Verzamelingen: eindig en oneindig*

Jaap van Oosten

Oktober 2019

1 Verzamelingen

Het is in ons spraakgebruik heel gewoon om de dingen om ons heen onder te verdelen in *soorten*, *kategorieën*, *klassen*, of hoe we het ook willen noemen. Vaak realiseren we ons maar half, dat een woord dat we gebruiken niet slaat op een concreet "ding" buiten ons, maar een algemener begrip aanduidt.

Als we aan iemand vragen wat hij aan het eten is en hij zegt: "ik eet een wortel", dan zal hij niet verwachten dat we vragen: *welke* wortel? Ook verwacht je niet dat op de verzuchting "eten we alwéér wortel?" het antwoord komt, dat we nu *andere* wortelen eten. "Wortel" slaat in dit verband kennelijk op: iets van een bepaalde *soort*.

We kunnen ook *soorten van soorten* vormen: onder "soorten van etenswaren" valt de soort "groenten", die bestaat uit de soorten bladgroenten, knolgewassen, enzovoorts.

Maar we kunnen ook een soort maken van dingen die op het eerste gezicht niets met elkaar te maken hebben, bijvoorbeeld als we het hebben over "het soort dingen die op een bureau liggen": hier kunnen we denken aan kantoorartikelen als pennen, een laptop, een nietmachine; maar ook aan: een appel, een pakje papieren zakdoekjes, een (al dan niet leeggedronken) koffiekop.

In de wiskunde is dit vormen van soorten (die we nu *verzamelingen* noemen) van fundamentele betekenis. We kunnen een aantal objecten bij elkaar rapen en dat geheel een "verzameling" noemen, en de objecten zijn dan de "elementen" van een verzameling. Als A een verzameling is en x is een element van A, dan schrijven we: $x \in A$.

Een belangrijk principe bij het redeneren over verzamelingen is het volgende:

*Tekst behorend bij master class U-Talent, oktober 2019

Principe 1.1 *Een verzameling is helemaal bepaald door zijn elementen. Als A en B verzamelingen zijn die dezelfde elementen hebben, dan zijn A en B dezelfde verzameling en we schrijven: $A = B$.*

Voorbeelden 1.2 a) Een heel belangrijke rol is weggelegd voor de zg. *lege* verzameling: deze wordt aangeduid met $\emptyset$ en heeft geen elementen.

Opgave 1 Er is precies één lege verzameling! Laat dit zien.

b) Voor elk object x is er de verzameling $\{x\}$ die als enige element het object x heeft.

c) Voor meerdere objecten, bijvoorbeeld x, y, z is er de verzameling $\{x, y, z\}$ die als elementen x, y en z heeft. We kunnen dus een verzameling aangeven door zijn elementen tussen accolades $\{ \}$ te zetten, gescheiden door komma's, mits het aantal elementen niet te groot is.

Omdat een verzameling bepaald wordt door zijn elementen (Principe 1.1) maakt het niet uit in welke volgorde we de elementen opsommen:

$$\{x, y, z\} = \{x, z, y\} = \{z, y, x\}$$

Ook maakt het geen verschil of een element vaker dan één keer opgesomd wordt:

$$\{x, y, x\} = \{x, y, y\} = \{x, y\}$$

d) We hebben ook grote verzamelingen: $\mathbb{R}$ is de verzameling van alle reële getallen; $\mathbb{N}$ is de verzameling van alle *natuurlijke getallen*:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

e) Door gebruik te maken van een variabele x kunnen we de verzameling vormen van die objecten x die een gegeven eigenschap hebben. De verzameling P van priemgetallen kunnen we bijvoorbeeld op de volgende manieren weergeven:

$$\begin{aligned} P &= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\} \\ P &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is een priemgetal}\} \end{aligned}$$

f) Voor het gesloten interval van reële getallen tussen 0 en 1 (met 0 en 1 meegeteld) is er de notatie $[0, 1]$. We kunnen ook schrijven:

$$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

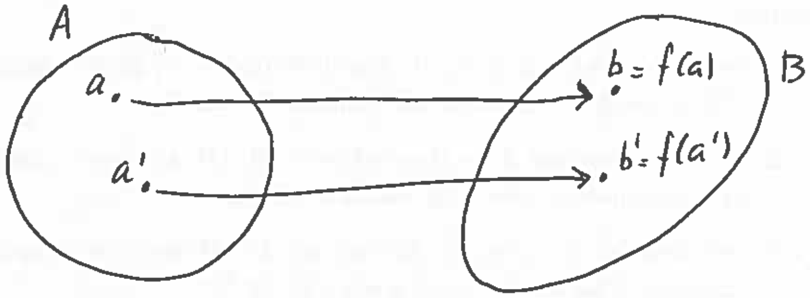
En we hebben het open interval $(0,1)$ waarbij de eindpunten niet meetellen:

