cdots\wedge v_k$. Uit de definitie volgt dat $v\wedge v=0$ voor alle $v\in V$. Dus $v'\wedge v+v\wedge v'=(v+v')\wedge(v+v')-v\wedge v-v'\wedge v'=0$ voor alle $v,v'\in V$. Met induktie vinden we dan dat voor iedere permutatie $\sigma\in\mathcal{S}_k$ geldt

$$v_{\sigma(1)}\wedge v_{\sigma(2)}\wedge\cdots\wedge v_{\sigma(k)}=\mathrm{sign}(\sigma)v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_k,$$

waar $\mathrm{sign}(\sigma)\in\{\pm\}$ de signatuur is van σ. In het bijzonder is $v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_k$ nul zodra $v_i=v_j$ voor een $i\neq j$ (want we kunnen door een permutatie er voor zorgen dat deze vectoren naast elkaar komen te staan).

Opgave 78. Laat V en W vectorruimten zijn en $F:V^k\to W$ een multilineaire afbeelding. Bewijs dat F factoriseert over een lineaire afbeelding $\wedge^k V\to W$ precies dan als F nul is zodra twee nevengeschikte argumenten gelijk zijn.

Propositie 3.1. *Onderstel V van eindige dimensie en voorzien van een basis $(e_1,\ldots,e_m)$. Laat voor een deelverzameling I van $\{1,\ldots,m\}$ gedefinieerd zijn:*

$$e_I:=\begin{cases} e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_k} \text{ als } \emptyset\neq I=\{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq m\};\\ 1 \text{ als } I=\emptyset.\end{cases}$$

Dan geldt:

(i) *De collectie $(e_I)_I$, waar I de deelverzamelingen van $\{1,\ldots,m\}$ van k elementen doorloopt is een K-basis van $\wedge^k V$, i.h.b. is $\dim(\wedge^k V)=\binom{m}{k}$.*

(ii) *De K-algebra $\wedge(V)$ wordt als zodanig voortgebracht door $e_1,\ldots,e_m$ en voldoet aan de relaties $e_i\wedge e_i=0$ en $e_i\wedge e_j=-e_j\wedge e_i$ $(i<j)$. Dit is een volledig stel relaties in de zin dat iedere relatie er een gevolg van is.*

(iii) *Tenslotte is*

$$e_I\wedge e_J=\begin{cases}0 \text{ als } I\cap J\neq\emptyset;\\ \pm e_{I\cup J} \text{ als } I\cap J=\emptyset,\end{cases}$$

waarbij het teken de signatuur is van de permutatie die de rij IJ naar grootte ordent.

Bewijs. We volstaan met het bewijs van (i), want (ii) volgt hieruit en (iii) is duidelijk. De e_I's brengen $\wedge(V)$ voort als K-vectorruimte: de elementen $e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_k}$ brengen $T(V)$ voort, dus de elementen $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$ brengen $\wedge(V)$ voort. Maar $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$ is nul tenzij alle indices verschillend zijn en in dat laatste geval krijgen we $\pm e_I$ voor een I.

De e_I's zijn lineair onafhankelijk: gegeven $I=(1\le i_1<\cdots i_k\le m)$, beschouw de funktie $V^k\to K$ gedefinieerd door

$$(v_1,\dots,v_k)\in V^k\mapsto\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_k}\operatorname{sign}(\sigma)x^{i_{\sigma(1)}}(v_1)x^{i_{\sigma(2)}}(v_2)\dots x^{i_{\sigma(k)}}(v_k)\in K$$

Deze is multilineair en bepaalt derhalve een lineaire funktie $V^{\otimes k}\to K$. Nu is de laatste nul op de tensoren $v_1\otimes\cdots\otimes v_k$ die even stokken ($v_\kappa=v_{\kappa+1}$ voor een κ). Zulke stokkende tensoren spannen $I(V)^k$ op, dus deze funktie factoriseert over een lineaire funktie $x^I:\wedge^kV\to K$. Nu is gemakkelijk na te gaan dat $x^I(e_J)=\delta^I_J$ (d.w.z. 1 als $J=I$ en 0 anders). Dus de e_I's zijn lineair onafhankelijk. $\square$

Voorbeelden 3.2. Voor kleine m is het voorgaande niet nieuw:

(i) Voor $m=1$ krijgen we $\wedge(K)=K[e]/(e^2)$.

(ii) Een voortbrenger van $\wedge^2(K^2)$ is e_{12}. Identificeren we zo $\wedge^2(K^2)$ met K, dan is $\wedge$ gegeven door:

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=\det\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{pmatrix}.$$

(iii) Een basis van $\wedge^2(K^3)$ is $f_1:=e_{23},f_2:=e_{31},f_3:=e_{12}$. In termen hiervan is het uitprodukt van twee kolomvectoren gegeven door:

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}.$$

Dat is dus het klassieke uitprodukt.

Opmerking 3.3. Het bewijs van Propositie 3.1 laat ook zien dat $\wedge^kV$ en $\wedge^k(V^*)$ elkaars duale zijn in geval V eindige dimensie heeft: de afbeelding

$$(V^*)^k\times V^k\to K,\quad (l_1,\dots,l_k,v_1,\dots,v_k)\mapsto\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_k}\operatorname{sign}(\sigma)l_1(v_{\sigma(1)}).\dots.l_k(v_{\sigma(k)}),$$

is lineair in iedere variabele en nul zodra twee argumenten (twee v_i's of twee l_i's) gelijk zijn. Dus deze afbeelding bepaalt een bilineaire afbeelding

$$\wedge^k(V^*)\times\wedge^kV\to K.$$

Derhalve is een element $\wedge^k(V^*)$ op te vatten als een lineaire funktie op $\wedge^kV$. De aldus verkregen afbeelding $\wedge^k(V^*)\to(\wedge^kV)^*$ is een lineair isomorfisme, want met de notatie van Propositie 3.1 geldt dat het beeld van het paar (e_I,x^J) gelijk is aan δ^J_I: $(x^I)_I$ mag opgevat worden als de basis duaal aan $(e_I)_I$.

