Grothendieck: de nieuwe algebraïsche meetkunde

Door: Frans Oort

Inleiding

Bij de studievereniging A-Eskwadraat hoort al bijna 40 jaar een blad, de Vakidioot. Hierin staan vakartikelen en andere artikelen die interessant zijn voor de studenten natuurkunde, wiskunde, informatica en informatiekunde van de Universiteit Utrecht. Dat was de wervende tekst waarmee de redactie mij vroeg om en artikel voor dit mooie blad te schrijven. Dat doe ik maar al te graag, omdat ik weet dat het stimulerend kan zijn voor studenten om iets te lezen over de achtergronden van hun prachtige vak. *... we naar vak artikelen die gaan over wat er in een bepaald vakgebied 40 jaar geleden voor belangrijks gebeurd is en hoeveel dat nu nog van invloed is.* Prachtig. Ik probeer een beschrijving te geven van de revolutionaire en stormachtige ontwikkeling die de algebraïsche meetkunde doormaakte aan de hand van **Alexander Grothendieck** in de jaren 1958 – 1970. We zien:

- Het ontwikkelen van een fundamenteel nieuwe opzet van een heel vakgebied.
- De mens die daar de spil in is heeft later een ongelukkig leven.

Wat daar aan vernieuwende gedachten geproduceerd werd is verbazingwekkend. Prachtige verbanden tussen schijnbaar disjuncte gebieden. Oplossing van oude problemen. En een menselijk drama wat daar doorheen speelt, het leven van Grothendieck in al zijn facetten.

Hier is een korte samenvatting van de onderwerpen behandeld in 1 – 6.

1 Ik probeer iets te zeggen over persoonlijke achtergronden in het leven van Alexander Grothendieck.

2 Dan ga ik in op de manier waarop een wiskundige werkt. In een schetsmatig beeld geef ik aan wat de grote kracht was van de werkwijze van Grothendieck, en wat de methode is die andere wiskundigen in staat stelt om ook resultaten te boeken.

3 & 4 In de topologie wordt de fundamentaal groep gedefiniëerd. In de algebra de Galois groep. Ik schets deze (schijnbaar zo ver van elkaar liggende) begrippen.

5 & 6 En ik besluit met het beschrijven van een resultaat zoals dat door Grothendieck bereikt werd. Veel mensen denken dat zijn gedachten wereld zo abstract en moeilijk te begrijpen is dat welke beschrijving daarvan dan ook vele tientallen pagina's moeilijke wiskunde hoort te beslaan. Ik probeer juist aan dít lezers-publiek te laten zien dat de essentie van Grothendieck's werkwijze heel goed te vertellen en uit te leggen is. Ik doe dat aan de hand een voorbeeld, de *monodromie-stelling*, waar de vernieuwende opzet van Grothendieck van het begrip "fundamentaalgroep" ons de sleutel in handen geeft om een moeilijk en diep resultaat te bewijzen met behulp van eenvoudige lineaire algebra. Nou ja, dat beschrijft maar een klein deel van de essentie van zijn werk; ik hoop dat het een tipje van de sluier oplicht.

1. Iets over leven en werk van Alexander Grothendieck

Het leven van Grothendieck is vol met drama, fascinerende geschiedenis en grootse momenten.[1]

Hij werd geboren in Berlijn in 1928. Zijn moeder Hanka Grothendieck leefde in bittere armoede. Zijn biologische vader Sascha Schapiro had een leven vol met gevaren: gevangen als opstandeling tegen het Sovjet regime, bij de vlucht een arm verloren, ontmoette de even anarchistische Hanke in Berlijn; daarna vluchtte hij voor de nazi's naar Frankrijk, en probeerde daar de kost te verdienen als fotograaf. Hanka liet Alexander in 1933 bij een familie in Hambrug achter en ook zij vertrekt naar Parijs. Maar Sacha vocht mee in de Spaanse burgeroorlog, en stierf later in een nazi concentratie kamp. Alexander gaat in 1939 naar zijn moeder. De oorlog brengen Hanka en Alexander door in een Frans interneringskamp (als ongewenste vreemdelingen). Lees vooral de fascinerende beschrijving van die tijd, en van hun leven in [4].

Na de oorlog studeert Alexander wiskunde, en al gauw blijkt zijn grote talent. In zijn proefschrift in 1953 vernieuwt hij op fundamentele wijze de functionaal analyse. Als buitenlander heeft hij moeite om een positie in Frankrijk te krijgen. Hij raakt daarna onder de indruk van een vermoeden van André Weil, een probleem analoog aan het Riemann vermoeden. Weil geeft aan welke nieuwe structuur er zou moeten gemaakt worden om dit vermoeden te bewijzen. Weil zelf maakt een nieuwe opzet van de algebraïsche meetkunde, en bewijst een belangrijk speciaal geval. Grothendieck is gefascineerd en besluit die veelomvattende, nieuwe theorie te ontwikkelen. In 1958 geeft hij een voordracht op het International Congress of Mathematicians, ICM 1958, waar hij de grote lijnen van zijn plan schetst. Ik was er bij en heb er helemaal niets van begrepen. Maar er was iemand op de eerste rij, die blijk gaf te kunnen volgen wat Grothendieck van plan was. Dat bleek Jean-Pierre Serre te zijn.