$$(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1\}$$

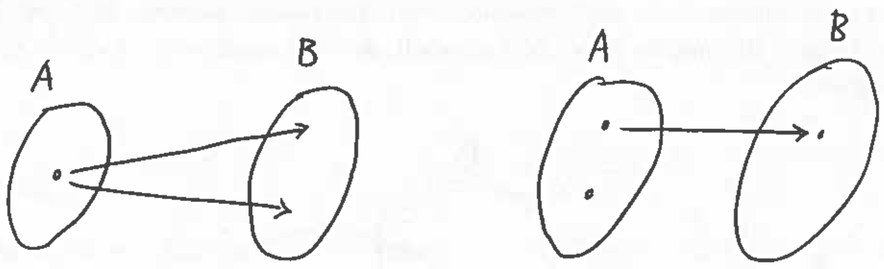
Stel nu, dat we twee verzamelingen A en B hebben. Een *functie* f van A naar B kent aan elk element x van A precies één element $f(x)$ van B toe. We kunnen denken dat B een verzameling van namen is: elk element van A krijgt een naam uit B (het kan zijn, dat verschillende elementen van A dezelfde naam krijgen). We schrijven $f : A \to B$ om aan te geven dat f een functie is van A naar B.

Als A een verzameling van scholieren is die samen naar een café gaan, en B is de verzameling van soorten consumpties in het café, en ieder element van A bestelt één consumptie, dan hebben we een functie van A naar B.

We kunnen verzamelingen en functies tekenen: een pijltje van een element x van A naar een element y van B betekent dat $f(x) = y$.



Dit zijn geen functies:



Definitie 1.3 Een functie $f : A \to B$ heet een *bijectie* als er voor elk element y van B precies één element x van A is zo, dat $f(x) = y$.

Voorbeeld 1.4 We hebben de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gegeven wordt door: $f(x) = x^3$. We hebben de functie $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ die gegeven wordt door $g(x) = \tan(x)$. Dit zijn allebei bijecties.

We kunnen functies samenstellen. Als $f : A \to B$ en $g : B \to C$ functies zijn dan is er de samenstelling $g \circ f : A \to C$ die gegeven wordt door: $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Opgave 2 [inverse functie] Beredeneer, dat als $f : A \to B$ een bijectie is, er een functie $g : B \to A$ is met de eigenschap dat $g \circ f(x) = x$ voor alle $x \in A$, èn $f \circ g(y) = y$ voor alle $y \in B$. De functie g is dan ook een bijectie, en heet de *inverse functie* van f.

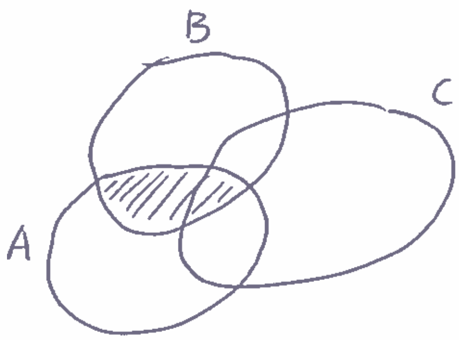
2 Logische bewerkingen op verzamelingen

Gegeven twee verzamelingen A en B, kunnen we de volgende verzamelingen vormen:

1. de *vereniging* van A en B, geschreven $A \cup B$, is de verzameling van alle elementen van A en alle elementen van B;
2. de *doorsnede* van A en B, geschreven $A \cap B$, is de verzameling van die elementen, die zowel in A als in B zitten;
3. het *verschil* van A en B, geschreven $A - B$, is de verzameling van die elementen die in A zitten, maar niet in B.

Een *Venn-diagram* is een tekening waarin verzamelingen als (bij benadering) cirkels worden weergegeven die elkaar snijden; in de cirkel die verzameling A voorstelt kunnen eventueel elementen van A getekend worden. Het gedeelte dat binnen de cirkels A en B ligt, stelt de doorsnede van A en B voor. Voorbeeld:

$A \cap B$



Opgave 3 Gebruik Venn-diagrammen om de volgende gelijkheden te bewijzen (dit zijn gevallen van de zogeheten *wetten van De Morgan*):

$$\begin{aligned}(A-B)\cap(A-C) &= A-(B\cup C)\\ (A-B)\cup(A-C) &= A-(B\cap C)\end{aligned}$$

Laat ook zien dat de volgende *distributieve wetten* gelden:

$$\begin{aligned}A\cap(B\cup C) &= (A\cap B)\cup(A\cap C)\\ A\cup(B\cap C) &= (A\cup B)\cap(A\cup C)\end{aligned}$$

Nog twee constructies die we zullen gebruiken, zijn die van het *product* van twee verzamelingen, en de *machtsverzameling* van een verzameling.