Opgave 79. Laat V een vectorruimte zijn van eindige dimensie m. Bewijs dat voor $k=0,\dots,m$ de afbeelding

$$P:\wedge^kV\to\operatorname{Hom}(\wedge^{m-k}V,\wedge^mV),\quad P(a):b\mapsto a\wedge b,$$

een isomorfisme van vectorruimten is.

Opgave 80. Laat V en W vectorruimten zijn van eindige dimensie. Bewijs dat de afbeelding $V \oplus W \to \wedge(V) \otimes \wedge(W)$, $v + w \mapsto v \otimes 1 + 1 \otimes w$ op natuurlijke manier voort te zetten is tot een isomorfisme $\wedge(V \oplus W) \cong \wedge(V) \otimes \wedge(W)$.

Een lineaire afbeelding $s : V \to W$ van vectorruimten bepaalt voor iedere k een lineaire afbeelding $s^{\otimes k} : V^{\otimes k} \to W^{\otimes k}$. Samen vormen die een afbeelding $T(s) : T(V) \to T(W)$. Dit is duidelijk een algebrahomomorfisme. Ook vinden we voor iedere k een lineaire afbeelding

$$\wedge^k s : \wedge^k V \to \wedge^k W, \quad v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \mapsto s(v_1) \wedge \cdots \wedge s(v_k)$$

die het graad k-deel is van een algebrahomomorfisme $\wedge(s) : \wedge(V) \to \wedge(W)$. Speciaal interessant is het geval $W = V$:

Propositie 3.4. *Als* $\dim V = m$, *dan is* $\wedge^m s : \wedge^m V \to \wedge^m V$ *vermenigvuldiging met* $\det(s)$.

Bewijs. Kies een basis $e_1, \ldots, e_m$ voor V. Als $s(e_i) = \sum_j s_i^j e_j$, dan is

$$\begin{aligned}
\wedge^m(s)(e_{12\ldots m}) &= s(e_1) \wedge \cdots \wedge s(e_m) \\
&= (\sum_j s_1^j e_j) \wedge \cdots \wedge (\sum_j s_m^j e_j) \\
&= \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_m} s_1^{j_1} e_{j_1} \wedge s_2^{j_2} e_{j_2} \wedge \cdots \wedge s_m^{j_m} e_{j_m}.
\end{aligned}$$

In de laatste som geven alleen de termen waarvoor $(j_1, \ldots, j_m)$ alle verschillend zijn mogelijk een bijdrage. Zo'n rijtje $(j_1, \ldots, j_m)$ is het beeld van $(1, 2, \ldots, m)$ onder een permutatie $\sigma \in \mathcal{S}_m$, en dus is deze som gelijk aan

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \operatorname{sign}(\sigma) s_1^{\sigma(1)} s_2^{\sigma(2)} \cdots s_m^{\sigma(m)} e_{12\ldots m} = \det(s) e_{12\ldots m}.$$

□

Eigenlijk is het mooier de determinant van s te *definiëren* als de scalar waarmee $\wedge^m s$ op de ééndimensionale vectorruimte $\wedge^m V$ werkt; het is immers dan vanzelf duidelijk dat die onafhankelijk van een basis is.

Opgave 81. Zij $s : V \to V$ een endomorfisme van een m-dimensionale vectorruimte.

(i) Bewijs dat het spoor van $\wedge(s) : \wedge(V) \to \wedge(V)$ gelijk aan $\det(s + \mathbf{1}_V)$. (Door s te vervangen door λs, $\lambda \in K$, zien we dat dan het spoor van $\wedge^k s : \wedge^k V \to \wedge^k V$ gelijk is aan de coëfficiënt van λ^k in de de gemodificeerde karakteristieke veelterm $\det(\lambda s + \mathbf{1}_V)$.)

(ii) Kies een voortbrenger μ voor $\wedge^m V$ en laat $B_k : \wedge^k V \times \wedge^{m-k} V \to K$ de bilineaire afbeelding zijn gedefinieerd door $\alpha \wedge \beta = B_k(\alpha, \beta)\mu$. Bewijs dat $B_k(\wedge^k s(\alpha), \wedge^{m-k} s(\beta)) = \det(s) B_k(\alpha, \beta)$. Laat $(\wedge^{m-k} s)^t : \wedge^k V \to \wedge^k V$ de geadjungeerde zijn van $\wedge^{m-k} s$ t.o.v. B_k (zie Opgaven 74 en 79). Bewijs dat de samenstelling $(\wedge^{m-k} s)^t \circ (\wedge^k s)$ de scalaire vermenigvuldiging in $\wedge^k V$ is met $\det(s)$. (Voor $k = 1$ is dit een abstracte vorm van de regel van Cramer.)

Oriëntatie. We onderstellen hier $K = \mathbb{R}$. Is V een reële vectorruimte van eindige dimensie m, dan is $\wedge^m V$ een 1-dimensionale reële vectorruimte (dit is ook waar voor $m = 0$, omdat $\wedge^0 V = \mathbb{R}$ per definitie). Dus $\wedge^m V - \{0\}$ heeft twee componenten. Voor $m > 0$ zijn ze gelijkwaardig, want er is dan geen die de voorkeur heeft. De keuze van een component komt dan ook neer op het invoeren van een beetje extra structuur op V; we noemen zo'n keus een *oriëntatie* van V.

Onderstel even $m > 0$. Geven we de uitgekozen component aan met $\wedge^m_+ V$, dan geldt voor een basis $(e_1, \ldots, e_m)$ van V dat $e_1 \wedge \cdots \wedge e_m \in \wedge^m_+ V$ of $-e_1 \wedge \cdots \wedge e_m \in \wedge^m_+ V$. In het eerste geval zeggen we dat de basis *georiënteerd* is met betrekking tot de gegeven oriëntatie. Omgekeerd bepaalt de keuze van een basis $(e_1, \ldots, e_m)$ van V een oriëntatie van V: neem voor $\wedge^m_+ V$ de positieve veelvouden van $e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$.