In 1959 wordt er een nieuw instituut opgericht IHES, speciaal om Grothendieck de gelegenheid te geven een betrekking te hebben, en daarin zijn grote plannen gestalte kunnen geven. Dat instituut (in een dorpje even ten zuiden van Parijs), bestaat nog steeds, en is het centrum van veel belangrijke ontwikkelingen. In zijn vruchtbare jaren heeft Grothendieck veel contact met Serre, zowel per telefoon, als in gesprekken, als in brieven. Het is duidelijk dat Serre niet alleen als klankbodem dient, maar vooral ook als diegene die bij alle plannen van Grothendieck de voorbeelden geeft die de realiseerbaarheid ervan aangeven (*toujours lui* schrijft Grothendieck daar over).

Figuur 1: Alexander Grothendieck (midden) in 1970 (bron: Oberwolfach Photo Collection).

In de periode 1958 - 1970 presteert Grothendieck iets wat haast niet te geloven is. Hij schrijft vele duizenden bladzijden heel abstract wiskunde. Hij geeft vele jaren een seminarium, waar hij de tek-

[1] Hier vind je een beschrijving, en verwijzingen: `http://people.math.jussieu.fr/~leila/grothendieckcircle/biographic.php`.

sten levert, meer dan 10 afleveringen van elk vele honderden pagina's, soms uitgewerkt en voorgedragen door mensen die met hem samen werken. Hij schetst in voordrachten in Séminaire Bourbaki dingen die hij al bewezen heeft en die hij later hoopt uit te werken, en hoe hij denkt dat de ontwikkelingen verder zullen gaan. We zijn nog steeds bezig wat hij toen geschreven heeft te begrijpen. Het is duidelijk dat in het begin van de 60-er jaren dit allemaal in concept in zijn hoofd reeds gestalte had gekregen. Op het ICM 1966 in Moskou ontvangt Grothendieck de "*Fields Medal*" (een Nobel prijs is er niet voor wiskundigen, dit is de hoogste eer, die eenmaal in de 4 jaar aan 2 of aan 4 jonge wiskundigen wordt toebedeeld).

Hier is een voorbeeld van de grondigheid en het formidabele inzicht van Grothendieck. Serre worstelt in een van zijn bewijzen met een probleem, wat er ruwweg op neer komt dat een quotiënt afbeelding van algebraïsche groepen niet een locaal triviale vezeling hoeft te zijn in de Zariski-toplogie. Dan ziet hij dat na terug trekken met een eindige afbeelding dat wel het geval is, en een halve pagina verder is het probleem opgelost. En daar laat Serre het verder bij. Grothendieck neemt dat probleem op: je moet overdekkingen van een topologische ruimte niet definiëren door een vereniging van open deelverzamelingen, maar door zulke deelverzamelingen met daaroverheen steeds een ander ruimte. Het begrip "overdekking" in de topologie gaat op de helling. Grothendieck wijdt er een heel seminarium aan, een heel jaar, vele honderden bladzijden abstracties. Het idee van Serre wordt in al zijn algemeenheid uitgewerkt, deels omdat het de benodigde middelen kan leveren voor het bewijs van de Weil vermoedens, deels omdat het ontwikkelen van zo'n prachtig groot bouwwerk nu eenmaal de voorkeur had van Grothendieck boven het bestuderen van speciale gevallen. Het bleek vele toepassingen te hebben, bij voorbeeld in de logica; onverwachts; moeilijk te begrijpen; visionair. Een indrukwekkend bouwwerk. Nu nog steeds een techniek behorende tot de dagelijkse gereedschapskist van de algebraïsch meetkundige.

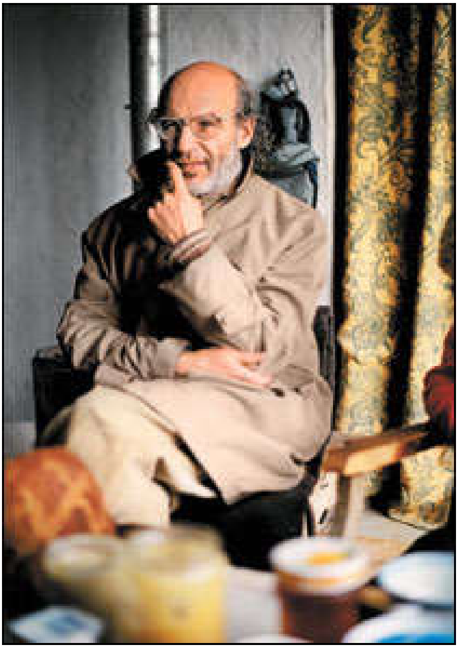
Al in die jaren zijn er tekenen dat Grothendieck dwars ligt. Hij richt een beweging op, "*Survivre*", die onder meer alle landen wil overtuigen bewapening op te geven. Het is vol met idealisme. Maar zo briljant als Grotendieck was als wiskundige, zo weinig kennis van zaken en overzicht heeft hij in sociale en politieke zaken.