Gegeven twee objecten x en y, is het *geordende paar* (x, y) een nieuw object. Als x en y verschillend zijn, is (x, y) *niet* hetzelfde als (y, x), en (x, y) is dus iets heel anders als $\{x, y\}$. Als x en y reëele getallen zijn, kennen we de notatie (x, y) als de coördinaten van een punt in het platte vlak (of xy-vlak).

Voor verzamelingen A en B definiëren we het product $A \times B$ als de verzameling die bestaat uit alle geordende paren (x, y), waarbij $x \in A$ en $y \in B$. We kunnen het platte vlak dus zien als $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Als we de elementen van A en B naast elkaar zetten, kunnen we $A \times B$ ook in het vlak tekenen: stel, bijvoorbeeld, dat $A = \{0, 1, 2\}$ en $B = \{x, y\}$. Dan hebben we voor $A \times B$ het plaatje:

$$\begin{array}{cccc} & (0,y) & (1,y) & (2,y) \\ B\uparrow & & & \\ & (0,x) & (1,x) & (2,x) \\ \xrightarrow{A} & & & \end{array}$$

Verzamelingen kunnen natuurlijk ook optreden als element van andere verzamelingen. Verzameling A heet een *deelverzameling* van verzameling B, als elk element van A ook element is van B. We schrijven: $A \subseteq B$. Voorbeelden: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $A \cap B \subseteq A$, $A \subseteq A \cup B$. Als $A \subseteq B$, dan is er precies één functie $\chi_A : B \to \{0, 1\}$ die de volgende eigenschap heeft:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in A \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

De *machtsverzameling* van A, geschreven $\mathcal{P}(A)$, is de verzameling waarvan de elementen precies de deelverzamelingen van A zijn:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

3 Eindige verzamelingen: tellen

Definitie 3.1 Voor een natuurlijk getal n (dus: $n \in \mathbb{N}$) definiëren we $[n]$ als de verzameling van natuurlijke getallen $< n$: $[n] = \{x \in \mathbb{N} \mid x < n\}$.

Dus: $[0] = \emptyset$, $[1] = \{0\}$, $[5] = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, en $[1001] = \{0, 1, 2, \ldots, 1000\}$.

Definitie 3.2 (Eindig) Een verzameling A heet *eindig* als er een natuurlijk getal n bestaat en een bijectie

$$f : [n] \to A.$$

Als zo'n bijectie $f : [n] \to A$ bestaat, dan noemen we n het *aantal elementen* van A. We schrijven ook wel $|A|$ voor het getal n.

Opgave 4 Laat zien:

i) De lege verzameling $\emptyset$ is eindig.

ii) Als A een eindige verzameling is en x is geen element van A, dan is de verzameling $A \cup \{x\}$ ook eindig.

Maar zou het niet kunnen dat er, voor een verzameling A, *twee* verschillende natuurlijke getallen n en m zijn, en bijecties $f : [n] \to A$ en $g : [m] \to A$? En in dat geval, wat is "het aantal elementen" van A?

We merken op (gebruikmakend van Opgave 2) dat er in dat geval een bijectie $h : [n] \to [m]$ is. Wij zullen werken met het volgende principe:

Principe 3.3 (Tel-principe) *Als n en m twee natuurlijke getallen zijn en er is een bijectie $f : [n] \to [m]$, dan zijn n en m gelijk: $n = m$.*

Verderop (zie Stelling 4.4) zullen we het tel-principe bewijzen.

Opgave 5 Laat zien: als $|A| = n$ en $x \in A$, dan is $|A - \{x\}| = n - 1$.

Opgave 6 Laat zien, door gebruik te maken van het tel-principe en de laatste opgave, dat de verzameling $\mathbb{N}$ niet eindig is. (Hint: er is een bijectie van $\mathbb{N} - \{0\}$ naar $\mathbb{N}$.)

Als we weten dat $|A| = n$ en $|B| = m$, wat kunnen we dan zeggen over $|A \cup B|$?

Niet zo veel, omdat we niet weten hoeveel elementen er in zowel A als B zitten.

Opgave 7 Laat zien dat als $|A| = n$ en $|B| = m$ er altijd geldt:

$$\max(n, m) \leq |A \cup B| \leq n + m$$

Ga na, wanneer de twee randgevallen zich voordoen.

Stel nu, dat $f : [n] \to A$ en $g : [m] \to B$ bijecties zijn. Het is eenvoudig in te zien dat er een functie $h : [n + m] \to A \cup B$ is, gegeven door:

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & \text{als } i < n \\ g(i - n) & \text{als } i \geq n \end{cases}$$

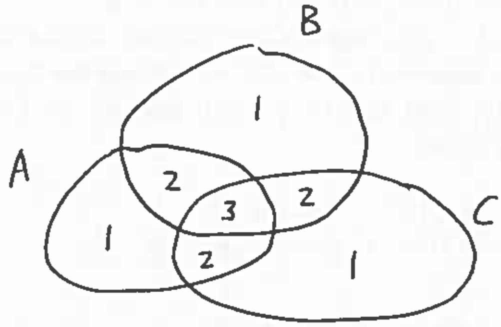
Opgave 8 Ga na dat de functie h een bijectie is precies als $A \cap B = \emptyset$.