Voor $m = 0$ (dus $V = \{0\}$) kunnen we de oriëntatie met een teken $\pm$ aangeven: dat verwijst dan naar de desbetreffende component van $\wedge^0 V - \{0\} = \mathbb{R} - \{0\}$.

Stel nu V georiënteerd van dimensie $m > 0$ en laat $H \subset V$ een halfruimte zijn (d.w.z. gedefinieerd door $l > 0$ voor een $l \in V^* - \{0\}$). We oriënteren dan ∂H als volgt: kies een vector $v \in V - H$ en stipuleer dat de basis $(e_1, \ldots, e_{m-1})$ van ∂H georiënteerd is als $(v, e_1, \ldots, e_{m-1})$ een georiënteerde basis van V is, aannemende dat $m > 1$. (Dit hangt niet van de keus van v af.) Als $m = 1$, dan geven we de $\partial H = \{0\}$ de oriëntatie $\pm$ als $\pm v$ de oriëntatie van V definieert. We noemen dit de *geïnduceerde oriëntatie* van ∂H.

Opgave 82. Bewijs dat twee bases $(e_1, \ldots, e_m)$ en $(e'_1, \ldots, e'_m)$ van een reële vectorruimte dezelfde oriëntatie bepalen precies dan als de matrix $(a_i^j)_{i,j}$ die de één in de ander uitdrukt: $e'_i = \sum_j a_i^j e_j$, positieve determinant heeft.

Opgave 83. Laat V en W georiënteerde reële vectorruimten zijn. Laat zien dat $V \oplus W$ en $V \otimes W$ op natuurlijke manier te oriënteren zijn.

Is V georiënteerd, dan zijn er twee conventies om zijn duale V^* te oriënteren. Wij kiezen de volgende: is $(e_1, \ldots, e_m)$ een georiënteerde basis voor V, dan is de duale basis $(x^1, \ldots, x^m)$ per definitie een georiënteerde basis voor V^*. (De andere conventie is in plaats daarvan $(x^m, \ldots, x^1)$ te nemen; die wordt gesuggereerd door het feit dat $\iota_{e_1 \wedge \cdots \wedge e_m}(x^m \wedge \cdots \wedge x^1) = 1$.)

Inwendige contractie. We herinneren ons dat iedere $v \in V$ een lineaire funktie $\iota_v : V^* \to K$, $l \mapsto l(v)$, bepaalt.

Propositie 3.5. *Er is voor iedere $v \in V$ precies één lineaire afbeelding*

$$\iota_v : \wedge(V^*) \to \wedge(V^*)$$

die de graad met één verlaagt en voldoet aan de volgende twee eigenschappen

(i) *als $l \in V^*$, dan is $\iota_v(l) = l(v)$ (m.a.w., ι_v stemt op V^* overeen met de eerdere definitie) en*

(ii) *als $\alpha \in \wedge^k(V^*)$ en $\beta \in \wedge(V^*)$, dan is*

$$\iota_v(\alpha \wedge \beta) = \iota_v(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_v(\beta).$$

Bovendien geldt:

(iii) *de afbeelding $V \times \wedge(V^*) \to \wedge(V^*)$, $(v, \alpha) \mapsto \iota_v(\alpha)$ is bilineair en $\iota_v^2 = 0$.*

BEWIJS. De uniciteit is niet moeilijk in te zien, want de waarde van ι_v op een element $l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$, $l_i \in V^*$, ligt vast:

$$\begin{aligned}\iota_v(l_1 \wedge \cdots \wedge l_k) &= \iota_v(l_1) l_2 \wedge \cdots \wedge l_k - l_1 \wedge \iota_v(l_2 \wedge \cdots \wedge l_k)\\ &= l_1(v) l_2 \wedge \cdots \wedge l_k - l_1 \wedge \iota_v(l_2 \wedge \cdots \wedge l_k),\end{aligned}$$

en met induktie vinden we

$$\iota_v(l_1 \wedge \cdots \wedge l_k) = \sum_{\kappa=1}^{k} (-1)^{\kappa-1} l_\kappa(v) l_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{l_\kappa} \wedge \cdots \wedge l_k,$$

waar zoals gewoonlijk de behoede vector overgeslagen moet worden.

Anderzijds kunnen we hiermee ι_v definiëren. Preciezer, beschouw voor $k = 1, \ldots, m$ de afbeelding

$$(V^*)^k \to \wedge^{k-1}(V^*), \quad (l_1, \cdots, l_k) \mapsto \sum_{\kappa=1}^{k} (-1)^{\kappa-1} l_\kappa(v) l_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{l_\kappa} \wedge \cdots \wedge l_k.$$

Deze is multilineair (duidelijk) en het is ook gemakkelijk in te zien dat die nul is zodra twee nevengeschikte argumenten gelijk zijn. Dus die afbeelding factoriseert over een lineaire afbeelding $\iota_v : \wedge^k(V^*) \to \wedge^{k-1}(V^*)$ (zie Opgave 78). Het is eenvoudig na te gaan dat die aan alle voorwaarden voldoet. □

OPGAVE 84. Zij V een vectorruimte.

(i) Voor $(v_1, \ldots, v_k) \in V^k$ beschouwen we de afbeelding

$$\iota_{v_1} \iota_{v_2} \cdots \iota_{v_k} : \wedge(V^*) \to \wedge(V^*)$$

Bewijs dat deze alleen maar van $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$ afhangt en een bilineaire afbeelding

$$\wedge^k(V) \times \wedge(V^*) \to \wedge(V^*), \quad (a, \alpha) \mapsto \iota_a(\alpha).$$

bepaalt.

(ii) Bewijs dat voor $(v_1, \ldots, v_k) \in V^k$ en $(l_1, \cdots, l_k) \in (V^*)^k$ geldt:

$$\iota_{v_k \wedge v_{k-1} \wedge \cdots \wedge v_1}(l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_k) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \operatorname{sign}(\sigma) l_1(v_{\sigma(1)}) \cdots l_k(v_{\sigma(k)}).$$

(Dit is dus ook het beeld van $(l_1 \wedge \cdots \wedge l_k, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)$ onder de paring beschreven in Opmerking 3.3.)