Steeds vaker heeft hij aanvaringen met de directie van zijn instituut.

In 1970 blijkt dat het IHES deels gefinancierd wordt met behulp van geld uit militaire bronnen. En Grothendieck neemt ontslag. In de jaren tussen 1970 en nu vervreemdt hij steeds meer van de wereld. Hij schrijft vele duizenden bladzijden van memoires, vol met vreselijk venijn, vele honderden bladzijden met ideeën hoe de wiskunde zich verder zou moeten ontwikkelen (veel daarvan is nog niet gepubliceerd, en zeker nog niet begrepen). Zijn grote droom, het bewijzen van de Weil vermoedens, wordt gerealiseerd door een leerling van hem, Pierre Deligne; maar Grothendieck heeft daar weinig waardering voor. Nu weet bijna niemand meer waar hij woont (ergens in de Pyreneeën). Hij weigert nu contact in het algemeen.

Het lijkt een droevig bestaan.

Kortom: een heel moeilijk jeugd – altijd als vreemdeling levend in eigen land – als student al indrukwekkende resultaten – als wiskundige eigenhandig een heel nieuw fundament leggend voor een heel vakgebied, met indrukwekkende resultaten, voor ons een reeks gereedschappen ontwikkelend die nog heel lang gebruikt zullen worden – steeds meer ontsporend in sociaal opzicht – met een leven nu wat wij toch als troosteloos ervaren. Dit jaar werd hij 80 jaar oud. Maar als je denkt hoe hij nu leeft, daar wordt je niet vrolijk van.



Figuur 2: Alexander Grothendieck in de jaren '90 (bron: Die Zeit).

Een paar gedachten van mij:

1. Het komt voor dat iemand in het ene aspect van het leven zo briljant is, terwijl hij niet datzelfde indrukwekkende overzicht heeft in een ander gebied. Soms wordt die gedachten-fout wel gemaakt: omdat iemand goed is het ene "moet" hij ook wel goed zijn in andere dingen. Loop niet in die valkuil. Hoe vaak heb ik niet een student gezien die iets niet begreep of iets niet kon, maar dan juist in iets anders vreselijk goed was. Of omgekeerd. Altijd mooi om te zien wat voor mogelijkheden mensen hebben.
2. Soms wordt geprobeerd om gedrag van Grothendieck in zijn latere leven te zien als consequentie van een moeilijke jeugd. Een dergelijk redenering vind ik gevaarlijk. Er is mogelijk een verband, maar niet een logische implicatie. Er zijn heel wat mensen met een moeilijke jeugd die stabiele en vriendelijke mensen zijn.
3. Wiskundigen genieten van de schoonheid van hun vak, en daardoor zijn het vaak zulke vriendelijke en tevreden mensen. De gedrevenheid van Grothendieck in zijn productieve jaren lijkt zich haast tegen hem gekeerd te hebben in zijn latere jaren. Ik denk dat een persoonlijkheidsstructuur niet een logisch gevolg is van het werken aan de wiskunde, al kan het er wel mee samen hangen.
4. Ik ken vele bevlogen, aardige en heel stabiele wiskundigen. Allicht, als je met zo'n mooi vak omgaat. De verkeerde conclusie "een wiskundige, dus een nerd" klopt bijna nooit.

2. Hoe werkt een wiskundige?

Stel je wordt geconfronteerd met een probleem of een vraag P. Dan zijn er *twee verschillende manieren* om naar een oplossing te zoeken (ter wille van de duidelijkheid chargeer ik wat, in de praktijk passen wiskundigen vaak een mengsel van de beide methoden toe).

Methode (G) Generaliseer het probleem naar AP. Ontwikkel vervolgens een algemene theorie, een "machine", een logische stelsel van redeneringen M. Voer het probleem AP in M in. En wacht af wat er gebeurd. Als er een goed antwoord uitrolt, dan ben je erg tevreden. Als er geen antwoord uitrolt, dan ben je vastgelopen . – Grothendieck paste deze methode veel toe. Het grote voordeel is dat je door iets te generaliseren je hinderlijke details en bijverschijnselen uitschakelt. Als je maar slim genoeg bent dan zie je essentie van de structuur, en kom je tot veel algemenere opvattingen en meer nieuwe inzichten dan voorheen. – Lees vooral ook een interview met Yuri Manin [2], die b.v. schrijft: "I see the process of mathematical creation as a kind of recognizing a preexisting pattern". En in die visie spelen vermoedens en concrete problemen vaak niet een erg grote rol.