De functie h "telt" achtereenvolgens alle elementen van A en daarna alle elementen van B; hij telt de elementen van $A \cap B$ twee keer. Als we dat aantal er weer aftrekken, krijgen we het volgende resultaat:

Propositie 3.4 *Voor elk tweetal eindige verzamelingen A en B geldt:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Voor de vereniging van *drie* verzamelingen A, B en C gebruiken we een plaatje:



De getalletjes in het plaatje geven aan, hoe vaak elementen geteld worden als we achtereenvolgens A, B en C tellen. Het is nu niet moeilijk om de volgende bewering in te zien:

Propositie 3.5 *Voor elk drietal eindige verzamelingen A, B en C geldt:*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Het is ook mogelijk om Propositie 3.5 te bewijzen vanuit Propositie 3.4. Dit gaat als volgt: $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$, dus Propositie 3.4 geeft

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|.$$

Nogmaals 3.4 toepassen geeft

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|.$$

Nu is $(A \cup B) \cap C$ gelijk aan $(A \cap C) \cup (B \cap C)$, dus met Propositie 3.4 volgt:

$$|(A \cup B) \cap C| = |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Als we dit laatste invullen in de gevonden uitdrukking voor $|A \cup B \cup C|$, volgt Propositie 3.5.

Opgave 9 Kun je zelf een formule bedenken voor *vier* verzamelingen A, B, C en D?

Laten we nu eens kijken naar het aantal bijecties tussen eindige verzamelingen. Stel $|A| = n$. Dus er is een bijectie $f : [n] \to A$. Zo'n bijectie zet de elementen van A op een rijtje: $(f(0), f(1), \ldots, f(n-1))$. Op hoeveel manieren kan dat? Laten we dat aantal $P(n)$ noemen.

We zien meteen dat $P(0) = P(1) = 1$ en $P(2) = 2$.

Stel nu, dat $B = A \cup \{x\}$, waar x een element is dat niet in A zit. Als $f : [n] \to A$ een bijectie is, die dus correspondeert met het rijtje $(f(0), f(1), \ldots, f(n-1))$, dan zijn er $n+1$ manieren om het nieuwe element x hier tussen te plaatsen:

$$\begin{array}{l} (x, f(0), \ldots, f(n-1)) \\ (f(0), x, f(1), \ldots, f(n-1)) \\ \vdots \\ (f(0), \ldots, f(n-1), x) \end{array}$$

Dus: voor elke bijectie f hebben we $n+1$ manieren om de elementen van B op een rijtje te zetten, die de volgorde van de elementen van A onveranderd laat. We concluderen:

$$P(n+1) = P(n) \cdot (n+1)$$

Gegeven dat $P(1) = 1$ (en dus $P(2) = P(1) \cdot 2 = 1 \cdot 2$, $P(3) = P(2) \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, enzovoorts), krijgen we nu:

Propositie 3.6 *Stel $|A| = n$. Het aantal bijecties van $[n]$ naar A is $n!$.*

Hoeveel elementen heeft de machtsverzameling $\mathcal{P}(A)$ van een verzameling A, de verzameling van alle deelverzamelingen van A? We hebben gezien (aan het eind van paragraaf 2) dat elke deelverzameling B van A aanleiding geeft tot een functie $\chi_B : A \to \{0, 1\}$. Deze functie neemt de waarde 1 aan precies wanneer het argument een element is van B. Omgekeerd, als we een functie $f : A \to \{0, 1\}$ hebben, krijgen we een deelverzameling van A, namelijk $\{x \in A \mid f(x) = 1\}$. Er zijn dus precies zo veel deelverzamelingen van A als er functies van A naar $\{0, 1\}$ zijn.

Hoeveel zulke functies zijn er, als we aannemen dat $|A| = n$? Laten we dit getal $Q(n)$ noemen. Als $n = 0$, dus $A = \emptyset$, is er per afspraak precies één functie van A naar $\{0, 1\}$; dus $Q(0) = 1$. Als $n = 1$ zijn er precies twee zulke functies, dus $Q(1) = 2$. Als $B = A \cup \{x\}$ met x geen element van A, dus $|B| = n + 1$ dan zijn er voor elke functie $f : A \to \{0, 1\}$ precies twee functies $g : B \to \{0, 1\}$ die hetzelfde doen als f met de elementen van A: we kunnen $g(x) = 0$ of $g(x) = 1$ kiezen. We zien: $Q(n + 1) = Q(n) \cdot 2$. We krijgen: $Q(0) = 1$, $Q(1) = 2$, $Q(2) = 4$, $Q(3) = 8$, enzovoorts. We concluderen:

Propositie 3.7 *Het aantal elementen van de machtsverzameling van een verzameling met n elementen is 2^n.*

Nu kijken we naar het aantal deelverzamelingen met een vast aantal elementen: stel dat k en n natuurlijke getallen zijn met $k \leq n$. Als A een verzameling van n elementen is, hoeveel deelverzamelingen van k elementen heeft A dan? De notatie voor dit aantal is $\binom{n}{k}$ (spreek uit: "n boven k"). We willen graag een formule om $\binom{n}{k}$ te kunnen uitrekenen.

