Review van het boek "Proofs and Computations" door Helmut Schwichtenberg en Stanley S. Wainer. Cambridge University Press (Perspectives in Logic), 2012.

We zouden heel blij moeten zijn met dit boek. Hoewel er op het gebied van de Bewijstheorie aardig wat op de markt is, ken ik geen ander boek waarin *alle* klassieke resultaten van deze discipline worden behandeld; en dat bovendien zonder de doorgaans loodzware notaties waar de meeste auteurs niet buiten lijken te kunnen. Het is ook leesbaarder dan *Basic Proof Theory* van Troelstra en Schwichtenberg (dat overigens een heel andere invalshoek heeft).

Bewijstheorie is de studie van *formele bewijzen*, dat zijn structuren die volgens stricte regels zijn opgebouwd en die wiskundige redeneringen weergeven. Een van de eerste resultaten is dat zulke structuren altijd zijn te transformeren tot een zg. *normaalvorm*. Uit een formeel bewijs in normaalvorm valt vaak veel meer informatie te halen dan alleen de wetenschap dat de conclusie een ware uitspraak is: vaak kan men uit zo'n bewijs ook een *algoritme* construeren. Formele bewijzen kunnen worden geanalyseerd vanuit het oogpunt van *complexiteit*, en een moderne toepassing van formele bewijsstructuren is dat ze gegenereerd kunnen worden door computers: het terrein van de *automated theorem proving*.

De bewijstheorie vindt zijn oorsprong in het denken van David Hilbert, en voor een razendsnelle introductie verwijs ik de lezer naar Benno van den Bergs lichtvoetige artikel "Hilbert en de Bewijstheorie" in het Maart 2013-nummer van NAW.

In de eerste vijf hoofdstukken komen grofweg aan de orde: formele bewijsbomen met natuurlijke deductie (geïntroduceerd door Gentzen), normalisatie en de stelling van Herbrand (die merkwaardigerwijs niet als zodanig wordt genoemd), de theorie van algoritmen à la Turing (*recursietheorie*), de Onvolledigheidsstellingen van Gödel, Gentzen's analyse van de consistentie van eerste-orde rekenkunde via het ordinaalgetal ε_0, en uitbreidingen hiervan tot subsystemen van tweede-orde rekenkunde.

In het laatste deel komen recentere ontwikkelingen ter sprake die te maken hebben met constructieve wiskunde: abstracte berekenbaarheid in hogere typen middels *information systems*, realizability en de Dialectica vertaling, Gödel's systeem T. Over dit deel ben ik wat minder enthousiast: de presentatie weerspiegelt de hobby's van de auteurs, en een hoop van dit materiaal is ook goed te vinden in andere, oudere publicaties (zoals Troelstra's onvolprezen [1]). Verder kunnen we een behandeling van realizability die het standaardwerk [2] niet eens *noemt*, natuurlijk niet serieus nemen...

Zeker, als de auteurs in hun voorwoord zeggen dat het eerste deel (hoofdstukken 1 t/m 3) de basis zou kunnen zijn voor een éénjarige cursus op masterniveau, dan ben ik dat met ze eens. Mits kundig begeleid.

Want als we in detail naar de behandeling van een aantal onderwerpen kijken, dan valt toch op dat het de lezer niet altijd even makkelijk wordt gemaakt. Allereerst is de stijl nogal stroef, wat mogelijk te maken heeft met de leeftijd van de auteurs (beiden emeriti). Zo begint sectie 1.1 (Natural deduction) met het weinig verhelderende "Rules come in pairs" (ik moet hier denken aan wijlen Professor Löb, een van de twee personen aan wier nagedachtenis dit boek is opgedragen, en van wie ik ook nog even college gehad heb. Diens dictaat Logica begon met het kryptische "zij ϕ een tekenrijtje"). Soms is er sprake van onnodig moeilijk gedoe: de "transfinite induction on the well-founded partial order $\to^+$" kan gemakkelijk vervangen worden door gewone inductie over natuurlijke getallen. Het gebruik van niet-gedefinieerde (en geen precieze betekenis hebbende) pseudo-wiskunde als "local maximum" in de behandeling van normalisatie, is oninformatief. De intuïtief bedoelde uitleg van een bewijs in normaalvorm als bewijs dat "does not make detours" (p. 20) is regelrecht misleidend, omdat we later zullen zien dat zilke bewijzen vaak veel langer zijn dan niet-normale bewijzen!

Behalve dat, worden begrippen regelmatig al gebruikt voordat ze gedefinieerd zijn (of zonder dat er ergens een definitie staat). Een paar voorbeelden: het begrip "normal derivation" wordt gebruikt op p. 28 terwijl de Index hiervoor p. 40 geeft, waar men overigens de definitie niet vindt. In hoofdstuk 4 wordt op p. 154 een argument "by inversion" gebruikt zonder nadere verklaring. Dit is een begrip dat voortkomt uit snede-eliminatie, maar dat is nu juist iets dat nog niet behandeld is. Op p. 162 vinden we "ε_0-recursive functions" zonder vooruitwijzing naar de plaats waar ze ingevoerd worden.

Ik zou hiermee door kunnen gaan, maar dat zou niet fair zijn. Ik ben werkelijk erg blij met dit boek.

Jaap van Oosten, departement Wiskunde, Universiteit Utrecht

References

[1] A.S. Troelstra, editor. *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*. Springer (Lecture Notes in Mathematics 344), 1973. With contributions by A.S. Troelstra, C.A. Smoryński, J.I. Zucker and W.A. Howard.

[2] J. van Oosten. *Realizability: an Introduction to its Categorical Side*, volume 152 of *Studies in Logic*. North-Holland, 2008.