Voordeel. Nieuwe, abstracte methoden worden ontwikkeld. De essentie van een structuur wordt niet versluierd door details.

Nadeel. Soms wordt het contact met "de werkelijkheid" zo schimmig dat methoden lijken te bewijzen dat "de lege verzameling leeg is" (ik zag een keer Grothendieck ploeteren aan het bewijs van een heel algemene bewering, maar Serre gaf met een eenvoudig voorbeeld aan dat die bewering onjuist was).

Methode (M) Bekijk het probleem P van alle kanten. Maak voorbeelden. Reken speciale gevallen door. En probeer zo een indruk te krijgen van de structuur van de materie. Soms zie je dan dat een deel van het probleem past in een algemene theorie. Dan ploeter je verder tot alle gevallen herleid kunnen worden tot die oplosbare gevallen, en je kijkt tevreden terug op de bereikte resultaten.

Voordeel. Je blijft met beide benen op de grond staan. In elke stap van het proces ben je bezig met dat probleem. Concrete voorbeelden behoeden je soms voor het doen zinloze uitspraken, voor het inslaan van doodlopende wegen. En je mag ook best abstracte methoden toepassen.

Nadeel. Doordat je "laag bij de grond" blijft mis je soms algemene principes. Je loopt het gevaar lange berekeningen te doen die overbodig zijn in een algemenere theorie.

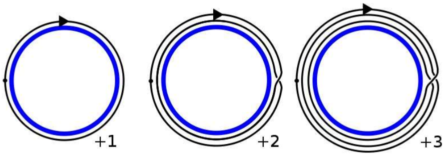
Advies aan studenten. Als je bezig bent met creatieve wiskunde (oplossen van een vraagstuk, werken aan een scriptie, het oplossen van een moeilijk probleem), probeer dan een mengsel van deze beide problemen. Aarzel niet om af en toe zo maar een wilde algemene theorie te ontwikkelen of proberen toe te passen. Maar aarzel ook niet om dan maar eens een moeilijk speciaal geval door te rekenen (sommige wiskundigen vinden dat een goed wiskundige niet passen, maar trek je daar niets van aan), om zodoende de gevoel te krijgen waar de essentie van het probleem te vinden is. Probeer een tegenvoorbeeld te vinden. Als dat niet lukt, gebruik dan die "obstructie" voor het vinden van een tegenvoorbeeld als argument van een bewijs, en zo om-en-om, in de methode (M).
We gaan methode (G) illustreren met behulp van een bewijs van de "monodromie-stelling". Eerst onwikkelen van een algemene theorie (zo prachtig mooi in dit geval). Dan het probleem invoeren in de machine, en de oplossing rolt er uit.

3. De topologische fundamentaalgroep + toepassing: de Brouwer dekpunten-stelling.

Veronderstel dat we een *topologische ruimte* T hebben, met een gemarkeerd punt $t \in T$. Daaraan voegen we toe een groep $(T, t) \mapsto \pi_1^{\mathrm{top}}(T, t)$, de topologische fundamentaal groep. Lussen in T worden beschouwd: een afbeelding van het reële interval $\gamma : [0, 1] \to T$ met $\gamma(0) = t = \gamma(1)$. Twee lussen heten "homotoop" als ze continu in elkaar kunnen worden overgevoerd. Homotopie-equivalentie klassen van zulke lussen vormen de elementen van

de fundamentaalgroep. De inverse: de lus in omgekeerde richting doorlopen. Compositie in de groep: twee lussen achter elkaar doorlopen. Voor de theorie, zie een tekstboek over topologie. – Prachtig: aan een topologische ruimte met basispunt wordt een "invariant" gehecht, een groep; die vertelt iets over de topologische structuur, en vaak is die groep eenvoudiger te hanteren dan het topologische object waar het vandaan komt.
Een voorbeeld. Neem $T = S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, de cirkel met straal 1 in het complexe vlak, met basis punt $t = 1$. Intuïtief is duidelijk:

$$\pi_1^{\mathrm{top}}(S^1, t) = \mathbb{Z}.$$



Figuur 3: Voorbeelden van elementen van $\pi_1^{\mathrm{top}}(S^1, t)$ (bron: Wikimedia Commons).

Hierin tel je hoe vaak een lus om de cirkel heenloopt, zeg met de wijzers van de klok mee. Een bewijs dat de bovenstaande formule juist is vergt wel wat werk.

Stelling 1 (De dekpunten-stelling van Brouwer)**.** *Beschouw de cirkel-schijf*

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

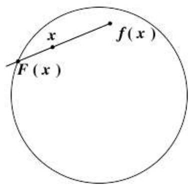
Een continue afbeelding $f : D \to D$ heeft een dekpunt, d.w.z. er is een $d \in D$ met $f(d) = d$. (Stelling, genoemd naar de Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer.)