Om een deelverzameling van A met k elementen te vormen, kiezen we achtereenvolgens k elementen $a_1, \ldots, a_k$ uit A uit, met dien verstande dat we steeds andere elementen kiezen. Voor a_1 hebben we n mogelijkheden. Is a_1 gekozen, dan resteren er nog $n - 1$ mogelijkheden voor a_2. En daarna nog $n - 2$ mogelijkheden voor a_3... totdat, op het eind, er nog $n - k + 1$ mogelijkheden voor a_k zijn. Er zijn dus

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k + 1)$$

rijtjes $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ elementen van A van k verschillende elementen. Maar: elke andere volgorde van dezelfde elementen $a_1, \ldots, a_k$ geeft dezelfde deelverzameling van A, en volgens Propositie 3.6 zijn er $k!$ veel van zulke volgordes.

We moeten dus delen door $k!$: voor een verzameling van n elementen zijn er

$$\frac{1}{k!} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

veel deelverzamelingen van A met k elementen. Als we nu ook nog opmerken dat

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

dan kunnen we concluderen:

Propositie 3.8 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Opgave 10 Je gooit met een dobbelsteen: is de uitkomst even, dan schrijf je 0 op; is de uitkomst oneven, dan schrijf je 1. Je krijgt dus een rijtje 0-en en 1-en.

i) Wat is de kans dat, als je dit 4 keer doet, er precies 2 keer een 1 in het rijtje staat?

ii) En wat is de kans op precies 3 keer een 1, als je 6 keer gooit?

Opgave 11 Bij een kaartspel (met 52 kaarten) ben je een van de vier spelers. Het spel wordt geschud en iedere speler krijgt 13 kaarten. Wat is de kans dat je precies 5 hartens krijgt?

Opgave 12 i) Laat zien dat als $k > 0$ er geldt:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

ii) Laat zien:

$$\binom{n+2}{3} = \binom{n}{3} + 2\binom{n}{2} + n$$

4 Het principe van volledige inductie

Het doel van deze paragraaf is een techniek van bewijzen te behandelen die door de hele wiskunde wordt gebruikt.

In de redenering voorafgaand aan Propositie 3.6 concludeerden we simpelweg dat uit $P(1) = 1$ en $P(n+1) = P(n) \cdot (n+1)$ volgt, dat $P(n) = n!$ voor alle $n \geq 1$. En in het geval van Propositie 3.7 zeiden we: $Q(0) = 1$ en

$Q(n+1) = Q(n) \cdot 2$, "dus" $Q(n) = 2^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Plausibel genoeg, maar waar is het eigenlijk op gebaseerd?

En we formuleerden het "tel-principe" (3.3) zonder bewijs. Kunnen we dit echt niet bewijzen?

Om deze vragen te beantwoorden formuleren we een zogeheten *axioma*, dat is: een waarheid die zo basaal is dat er geen bewijs van mogelijk is.

Axioma 4.1 (Axioma van volledige inductie) *Als $X \subseteq \mathbb{N}$ niet-leeg is, dan heeft X een kleinste element.*

De intuïtie achter het axioma van volledige inductie is: als X geen kleinste element heeft en $x_0 \in X$ (zo'n x bestaat want $X \neq \emptyset$), dan heeft X een element x_1 dat kleiner is dan x_0; door dit vaak genoeg te herhalen krijgen we een rijtje van elementen van X (en dus natuurlijke getallen):

$$x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$$

Maar in $\mathbb{N}$ kunnen we niet oneindig lang "naar beneden lopen"; we bereiken altijd een keer (na eindig veel stappen) de grond, d.w.z. het getal 0.

Het axioma van volledige inductie wordt meestal in de volgende vorm gebruikt:

Propositie 4.2 *Stel, Y is een deelverzameling van $\mathbb{N}$ en de volgende twee uitspraken zijn waar:*

i) $0 \in Y$;

ii) voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: als $n \in Y$ dan ook $n+1 \in Y$.

Dan is $Y = \mathbb{N}$.