4. Symplectische vormen

Zij V een vectorruimte van eindige dimensie m. Een $\omega \in \wedge^2(V^*) \cong (\wedge^2 V)^*$ kan opgevat worden als een antisymmetrische bilineaire vorm $\omega : V \times V \to K$. Deze bepaalt op zijn beurt een lineaire afbeelding $\tilde{\omega} : V \to V^*$, $v \mapsto \omega(v, -)$. Met de *rang* van ω bedoelen we de rang van $\tilde{\omega}$. Als deze m is dan zeggen dat ω *nietontaard* is; in dat geval is $\tilde{\omega}$ natuurlijk een isomorfisme. Anders heet ω *ontaard*.

LEMMA 4.1 (Normaalvorm). *De rang van ω is altijd even, zeg $2s$, en V^* heeft een basis $(x^1, \ldots, x^m)$ zodat $\omega = \sum_{i=1}^{s} x^{2i-1} \wedge x^{2i}$. Bovendien is s gekarakteriseerd door de eigenschap: $\omega^s \neq 0 = \omega^{s+1}$.*

BEWIJS. We bewijzen alleen het bestaan van de basis, want de rest volgt dan gemakkelijk. We doen dit met induktie naar m. We kunnen aannemen dat $\omega \neq 0$. Er is dus een paar $e_1, e_2 \in V$ met $\omega(e_1, e_2) \neq 0$. Door e_2 met een scalar te vermenigvuldigen kunnen we aannemen dat $\omega(e_1, e_2) = 1$. Omdat e_1 en e_2 niet proportioneel kunnen zijn, zijn ze lineair onafhankelijk. Laat W de verzameling $v \in V$ zijn met $\omega(v, e_1) = \omega(v, e_2) = 0$. Direkt is na te gaan dat voor iedere $v \in V$, $v_W := v - \omega(v, e_2)e_1 + \omega(v, e_1)e_2$ bevat is in W. Dus V is de direkte som van W en het vlak opgespannen door e_1, e_2. De induktie-aanname toegepast op $\omega|W \times W$ geeft een basis $(e_3, \dots, e_m)$ van W waarop deze beperking de beweerde vorm aanneemt. Ga zelf na dat de zo gevonden basis van V is als gewenst. $\square$

GEVOLG 4.2. *Als* $\dim V = 2n$ *even is, dan is de* 2*-vorm* ω *op* V^* *nietontaard precies dan als* $\omega^n \neq 0$*. Als* $\dim V$ *oneven is, dan is iedere* 2*-vorm op* V *ontaard.*

5. Kwadratische vormen

In deze paragraaf zijn alle vectorruimten eindigdimensionaal en reëel (dus nu $K = \mathbb{R}$).

Laat V een vectorruimte zijn. Een bilineaire funktie $g : V \times V \to \mathbb{R}$ die symmetrisch is in de zin dat $g(v, w) = g(w, v)$ bepaalt een funktie $q = q_g : V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto g(v, v)$, welke voldoet aan

— q is homogeen van graad 2: $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$,
— de afbeelding $(v, w) \in V^2 \mapsto q(v + w) - q(v) - q(w) \in \mathbb{R}$ is bilineair (want gelijk aan $2g$).

DEFINITIE 5.1. Een funktie $q : V \to \mathbb{R}$ die aan deze twee eigenschappen voldoet noemen we een *kwadratische vorm* op V.

Zo'n kwadratische vorm q bepaalt op zijn beurt een symmetrische bilineaire vorm g op V door $g_q(v, w) := \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$. De toevoegingen $g \mapsto q_g$ en $q \mapsto g_q$ zijn elkaars inversen, dus het geven van een symmetrische bilineaire funktie op V is equivalent met het geven van een kwadratische vorm op V.

DEFINITIE 5.2. We noemen een kwadratische vorm $q : V \to \mathbb{R}$ (en ook de bijbehorende symmetrische bilineaire funktie) *positief definiet* resp. *negatief definiet* als $q(v)$ positief resp. negatief is voor alle $v \neq 0$.

Laat g een kwadratische vorm zijn op de vectorruimte V en q de bijbehorende kwadratische vorm. Voor iedere basis $(e_1, \dots, e_m)$ van V kunnen we de matrix $(g_{ij} := g(e_i, e_j))_{i,j}$ vormen. Deze is symmetrisch. Is $(x^1, \dots x^m)$ de basis duaal aan $(e_1, \dots, e_m)$, dan is dus $g(v, w) = \sum_{i,j} g_{ij} x^i(v) x^j(w)$ en derhalve

$$q = \sum_{i,j} g_{ij} x^i x^j = \sum_i g_{i,i} (x^i)^2 + 2 \sum_{i<j} g_{ij} x^i x^j .$$

LEMMA 5.3 (Diagonaalvorm). *Er is een basis voor* V *waarvoor de matrix van* g *een diagonaalmatrix is. Is* $(x^1, \dots, x^m)$ *de bijbehorende duale basis, dan is dus* $q = \sum_i \lambda_i (x^i)^2$.

BEWIJS. Met induktie naar $m := \dim V$. Als g identiek nul is, dan zijn we klaar. Zo niet, dan is q evenmin identiek nul: er is dus een $v_o \in V$ met $q(v_o) \neq 0$. Laat nu $V' \subset V$ de deelruimte zijn van $v \in V$ met $g(v, v_o) = 0$. Deze heeft dimensie $m - 1$. De induktiehypothese toegepast op de beperking van g tot $V' \times V'$

geeft een basis $(e_1, \dots, e_{m-1})$ van V' waarvoor $(g(e_i, e_j))_{1\le i,j\le m-1}$ de aangegeven vorm heeft. Dan is $(e_1, \dots, e_{m-1}, e_m := v_o)$ een basis van V als gevraagd, want $g(e_i, e_m) = g(e_m, e_i) = 0$ voor $i = 1, \dots, m-1$. $\square$

Een basis als in dit lemma noemen we *diagonaal* voor g. De *signatuur* van q kan dan gedefinieerd worden als het paar (p, n), waar p resp. n het aantal indices i met $\lambda_i > 0$ (resp. $\lambda_i < 0$) is. Het onderstaande lemma impliceert dat dit niet van de keus van een diagonale basis afhangt (en suggereert tegelijk een betere definitie).