Deze stelling[2] heeft veel toepassingen. Wat is het "glibberige" van het probleem? De verzameling van alle continue afbeeldingen f zoals in de stelling is heel erg groot. Hoe werk je ooit concrete gevallen uit?

Bewijs. Eerst merken we op dat $\pi_1^{\mathrm{top}}(D, t) = \{e\}$.
Veronderstel dat f dekpunt zou hebben. Voor elke $x \in D$ trek de halfrechte H die begint in $f(x)$ en vervolgens door x gaat; omdat $f(x) \neq x$ is deze halfrecht goed gedefiniëerd. Loop vanuit $f(x)$ naar x en loop (eventueel) verder tot je de cirkel snijdt in het punt $F(x)$. Bewijs dat de afbeelding $F : D \to S^1$ die je zo krijgt continu is. Verder is duidelijk dat voor elke $x \in S^1$ geldt: $F(x) = x$. We krijgen

$$h := F \circ i : \; S^1 \hookrightarrow D \to S^1$$

met $h = \mathrm{id}_{S^1}$.



(Hier krijg je toch al het gevoel dat dit niet kan, maar hoe bewijs je dat?)
Het effect van h op $\pi_1^{\mathrm{top}}(S^1, t)$ is

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} = h_* : (\pi_1^{\mathrm{top}}(S^1, t) \cong \mathbb{Z} \\ \to \pi_1^{\mathrm{top}}(D, t) = \{e\} \\ \to \pi_1^{\mathrm{top}}(S^1, t) \cong \mathbb{Z}) = 0 \end{aligned}$$

Deze tegenspraak bewijst de stelling. □

4. De Galois groep + een toepassing: Abel - Ruffini.

Neem een lichaam K, en een polynoom $F = F(T) \in K[T]$. De verzameling van nulpunten van F in een algebraïsche afsluiting $k = \overline{K}$ heeft symmetrie-eigenschappen: beschouw automorfismen

[2] Zie bijvoorbeeld: `http://en.wikipedia.org/wiki/Brouwer_-fixed_-point_-theorem`.

van k die elementen van K invariant laten en die nulpunten van F permuteren. Bij voorbeeld $K = \mathbb{Q}$ en $F = T^2 + 5$; de nulpunten zijn $\pm\sqrt{-5}$ en complexe conjugatie verwisselt die twee nulpunten. Bij voorbeeld $K = \mathbb{Q}$ en $F = T^3 - 2$; wat zijn de nulpunten? welke permutaties komen voor? Het antwoord op deze vragen (en op veel andere problemen die hiermee samenhangen) worden gegeven door Galois theorie.[3]

Figuur 4: Een portret van Évariste Galois (bron: Wikimedia Commons).

In de Galois theorie wordt het kleinste lichaam L bestudeerd dat K en de nulpunten van F bevat. De groep van automorfismen van L over K (automorfismen van L die elementen van K invariant laten) is eindig en permuteert de nulpunten van F. De structuur van deze groep beschrijft eigenschappen van F. (Wat is die groep voor het geval $F = T^3 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$?)
Met behulp van deze theorie is het niet moeilijk om een prachtig resultaat van Ruffini en van Abel te beschrijven en te bewijzen. Neem en "willekeurig"polynoom $F \in K[T]$. Kun je de nulpunten van F beschrijven met behulp van worteltekens? We kennen allemaal de "$A - B - C$ formule" voor een kwadratische vergelijking. Cardano beschreef een dergelijke formule voor polynomen van graad 3. Ook is het mogelijk om een dergelijke formule op te schrijven voor een polynoom van graad 4.

Stelling 2 (Abel, Ruffini)**.** *Voor $n \geq 5$ is er niet een formule opgebouwd met behulp van worteltekens die voor elk polynoom $F \in \mathbb{Q}[T]$ van graad n de nulpunten uitrekent.*

Een andere formulering: voor $n \geq 5$ is er een $F \in \mathbb{Q}[T]$, polynoom van graad n over een lichaam $\mathbb{Q}$, waarvoor de Galois groep van F niet oplosbaar is; voor een dergelijk polynoom zijn de nulpunten niet op te schrijven in een formule met worteltekens.
De Galois theorie heeft een ongelooflijke invloed gehad op het systematiseren en begrijpen van grote delen van de wiskunde.

Stop. Lees niet verder, maar denk eerst na over de vraag: *wat is het verband tussen de toplogische fundamentaal groep en de Galois groep*?

Het lijken begrippen in heel verschillende werelden. We zullen zien dat deze klassiek begrippen, dingen die we goed dachten begrijpen door Grothendieck in een heel ander perspectief geplaatst zijn. En dan komt er een techniek beschikbaar die moeilijke dingen eenvoudig maakt.