Bewijs. We nemen aan dat voor Y de uitspraken i) en ii) in 4.2 waar zijn, en we moeten laten zien dat $Y = \mathbb{N}$. Stel van niet. Dan is $\mathbb{N} - Y$ een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{N}$, en deze heeft volgens het axioma van volledige inductie een kleinste element x. Omdat $0 \in Y$ wegens i), is $x \neq 0$. Dus $x = y + 1$ voor een natuurlijk getal y. Als y geen element was van Y, dan was $y \in \mathbb{N} - Y$ en dus een kleiner element van deze verzameling dan x; dit is in strijd met de keuze van x. Dus $y \in Y$. Maar nu volgt uit ii) dat ook $y+1 \in Y$, dat wil zeggen $x \in Y$, en dit is wederom in strijd met de keuze van x. Deze tegenspraak toont aan dat onze aanname (namelijk, dat $Y \neq \mathbb{N}$) onjuist was, en we concluderen dat inderdaad $Y = \mathbb{N}$. ∎

Voorbeeld 4.3 Uit de observatie dat 1+3 = 4, 1+3+5 = 9, 1+3+5+7 = 16 krijgen we het vermoeden dat als je een serie opeenvolgende oneven getallen (beginnend bij 1) bij elkaar optelt, je een kwadraat krijgt. Oftewel:

$$1 + 3 + \cdots + (2n + 1) \;=\; (n + 1)^2$$

Is dit nu *altijd* zo? Laten we een notatie invoeren voor $1+3+\cdots+(2n+1)$: we schrijven $\sum_{k=0}^{n} 2k + 1$. We willen bewijzen dat $\sum_{k=0}^{n} 2k + 1 = (n + 1)^2$ voor elk natuurlijk getal n. We doen dit met volledige inductie. Laat Y de deelverzameling van $\mathbb{N}$ zijn, gegeven door

$$Y \;=\; \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=0}^{n} 2k + 1 = (n + 1)^2\}$$

en wat we willen bewijzen komt erop neer dat $Y = \mathbb{N}$. Dit kunnen we concluderen uit Propositie 4.2, als we de eigenschappen i) en ii) uit die propositie kunnen verifiëren voor onze Y.

Eerst gaan we na dat $0 \in Y$, oftewel dat $\sum_{k=0}^{0} 2k + 1 = (0 + 1)^2$: dit is de *basisstap* van de inductie. Nu heeft de som $\sum_{k=0}^{0} 2k + 1$ maar één term, namelijk $2{\cdot}0 + 1$, en $2{\cdot}0 + 1 = (0 + 1)^2$ klopt. Dus $0 \in Y$, en we hebben i) bewezen.

Voor ii) moeten we nagaan dat $n + 1 \in Y$ *zodra* $n \in Y$. Dat wil zeggen: we nemen, voor een willekeurige $n \in \mathbb{N}$ aan dat $n \in Y$ (dit heet de *inductiehypothese*), en proberen met die aanname te bewijzen dat $n + 1 \in Y$.

Stel dus $n \in Y$, dat wil zeggen $\sum_{k=0}^{n} 2k + 1 = (n + 1)^2$. Nu is

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2k + 1 \;=\; (\sum_{k=0}^{n} 2k + 1) + 2(n + 1) + 1$$

Omdat $n \in Y$, geldt dus

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2k+1 \;=\; (\sum_{k=0}^{n} 2k+1)+2(n+1)+1 = (n+1)^2+2(n+1)+1 = (n+2)^2$$

We zien dat $n + 1 \in Y$, en concluderen nu, "met volledige inductie", dat $Y = \mathbb{N}$.

Opgave 13 Bewijs met volledige inductie dat $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

Opgave 14 Bewijs met volledige inductie deze vorm van het binomium van Newton:

$$(x + 1)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Opgave 15 Bewijs de volgende twee beweringen met volledige inductie:

i) Als $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een functie is met de eigenschappen: $P(0) = 1$ en $P(n+1) = P(n) \cdot (n+1)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dan is $P(n) = n!$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) Als $Q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een functie is met de eigenschappen $Q(0) = 1$ en $Q(n+1) = Q(n) \cdot 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dan is $Q(n) = 2^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Stelling 4.4 *Het tel-principe (Principe 3.3) is een gevolg van het axioma van volledige inductie.*

Bewijs. Het tel-principe zegt dat als $n \neq m$, er geen bijectie $[n] \to [m]$ kan bestaan.

Laten we een getal n *eenkennig* noemen als er voor geen enkele $m \neq n$ een bijectie $[n] \to [m]$ bestaat. Het tel-principe zegt dan eenvoudigweg, dat elk natuurlijk getal eenkennig is.

Met andere woorden: we moeten bewijzen dat de verzameling E van alle eenkennige natuurlijke getallen, gelijk is aan $\mathbb{N}$. We controleren eigenschappen i) en ii) uit Propositie 4.2.