LEMMA 5.4. *De bestanddelen van de signatuur van q zijn gekarakteriseerd als de maximale dimensie van een deelruimte van V waarop q positief (resp. negatief) definiet is.*

BEWIJS. Zij $W \subset V$ een deelruimte waarop q positief definiet is. We bewijzen dat $\dim(W) \le p$. Laat $e_1, \dots, e_m$ de basis zijn als hierboven, V_+ het opspansel van de basisvectoren e_i met $\lambda_i > 0$ (dus van dimensie p) en $\pi : V \to V_+$ de projectie op V_+ met kern het opspansel der overige basisvectoren. Het is duidelijk dat q positief definiet is op V_+ en ≤ 0 op $\mathrm{Ker}(\pi)$. Dus dan moet $W \cap \mathrm{Ker}(\pi) = 0$. Anders gezegd, de projectie π beeldt W injectief naar V_+ af. I.h.b. is $\dim W \le p$.

De analoge bewering voor n volgt door dit toe te passen op $-q$. $\square$

Het is duidelijk dat q positief definiet is precies dan als $p = m$.

Zij $g : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische bilineaire funktie. Voor iedere $v \in V$ hebben we dan een lineaire funktie $g_v : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g_v(v') = g(v, v')$. Nu hebben we een afbeelding $\tilde g : V \to V^*$, $v \mapsto g_v$. Deze is lineair. We zeggen dat g een pseudo-inprodukt is als $g_v = 0$ impliceert $v = 0$, anders gezegd als $\tilde g$ injectief is. Omdat V en V^* gelijke dimensie hebben komt dit neer op: $\tilde g$ is een isomorfisme. We kunnen dan zijn inverse gebruiken om g naar V^* over te planten:

$$\breve g : V^* \times V^* \to \mathbb{R}, \quad \breve g(l, l') = g(\tilde g^{-1}(l), \tilde g^{-1}(l')).$$

Met onze eerdere notatie is $\tilde g$ in termen van de basis $(e_1, \dots, e_m)$ gegeven door $\tilde g(e_i) = \sum_j g_{ij} x^j$, dus $\tilde g$ is een pseudo-inprodukt precies dan als de matrix $(g_{ij})_{ij}$ nietsingulier is. De matrix van inprodukten $(g^{ij} := \breve g(x^i, x^j)$ is dan eenvoudig de inverse van de matrix (g_{ij}). Want uit

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g(e_i, e_j) = \breve g(\tilde g(e_i), \tilde g(e_j)) \\ &= \breve g(\sum_k g_{ik} x^k, \sum_l g_{jl} x^l) = \sum_{k,l} g_{ik} g^{kl} g_{jl}, \end{aligned}$$

volgt dat voor de matrices $G = (g_{ij})$ en $\breve G = (G^{ij})$ geldt $G = G\breve G G$ zodat $\breve G = G^{-1}$. Om die reden wordt in de literatuur de kwadratische vorm $\breve g$ vaak de *inverse* van g genoemd.

Heeft g de diagonaalvorm t.o.v. de basis $(e_1, \dots, e_m)$: $g(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, dan is $\tilde g(e_i) = \lambda_i x^i$, waar $(x_1, \dots, x_m)$ de duale basis is. Dus g is een pseudo-inpordukt precies dan als $\lambda_i \ne 0$ voor alle i. In dat geval is $\breve g(x^i, x^j) = \lambda_i^{-1} \delta^{ij}$. We zien i.h.b. dat $\breve g$ dezelfde signatuur heeft als g. Overigens kunnen we de basis nog aanpassen: als $\lambda_i \ne 0$ vervang x^i dan door $\sqrt{|\lambda_i|} x^i)$ zodat alle niet-nul d iagonaalcoëfficienten gelijk ± 1 worden en vernummer zodat de diagonaal met enen begint en met nullen eindigt: dus

$$q = \sum_{i=1}^{p} (x^i)^2 - \sum_{i=p+1}^{p+n} (x^i)^2.$$

Dit heet de *standaardvorm* van q.

Inprodukten. Een positief definiete (resp. niet-ontaarde) symmetrische bilineaire funktie g op V noemen we kortweg een *inprodukt* (resp. *pseudo-inprodukt*) en V voorzien van zo'n g heet dan een *(pseudo-)inproduktruimte*

Is g een inprodukt, dan noteren we de positieve wortel van de bijbehorende kwadratische vorm als $\|v\| := \sqrt{g(v,v)}$. Die voldoet aan

— $\|v\| \geq 0$ en $\|v\| = 0$ alleen als $v = 0$.
— $\|\lambda v\| = |\lambda|.\|v\|$
— $\|v + v'\| \leq \|v\| + \|v'\|$

voor alle $v, v' \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Deze drie eigenschappen zeggen dat $\| \, \|$ een *norm* is voor V. Die maakt van V zo een metrische ruimte als we de afstand van v tot v' gelijk aan $\|v - v'\|$ nemen.

Volgens Lemma 5.4 bestaat er een basis $(e_1, \dots, e_m)$ van V zodat de matrix van g hierop de matrix van de indentiteit is. Anders gezegd, de bijbehorende kwadratische funktie is $(x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2$. Zo'n basis heet *orthonormaal.* In dat geval is dus $\tilde{g}(e_i) = x^i$. De lineaire transformaties van V die het inprodukt g behouden heten *orthogonaal.* Ze vormen een groep.