5. De kern van de gedachten wereld van Grothendieck: schema's.

Uitgaande van de variëteit construeren we een ring. Voor een lichaam k wordt de affiene ruimte van dimensie n gegeven als $\mathbb{A}^n = k^n$. Een affiene algebraïsche variëteit $V \subset \mathbb{A}^n$ wordt gegeven als nulpunten-verzameling van een stelsel polynoom vergelijkingen $f_1 = 0 = f_2 = \cdots = f_s$ in de coördinaten $T_1, \cdots, T_n$ van $\mathbb{A}^n$. Dit werkt goed over een algebraïsch

[3] Voor de droevige levensgeschiedenis van Évariste Galois zie bij voorbeeld: `http://en.wikipedia.org/wiki/%C3%89variste_Galois`.

gesloten lichaam k. (In andere gevallen moet je meer structuur aanbrengen.) We kunnen “reguliere functies” op V bekijken. Dat zijn quotiënten van polynomen modulo I, het ideaal voortgebracht als $I = (f_1, \cdots, f_s)$, zodanig dat een dergelijke quotiënt in elk punt $P \in V$ geschreven kan worden als F/G met $G(P) \neq 0$. Bewezen kan worden: *de ring van functies regulier op* V is gelijk aan $k[V] = R = [T_1, \cdots, T_n]/I$.

Uit die ring kan de variëteit teruggevonden worden. Omgekeerd kan uit R de variëteit V teruggevonden worden: elk punt van V correspondeert met een maximaal ideaal van R. Een voorbeeld.

Voor $V = \mathbb{A}^1$ geldt $R = k[T]$ en het punt $P \in V$ gegeven door zijn coördinaat t correspondeert met het ideaal $(T - t) \subset R$. Eenvoudige opgave: bewijs dat voor k algebraïsche gesloten de toevoeging $t \mapsto (T - t)$ een bijectie geeft tussen V en de verzameling van maximale idealen van $R = k[T]$.

Stelling 3. *Er is een anti-equivalentie van categorieën*

$$\{\text{affiene variëteit over } k\}^0 \xrightarrow{\sim} Alg_k$$
$$V \mapsto k[V]$$

Hier is Alg_k de categorie van k-algebras van eindig type die geen nuldelers hebben.

Het idee dat een ruimte teruggevonden kan worden als verzameling van bepaalde idealen in de ring van functies op die ruimte was aan Grothendieck al bekend uit de lineaire analyse.
Aha. Je kunt dus een meetkundig object beschrijven als verzameling van priemidealen in een ring. (Het blijkt technisch van belang te zijn niet alleen maar maximale idealen te beschouwen.) Kunnen we omgekeerd uit die ring de variëteit V terug vinden?

Definitie 1. *Voor een commutatieve ring R met $1 \in R$ schrijven $X = \mathrm{Spec}(R)$ voor de verzameling van priem idealen $I \subset R$ met $1 \notin I$. Het “spectrum” van de ring R.*

Voor elk element $f \in R$ schrijven we U_f voor de verzameling van alle I met $f \notin I$ (de verzameling waar f “niet de waarde 0 heeft”.) Het blijkt dat $\{U_f \mid f \in R\}$ een subbasis vormt voor een topologie op X. (Dit was al bekend in de algebraïsche meetkunde: de “Zariski topolgie”.)
Voor $P \in X$, gegeven door het priemideaal $I_P = I \subset R$ schrijven we

$$\mathcal{O}_P = R_I = \{f/g \mid f, g \in R, g \notin I\}.$$

We hebben nu

Spec(R):
een ruimte,
met een topologie, en
een verzameling van “functies”,

dit noemen we een schema. De theorie kan opgezet worden.

Stelling 4. *Er is een anti-equivalentie van categorieën*

$$Rg \xrightarrow{\sim} \{\text{affien schema}\}^0$$
$$R \mapsto \mathrm{Spec}(R)$$

Hier is Rg de categorie is van commutatieve ringen met 1.

Fantastisch toch? Een eenvoudig idee. Dan dat ontdoen van alle franje: geen condities aan R opleggen, hele rare commutatieve ringen mogen voorkomen. Het blijkt dat er diepe toepassingen zijn, dat dit de goede manier is om tegen de objecten aan te kijken.
Bovendien kunnen we heel andere vakgebieden nu erbij betrekken. Bij voorbeeld, de ring $\mathbb{Z}$ is toegestaan, de getaltheorie gaat meespelen.