Stel, er is een bijectie $[0] \to [m]$. Nu is $[0] = \emptyset$, en als $m > 0$ is $[m] \neq \emptyset$. Er kan geen bijectie zijn van de lege verzameling naar een niet-lege verzameling. We concluderen dat $0 \in E$: dit is eigenschap i) uit 4.2.

Voor eigenschap ii) uit 4.2 nemen we aan dat n eenkennig is, en we laten zien dat daaruit volgt dat ook $n+1$ eenkennig is. Laat $f : [n+1] \to [m]$ een bijectie zijn. Dan is f ook een bijectie van $[n]$ naar de verzameling $[m] - \{f(n)\}$. We weten ook dat $m > 0$, want $[m] \neq \emptyset$. De functie $g : [m-1] \to [m] - \{f(n)\}$, gegeven door

$$g(i) = \begin{cases} i & \text{als } i < f(n) \\ i+1 & \text{als } f(n) \leq i \end{cases}$$

is een bijectie.

Als we de inverse functie van g (zie Opgave 2) samenstellen met f, krijgen we een bijectie van $[n]$ naar $m-1$. Nu kunnen we de inductiehypothese (nl., dat n eenkennig is) gebruiken, en concluderen dat $n = m-1$. Maar daaruit volgt meteen dat $n+1 = m$, en dat is wat we moesten bewijzen.

We concluderen met inductie dat elk natuurlijk getal n eenkennig is, en daarmee is het tel-principe bewezen. ∎

Definitie 4.5 Laten A en B verzamelingen zijn en $f : A \to B$ een functie. De functie f heet *injectief* als $f(x) \neq f(y)$ voor alle $x, y \in A$ met $x \neq y$. De functie f heet *surjectief* als er voor elke $y \in B$ een $x \in A$ is met $f(x) = y$.

Propositie 4.6 (Duiventil-principe) *Als n en m natuurlijke getallen zijn en $f : [n] \to [m]$ een injectieve functie is, dan is $n \leq m$.*

Bewijs. We doen dit met inductie; laat $Y \subseteq \mathbb{N}$ de deelverzameling van $\mathbb{N}$ zijn van die natuurlijke getallen n met de eigenschap: voor alle m en alle injectieve functies $[n] \to [m]$ geldt $n \leq m$. We bewijzen dat $Y = \mathbb{N}$.

In de eerste plaats geldt dat $0 \in Y$ want $0 \leq m$ voor elk natuurlijk getal m.

Stel nu, dat $n \in Y$. Om te bewijzen dat $n + 1 \in Y$, neem aan dat $f : [n+1] \to [m]$ injectief is. Dan is f ook een injectieve functie van $[n]$ naar $[m] - \{f(n)\}$ en er is, zoals we in het bewijs van stelling 4.4 hebben gezien, een bijectie tussen $[m] - \{f(n)\}$ en $[m-1]$. Samenstellen geeft een injectieve functie $[n] \to [m-1]$ en met onze inductiehypothese ($n \in Y$) concluderen we dat $n \leq m - 1$. Er volgt meteen dat $n + 1 \leq m$. We zien dat $n + 1 \in Y$ en we concluderen met inductie dat $Y = \mathbb{N}$, als verlangd. ∎

Propositie 4.7 *Laat A een eindige verzameling zijn en $f : A \to A$ een functie. Als f injectief is, is f ook surjectief.*

Bewijs. Er is een bijectie $[n] \to A$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$, dus we mogen wel aannemen dat $A = [n]$. Stel dat $f : [n] \to [n]$ injectief is. Als f niet surjectief is, is er een $m < n$ zodat $f(x) \neq m$ voor alle $x < n$. We hebben dan een injectieve functie $[n] \to [n-1]$, wat in strijd is met Propositie 4.6. ∎

5 Oneindige verzamelingen

De wiskundige die voor het eerst systematisch nadacht over oneindige verzamelingen, was de Duitser Georg Cantor (1845–1918). Voor Cantor was oneindigheid een wiskundige realiteit, en niet een abstractie. Hij kwam hiermee in conflict met andere wiskundigen van zijn tijd (met name Kronecker), die oneindige verzamelingen slechts beschouwden als een metafoor. Tegenwoordig is Cantor's visie onder wiskundigen algemeen geaccepteerd.

Omdat Cantor, zoals we zullen zien, ontdekte dat er *verschillende soorten oneindig* bestaan, raakte hij ook in discussie met de Katholieke Kerk, voor welke er immers maar één oneindigheid kan zijn: de unieke oneindigheid van God. Cantor was bepaald geen atheist, en hij meende dat zijn theorie van oneindige verzamelingen een verdieping van de gangbare theologie kon zijn.

Wij kennen al een paar oneindige verzamelingen: $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, de gebruikelijke intervallen van reële getallen: het gesloten interval $[a, b]$, het half-open interval $[a, b)$ en het open interval (a, b).