In de context van een pseudo-inproduktruimte (V, g) is het begrip gradiënt te definiëren: is U een open deel van V, dan is de raakbundel van U gelijk aan $V \times U \to U$. Omdat g een isomorfisme $\tilde{g} : V \to V^*$ bewerkstelligt kunnen we de raakbundel van U met zijn duale identificeren. Daarmee kunnen we de *gradiënt* van een funktie $f : U \to \mathbb{R}$ definiëren als het vectorveld op U dat onder dit isomorfisme correspondeert met df. In coordinaten: is $(e_1, \dots, e_m)$ een diagonale basis van V met duale $x^1, \dots, x^m$, dan doet $\tilde{g}$ de raakvector $\partial/\partial x^i|_p$ met $\lambda_i dx^i|_p$ corresponderen en dus is

$$\mathrm{grad}(f) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Is g een inprodukt en is voor $(e_1, \dots, e_m)$ een orthonormale basis gekozen (zodat dus $\lambda_i = 1$ voor alle i), dan krijgen we de vertrouwde vorm.

De volgende bewering is equivalent met het feit dat iedere reële symmetrische $(m \times m)$-matrix eigenvectoren heeft die een orthonormale basis van $\mathbb{R}^m$ vormen.

Propositie 5.5. *Zij (V, g) een inproduktruimte. Dan is er bij iedere kwadratische vorm k op V een orthonormale basis $(e_1, \dots, e_m)$ van (V, g) waarop k de diagonaalgedaante heeft: $k(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ voor zekere λ_i.*

Bewijs. Voor $m = 0$ is er niets te bewijzen. Stel daarom $m > 0$ en neem aan dat de propositie bewezen is in dimensie $< m$. Laat $S \subset V$ de eenheidssfeer zijn gedefinieerd door $\|v\| = 1$. Dit is een compact deel van V, dus $k|_S$ heeft een minimum, dat aangenomen wordt zeg in $e_m \in S$. Met de methode van Lagrange-multiplicatoren volgt dat dan de afgeleiden van de funkties k en $\| \, \|^2$ proportioneel zijn in e_m. Dit betekent voor de met k geassocieerde bilineaire vorm b dat er een $\lambda_m \in \mathbb{R}$ is zodat $b(e_m, v) = \lambda_m g(e_m, v)$ voor alle v. Passen we de induktie-aanname toe op het g-orthogonaal complement van e_m, dan vinden we een basis $(e_1, \dots, e_m)$ orthonormaal voor g waarop k de diagonaalvorm aanneemt. □

Anders dan voor een kwadratische vorm op een vectorruimte zonder verdere struktuur hebben de getallen die we hier vinden op de diagonaal een intrinsieke betekenis als eigenwaarden van een lineaire transformatie: van de lineaire afbeeldingen $\tilde{g} : V \to V^*$ en $\tilde{b} : V \to V^*$ is de eerste een isomorfisme zodat we het endomorfisme $s := \tilde{g}^{-1}\tilde{b}$ van V kunnen beschouwen. Dit endomorfisme is gekarakteriseerd door $b(v, w) = g(v, s(w))$ voor alle $v, w \in V$. In termen van bovenstaande basis is $\tilde{g}(e_i) = x^i$ en $\tilde{b}(e_i) = \lambda_i x^i$, dus $s(e_i) = \lambda_i e_i$. Dit impliceert dat $(e_1, \dots, e_m)$ een basis van eigenvektoren is van s met eigenwaarden $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. We noemen daarom $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ de *eigenwaarden van k* t.o.v. (V, g).

OPGAVE 85. Bewijs dat iedere lineaire transformatie van V die een pseudo-inprodukt behoudt determinant ± 1 heeft.

OPGAVE 86. Bewijs dat twee kwadratische vormen op een inproduktruimte (V, g) door een orthogonale transformatie in elkaar kunnen worden overgevoerd precies dan als ze gelijke eigenwaarden hebben (op volgorde na) t.o.v. (V, g).

OPGAVE 87. Propositie 5.5 geldt niet meer als we alleen maar eisen dat g een pseudo-inprodukt is. Laat bijvoorbeeld zien dat de twee kwadratische vormen $x^2 - y^2$ en xy op $\mathbb{R}^2$ niet gelijktijdig op diagonaalvorm kunnen worden gebracht.

Inprodukt op de uitwendige algebra. Een symmetrische bilineaire funktie op een vectorruimte is eenvoudig voort te zetten tot de uitwendige algebra van die vectorruimte.

LEMMA 5.6. *Zij $g : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische bilineaire funktie.*

(i) *Dan is deze voort te zetten tot één op $\wedge^k V$ die gekarakteriseerd is door*

$$g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, v_1' \wedge \cdots \wedge v_k') := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \operatorname{sign}(\sigma) g(v_1, v_{\sigma(1)}') \cdots g(v_k, v_{\sigma(k)}'),$$

(ii) *Is g een pseudo-inprodukt (resp. inprodukt), dan is deze voortzetting het ook. Preciezer, is $(e_1, \dots, e_m)$ een basis van V waarop g de diagonaalvorm aanneemt, dus $g(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ voor zekere λ_i, dan neemt g ook zo'n vorm aan op $(e_I)_{|I|=k}$: $g(e_I, e_J) = (\prod_{i \in I} \lambda_i)\delta_{I,J}$.*

BEWIJS. (i) De afbeelding $V^k \times V^k \to \mathbb{R}$ die door het rechterlid gedefinieerd is, is multilineair en nul zodra twee nevengeschikte argumenten uit één der factoren V^k gelijk zijn. Toepassen van Opgave 78 geeft de gevraagde voortzetting. De symmetrie volgt gemakkelijk uit de definitie.

Bewering (ii) is gemakkelijk na te gaan. □

OPGAVE 88. Laat zien dat als (V, g) een pseudo-inproduktruimte is van signatuur (p, n), de rechte $\wedge^m V$ positief definiet is als n even en negatief definiet als n oneven.