Een voorbeeld $R = \mathbb{Z}[T]$. Dat kun je intuïtief aanvoelen als het product van een 1-dimensionale affiene ruimte met $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. We hebben plotseling een object waar "in de ene richting" je meetkunde kunt doen, en "in de andere richting" getaltheorie. We komen hierop terug in de volgende paragraaf.
Veel van deze begrippen waren deels al bekend (Weil, Zariski, Serre, en vele anderen). Maar de sprong naar de grote abstractie, de durf om het zo te doen, je vrij maken van vooroordelen, en het visionaire inzicht dat dit leidt tot de kern van de zaak is de grote bijdrage van Grothendieck. – Het lijkt een eenvoudig spel, maar wie de vele pagina's theorie ziet, geschreven door Grothendieck, nodig om dit begrip in volle algemeenheid te ontwikkelen en toe te passen, weet wel beter. En dan komt het karakter van Grothendieck boven: alles tot in de meest vergevorderde abstractie uitwerken, en alles opzetten met zo min mogelijk beperkende voorwaarden.
Zie [1], waar in het eerste hoofdstuk Grothendieck al meer dan 200 bladzijden nodig heeft om het begrip een affien schema in alle abstracties uit te leggen. In totaal zijn er 8 delen van EGA verschenen, in totaal ongeveer 1600 bladzijden, een deel van de eerste 4 hoofdstukken van de oorspronkelijk geplande 13 hoofdstukken van de "*Eléments de géométrie algébrique*".

6. De Grothendieck fundamentaalgroep + een toepassing: bewijs van de monodromie-stelling.

Lemma 1. *Zij $K = \mathbb{Q}(T)$. Beschouw $f = X^n - T$, met $n \in \mathbb{Z}_{>1}$. Beschouw $L \supset \mathbb{Q}(T)$, het kleinste lichaam dat alle nulpunten van f bevat. Dan is $L = \mathbb{Q}(\zeta_n, \sqrt[n]{T})$; hier is ζ_n een primitieve n-de eenheidswortel.*
Schrijf

$$K = \mathbb{Q}(T) \subset E = \mathbb{Q}(\zeta_n, T) \subset L.$$

Er is er een exacte rij:

$$\begin{aligned} 1 \to N := \mathrm{Aut}(L/E) \cong \mathbb{Z}/n \\ \longrightarrow \mathrm{Aut}(L/K) = G \\ \longrightarrow H := \mathrm{Aut}(E/K) \cong (\mathbb{Z}/n)^* \to 1 \end{aligned}$$

Hier is $(\mathbb{Z}/n)^*$ de multiplicatieve groep van eenheden in de ring $\mathbb{Z}/n$. Door conjugatie in G werkt $H = \mathrm{Aut}(E/K)$ op de commutatieve normaaldeler $N \subset G$. Zo komt er een homomorfisme:

$$H \cong (\mathbb{Z}/n)^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(N) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n) \cong (\mathbb{Z}/n)^*$$

Bewering: Dit is een isomorfisme.

Schrijf een bewijs uit. Het is niet moeilijk, als je eenmaal de notatie begrijpt. Dit eenvoudige resultaat is het hart van het bewijs wat straks volgt.
Schrijf N multiplicatief, $N =< \tau >$ met $\tau^n = 1$. Dan is het resultaat van het lemma in deze taal: zij $\sigma \in G$ met $\sigma \mapsto (k \bmod n) \in (\mathbb{Z}/n)^* \bmod n$; dan is

$$\sigma^{-1} \cdot \tau \cdot \sigma = \tau^k.$$

De *monodromie-stelling* zegt iets over de eigenwaarden van de monodromie-matrix. Helaas, het zou te ver voeren om een complete, sluitende definitie te geven. Om het probleem aan te geven: in een familie van variëteiten geparametriseerd door de cirkel, of door de eenheids schijf zonder oorsprong, levert eenmaal rondwandelen een substitutie op, bij voorbeeld op een homologie groep van de vezels. Dat geeft een matrix. Er waren allerlei moeilijke bewijzen om te laten zien dat *de eigenwaarden van die matrix eenheidswortels zijn.*
Grothendieck formuleert een veel algemenere theorie, die de toplogische fundamentaalgroep en de Galois groep in een concept onderbrengt. We geven als voorbeeld $R = \mathbb{Q}[T, \frac{1}{T}]$, en we proberen een fundamentaal groep te definiëren voor

$X = \mathrm{Spec}(R)$. Een (eindige) onvertakte overdekking van $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ kun je geven door middel van $\sqrt[n]{T} = S$:

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[S, \frac{1}{S}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[T, \frac{1}{T}])$$
$$s \longmapsto t$$

Dat geeft het *meetkundige deel* van de fundamentaalgroep, zulke overdekkingen. Maar je kunt ook de inclusie $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{Spec}(K_n)$ met $K_n = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ beschouwen, waar ζ_n een "primitieve n-de eenheiswortel" is: een nulpunt van $Y^n - 1$ zodanig dat $\zeta_n^r \neq 1$ voor $1 \leq r < n$. Dat geeft een "overdekking"

$$\mathrm{Spec}(K_n) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$$

dit geeft

$$\mathrm{Spec}(K_n[S, \frac{1}{S}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[S, \frac{1}{S}])$$