Laten we beginnen met op te merken dat Propositie 4.7 niet opgaat voor oneindige verzamelingen. Bijvoorbeeld, de functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeven door $f(n) = n + 1$ is injectief maar niet surjectief.

Opgave 16 (Hilbert hotel) Het *Hilbert hotel*, genoemd naar de grote Duitse wiskundige David Hilbert (die een groot bewonderaar was van Cantor!), heeft oneindig veel kamers, genummerd $K_0, K_1, \ldots$.

i) Alle kamers zijn bezet. Nu meldt zich een nieuwe gast bij de portier. Verzin hoe, door wat schuiven met kamers, ook de nieuwe gast geherbergd kan worden, zonder meerdere gasten op één kamer te plaatsen.

ii) Er arriveert nu een *Hilbert-bus* bij het Hilbert hotel, dat is een bus met oneindig veel nieuwe gasten. Verzin weer een oplossing om iedereen te herbergen.

Opgave 17 i) Laat zien dat er tussen elk tweetal gesloten intervallen $[a, b]$ en $[c, d]$ een bijectie bestaat; idem voor half-open en open intervallen.

ii) Iets lastiger: laat zien dat er een bijectie is tussen $[a, b]$ en $[a, b)$.

Voor oneindige verzamelingen is het wat lastig om te praten over het "aantal elementen". Toch gebruiken we de notatie $|A|$ ook voor mogelijk oneindige verzamelingen, maar alleen op de volgende manier:

- We schrijven $|A| = |B|$ om aan te geven dat er een bijectie $f : A \to B$ bestaat.
- We schrijven $|A| \leq |B|$ om aan te geven dat er een injectieve functie $f : A \to B$ bestaat.
- We schrijven $|A| < |B|$ om aan te geven dat er wel een injectieve functie van A naar B is, maar geen bijectie.

Stelling 5.1 (Cantor) *Voor elke verzameling A is $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Bewijs. De stelling beweert dus, dat voor elke verzameling A, er wel een injectieve functie $A \to \mathcal{P}(A)$ bestaat, maar geen bijectie. Ter herinnering: $\mathcal{P}(A)$ is de verzameling van alle deelverzamelingen van A.

Een injectieve functie $A \to \mathcal{P}(A)$ is makkelijk te geven: voor elke $a \in A$ is $\{a\}$ een deelverzameling van A, en $\{a\} \neq \{b\}$ als $a \neq b$; de functie $f : A \to \mathcal{P}(A)$ gegeven door $f(a) = \{a\}$ is dus injectief.

Om te laten zien dat er geen bijectie kan bestaan, verzon Cantor een listige truc. Stel, dat $f : A \to \mathcal{P}(A)$ een bijectie was. We definiëren nu de volgende deelverzameling van A:

$$C = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Hier gebruiken we het symbool $\notin$ voor: "is geen element van".

Omdat f een bijectie is, is er een element a_0 van A zodat $C = f(a_0)$. Er zijn nu twee mogelijkheden, die allebei tot een tegenspraak leiden:

1 Als $a_0 \in C$, dan geldt dus (omdat $C = f(a_0)$) dat $a_0 \in f(a_0)$. Maar dan is a_0 juist geen element van C, vanwege de definitie van C.

2 Als $a_0 \notin C$, dan geldt dus dat $a_0 \notin f(a_0)$, en dan volgt uit de definitie van C dat $a_0 \in C$.

In beide gevallen hebben we dus een tegenspraak, die aantoont dat er geen bijectie $A \to \mathcal{P}(A)$ kan bestaan. ∎

Opgave 18 Laat zien dat $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Propositie 5.2 *Er is een bijectie* $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Bewijs. We kunnen ons $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ denken als deelverzameling van het platte vlak $\mathbb{R}^2$. Onderstaand plaatje suggereert hoe we alle punten van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ "doorlopen":

$$\begin{tikzcd}
\vdots & & \\
(0,2) & \vdots & \\
(0,1) \arrow[drr] & (1,1) \arrow[ul] & \vdots \\
(0,0) \arrow[r] & (1,0) \arrow[ul] & (2,0) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

∎

Opgave 19 Gebruik Propositie 5.2 om te laten zien dat $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Opgave 20 (Hilbert hotel; vervolgd) Voor de deur van het Hilbert hotel ligt de *Hilbert-parkeerplaats*, waar plek is voor oneindig veel Hilbertbussen. Die parkeerplaats staat helemaal vol. Vind een oplossing!

Cantor wist aan te tonen (het bewijs is niet verschrikkelijk ingewikkeld, maar toch te lang voor deze minicursus) dat $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$: er zijn "even veel" reële getallen als er deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ zijn.

Ook bewees Cantor dat er veel meer irrationale getallen (getallen in $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) zijn dan rationale getallen.