6. De steroperator

Laat (V, g) een pseudo-inproduktruimte zijn van eindige dimensie m en van signatuur $(m - n, n)$ en onderstel V voorzien van een oriëntatie. Zojuist zagen we dat het pseudo-produkt zich natuurlijk voort laat zetten tot $\wedge(V)$. Volgens Opgave 88 is $\wedge^m V$ positief of negatief al naar gelang n even of oneven is. In ieder geval bevinden zich op deze ééndimensionale vectorruimte twee voortbrengers μ waarvoor $|g(\mu, \mu)| = 1$. Die zijn elkaars antipode, en de oriëntatie van V geeft aan één de voorkeur: die voortbrenger noemen we het *georiënteerde volume-element* van V.

We geven het aan met μ. Concreet: is $(e_1, \ldots, e_m)$ een georiënteerde diagonale basis voor V, dan is

$$\mu = |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m|^{-\frac{1}{2}} e_1 \wedge \cdots \wedge e_m.$$

Beschouw nu voor $\beta \in \wedge^k V$ de afbeelding

$$\alpha \in \wedge^k V \mapsto g(\alpha, \beta)\mu \in \wedge^m V.$$

Dit element van $\mathrm{Hom}(\wedge^k V, \wedge^m V)$ is volgens Opgave 79 gegeven door te wiggen met een uniek element van $\wedge^{m-k} V$. Dit element geven we aan met $\star\beta$. Dus de zo gevonden afbeelding

$$\star : \wedge^k V \to \wedge^{m-k} V$$

is gekarakteriseerd door de eigenschap dat

$$\alpha \wedge \star\beta = g(\alpha, \beta)\mu \text{ voor alle } \alpha, \beta \in \wedge^k V.$$

We zien hieraan dat $\star$ een lineair isomorfisme is. We zien ook dat $\star(1) = \mu$. We berekenen nu $\star(e_I)$, waar I resp. een k-elementige deelverzameling van $\{1, \ldots, m\}$ is. Er moet gelden

$$e_J \wedge \star(e_I) = g(e_J, e_I)\mu$$

voor alle k-elementige J's. Het rechterlid is alleen ongelijk nul als $J = I$. Schrijven we $\star(e_I)$ uit op de basis $(e_K)_{|K|=m-k}$ van $\wedge^{m-k} V$, dan zien we dat $\star(e_I)$ proportioneel moet zijn met $e_{I'}$, waar I' het complement van I is in $\{1, \ldots, m\}$: $\star(e_I) = c_I e_{I'}$ voor een $c_I \in \mathbb{R}$. Invullen geeft dan $c_I e_I \wedge e_{I'} = g(e_I, e_I)\mu$. Ofwel

$$c_I = \mathrm{sign}(I, I')\lambda_I |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m|^{-\frac{1}{2}}.$$

(Hier is (I, I') de permutatie die de rij I, I' op volgorde zet.)

Opgave 89. Ga na dat voor een georiënteerde inproduktruimte V van dimensie m geldt dat $\star\star$ op $\wedge^k V$ werkt als vermenigvuldiging met $(-1)^{k(m-k)}$. Wat geldt in de algemenere situatie van een pseudo-inproduktruimte?

Voorbeeld 6.1. Is $m = 3$, dan krijgen we zo een afbeelding $\star : V \wedge V \to V$, dat in feite de basisonafhankelijke beschrijving geeft van het klassieke uitprodukt: $v \times v' := \star(v \wedge v')$. Dus als (e_1, e_2, e_3) een georiënteerde orthonormale basis is van V, dan is $e_1 \times e_2 = e_3$ enz.

Voorbeelden 6.2. Onderstel dat V een georiënteerde inproduktruimte is. Laat $(e_1, \ldots, e_m)$ orthonormale basis zijn die tevens georiënteerd is. Is $U \subset V$ open, dan laten we $\star$ puntsgewijs werken op de raak- en coraakbundel van U en daarmee op differentiaalvormen. Vele bekende differentiaaloperatoren kunnen in $\star$ en de uitwendige afgeleide worden uitgedrukt:

(i) De divergentie van een vectorveld W op U: We hebben een volumevorm $\mu := \star(1) = dx^1 \cdots dx^m$ en dus een divergentie

$$\mathrm{div}(W) := \star d\iota_W \star (1)$$

Inderdaad is het rechterlid gelijk aan $\sum_i \partial W^i / \partial x^i$.

(ii) De samenstelling div grad geeft de Laplace operator werkend op funkties. Die is ook gelijk aan $\star d \star d$:

$$\begin{aligned}\star d \star df &= \star d\big(\sum_i (-1)^{i-1}\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \cdots \wedge dx^m\big)\\ &= \star\big(\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i} dx^1 \wedge \cdots\cdots \wedge dx^m\big) = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i}\end{aligned}$$

Evenals in geval (i) komt hier $\star$ twee keer voor in de definitie en dat maakt dat de divergentie en de Laplace operator niet van de oriëntatie afhangen. Dit is anders in het volgende voorbeeld.

(iii) Voor het geval $m = 3$ hebben we de operator rot van vectorvelden naar vectorvelden: door met behulp van het inprodukt vectorvelden met differentialen te vereenzelvigen wordt dit een operator van differentialen maar zichzelf, en dan is

$$\mathrm{rot}(\alpha) = \star d\alpha.$$

Want

$$\star d(f dx + g dy + h dz) = \star\Big(\big(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\big) dy \wedge dz + \cdots\Big) = \big(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\big) dx + \cdots .$$

7. Affiene en Euclidische ruimten

Een affiene ruimte is in wezen een vectorruimte zonder oorsprong: twee punten van zo'n ruimte bepalen een verschilvector, maar een enkel punt is niet als vector op te vatten. Anders gezegd er kan over vectoren 'geschoven' worden. Preciezer:

Definitie 7.1. Zij V een vectorruimte. Een *affiene ruimte over* V is een verzameling $\mathbb{V}$ waarop de additieve groep van V werkt op zodanige wijze dat bij ieder paar elementen $O, P \in \mathbb{V}$ precies één vector $v \in V$ bestaat die O in P overvoert. We schrijven in dat geval $v + O = P$ en $v = P - O$. (NB.: een som $O + P$ is hier niet gedefinieerd.) Voor een vaste $v \in V$ heet de afbeelding $P \in \mathbb{V} \mapsto v + P \in \mathbb{V}$ de *verschuiving* (of *translatie*) over v. We noemen daarom V de schuifruimte van $\mathbb{V}$. De *dimensie* van een affiene ruimteeen affiene ruimte is die van zijn schuifruimte.