Grothendieck beschrijft de fundamentaalgroep van een schema X als de groep die alle eindige "onvertakte overdekkingen" van X classificeert. Onder andere bewijst hij de voor een schema X over een lichaam K er een exacte rij bestaat:

$$1 \to \pi_1(X_k) \longrightarrow \pi_1(X)$$
$$\longrightarrow \pi_1(\mathrm{Spec}(K)) = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \to 1$$

Hier is k een algebraïsche afsluiting van K, en K^{sep} een separabele afsluiting van K. (Ik laat basis punten weg in de notatie.) Herken je deze structuur als het het vorige lemma nog eens leest? In veel gevallen lukt het Grothendieck het "meetkundige deel" van de fundamentaal groep in verband te brengen met de topologische fundamentaal groep, en deze dan ook te berekenen met zuiver topologische middelen.

We beschouwen een familie van variëteiten. Omdat maar eindig veel coefficiënten worden gebruikt, kunnen we dit definiëren over een lichaam eindig voortgebracht over $\mathbb{Q}$. Dus werkt er nog steeds een heel grote Galois groep op de meetkundige fundamentaal groep. Het bovenstaande lemma geeft (laat n naar oneindig gaan) de volgende situatie (ik simplificeer, maar de essentie van het bewijs van Grothendieck zien we hier):

Lemma 2. *Zij $M \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Q})$, een $m \times m$ matrix over $\mathbb{Q}$ waarvan de determinant niet gelijk aan nul is. (Dit is de monodromie-matrix.) Veronderstel dat er een $S \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Q})$ is en een geheel getal $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat:*

$$S^{-1} \cdot M \cdot S = M^t$$

(De matrix S komt van de werking van de Galois groep en deze gelijkheid is precies de gelijkheid zoals in het voorgaande lemma.) Dan is er een $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat voor elke eigenwaarde $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$ van M geldt: $\lambda^e = 1$.

Bewijs. Laat $\Lambda \subset \overline{\mathbb{Q}}^m$ de verzameling van eigenwaarden van M zijn; merk op dat alle eigenwaarden ongelijk aan nul zijn. Dan is Λ ook de verzameling van eigenwaarden van $S^{-1} \cdot M \cdot S$. (Dat weten we toch uit de lineaire algebra ?) Dus geeft $\lambda \mapsto \lambda^t$ een permutatie van de verzameling Λ. Als we die permutatie $m!$ keer uitvoeren dan komt er de indentiteit. Dus:

$$\lambda^{t^{(m!)}} = \lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

dus $\lambda^e = 1$ met $e = t^{(m!)-1}$. □

Wat is er gebeurd? De algemenere theorie van de *Grothendieck fundamentaal groep*, die de topologische fundamentaal groep en de Galois groep in één concept verenigt, geeft een werking van de Galois groep op de meetkundige fundamentaalgroep; het vertaalt een moeilijk meetkundig probleem in een eenvoudige berekening met matrices. Indrukwekkend! Voor een preciese formulering en voor een bewijs in de algemene situatie, zie [5], [3]. Dit is een voorbeeld van de vernieuwende werking van het gedachten-goed van Grothendieck. Nu 40 jaar geleden ontwikkeld. En nog even spring-levend, net als AEs[2].

Met dank aan Sander Kupers voor het verzorgen van de illustraties.

Referenties

[1] A Grothendieck & J. Dieudonné (1960). *Eléments de géométrie algbrique.* Oorspronkelijk bedoeld al 13 hoofdstukken, waarvan er slechts 4 gedeeltelijk verschenen zijn. Hier verwijzen we naar: deel I, *Le langage des schémas.* Publications Mathématiques de l'IHES **4** (1960). Zie: `http://en.wikipedia.org/wiki/%C3%89l%C3%A9ments_de_g%C3%A9om%C3%A9trie_alg%C3%A9brique`

[2] Yuri I. Manin – *Good proofs are proofs that make us wiser.* Interview by Martin Aigner and Vasco A. Schmidt. The Berlin Intelligencer, 1998, pp. 16 – 19. Zie: `http://www.ega-math.narod.ru/Math/Manin.htm`

[3] F. Oort — *Good and stable reduction of abelian varieties.* Manuscr. Math. **11** (1974), 171 - 197.

[4] W. Scharlau – *Wer is Alexander Grothendieck? Anarchie, Mathematik, Spiritualität.* Te koop direct van de auteur voor Euro 12, `scharla@math.uni-muenster.de`

[5] J-P. Serre & J. Tate – *Good reduction of abelian varieties.* Ann. Math. **88** (1968), 492 – 517.

Over de auteur

Frans Oort is Professor Emeritus aan de Universiteit Utrecht en Visiting Professor aan Columbia University, New York. Zijn onderzoeksterrein is de arithmetische algebraïsche meetkunde, in het bijzonder structuren op moduli ruimten van abelse variëteiten in positieve karakteristiek.
Email: f.oort@uu.nl

.