Dus voor iedere $O \in \mathbb{V}$ is de afbeelding $v \in V \mapsto v + O \in \mathbb{V}$ een bijectie. Op deze manier kunnen we $\mathbb{V}$ opvatten als een vectorruimte met oorsprong O.

Natuurlijk is een vectorruimte op te vatten als een affiene ruimte over zichzelf.

Voorbeeld 7.2. Is $f : V \to W$ een lineaire afbeelding van vectorruimten, dan is voor iedere $w \in W$, $V_w := f^{-1}(w)$ geen lineaire deelruimte (tenzij $w = 0$), maar wel een affiene ruimte over $V_0 = \mathrm{Ker}(f)$ (want het verschil van twee vectoren in V_w is in V_0).

We hebben voor de hand liggende begrippen van affiene deelruimte en affienlineaire afbeelding: Is $\mathbb{V}$ een affiene ruimte over V, dan heet een deelverzameling $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ een *affiene deelruimte* als die de baan is van een deelvectorruimte $W \subset V$ (dus $\mathbb{W} = O + W$ voor een—of willekeurig welke—$O \in \mathbb{W}$). Een afbeelding $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ van affiene ruimten heet *affien-lineair* als er lineaire afbeelding van schuifruimtes $f : V \to W$ is waarvoor geldt: $F(v+O) = f(v) + F(O)$ voor alle $v \in V$ en $O \in \mathbb{V}$ (of equivalent daarmee, waarvoor $F(Q) - F(P) = f(Q - P)$). Deze lineaire afbeelding is natuurlijk uniek en heet het *lineaire deel* van F (we zouden die ook de afgeleide van F kunnen noemen).

Opgave 90. Zij $\mathbb{V}$ een affiene ruimte met schuifruimte V.

(a) Zijn $P, Q \in \mathbb{V}$, en $\lambda, \mu \in K$ zo dat $\lambda + \mu = 1$, dan definieren we $\lambda P + \mu Q := P + \mu(Q - P)$. Bewijs dat dit ook gelijk is aan $Q + \lambda(P - Q)$. Bewijs dat de verzameling van al zulke punten een affiene deelruimte is met schuifruimte het opspansel $Q - P$.

(b) Generaliseer het voorgaande tot een interpretatie van een eindige lineaire combinatie $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$ met $P_i \in \mathbb{A}$, $\lambda_i \in K$ en $\sum_i \lambda_i = 1$ als een element van $\mathbb{V}$. (Als $K = \mathbb{Q}$, dan heet $\sum_i \frac{1}{n} P_i$ het *zwaartepunt* van $(P_i)_i$.)

(c) Onderstel nu $K = \mathbb{R}$. Laten we in (b) iedere λ_i alleen over $[0, 1]$ lopen, dan geven we de zo gevonden verzameling aan met $[P_1, \ldots, P_n]$. We noemen dit het *convex omhulsel* van $(P_i)_i$. Probeer te bewijzen dat voor iedere $Q \in \mathbb{V} - [P_1, \ldots, P_n]$ een affien-lineaire funktie $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ bestaat met $\phi(P_i) \geq 0$ en $\phi(Q) < 0$ (dit is lastiger dan het lijkt).

Opgave 91. Laat $\mathbb{V}$ een affiene ruimte zijn en zij W een deelruimte van zijn schuifruimte V. Bewijs dat de banenverzameling $\mathbb{V}/W$ van W in $\mathbb{V}$ de structuur heeft van een affiene ruimte over V/W.

Opgave 92. Laat $\mathbb{V}$ een affiene ruimte zijn van eindige dimensie n met schuifruimte V. Bewijs dat de verzameling $\mathrm{Aff}(\mathbb{V}, K)$ van affien-lineaire funkties $\phi : \mathbb{V} \to K$ een vectorruimte is van dimensie $n + 1$. Deze bevat als bijzonder element de constante $\mathbf{1} : \mathbb{V} \to K$. We hebben nu een afbeelding $\mathrm{Aff}(\mathbb{V}, K) \times \mathbb{V} \to K$, $(\phi, P) \mapsto \phi(P)$. Bewijs dat de zo gedefinieerde afbeelding van $\mathbb{V}$ in de duale van $\mathrm{Aff}(\mathbb{V}, K)$ een affien-lineaire injectie is. Toon aan dat het beeld het hypervlak in $\mathrm{Aff}(\mathbb{V}, K)^*$ is van lineaire functies $\mathrm{Aff}(\mathbb{V}, K) \to K$ die op $\mathbf{1}$ de waarde 1 aannemen.

Euclidische ruimten. Een *Euclidische ruimte* is een affiene ruimte waarvan de schuifruimte een reële eindigdimensionale vectorruimte is die voorzien is van een inproduct. De klassieke Euclidische meetkunde heeft betrekking op het geval dat de dimensie twee is (we spreken dan van een *Euclidisch vlak*) en de ons vertrouwde ruimte is er een van dimensie drie.

Een Euclidische ruimte heeft een afstandsbegrip (metriek) gedefinieerd door $d(P, Q) := ||Q - Q||$ en wordt daarmee eem metrische ruimte. Er is ook een hoekbegrip: zijn O, P, Q punten zodat $P \neq O \neq Q$, dan is de hoek $\angle(OP, OQ) \in [0, \pi]$ gekarakteriseerd door

$$\cos(\angle(OP, OQ)) = \frac{\langle P - O, Q - O \rangle}{||P - O||.||Q - O||}.$$