Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A met uitwerking

9 december 2014, 09:30–12:30

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. We noemen een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *repeterend* als er voor elk eindig rijtje $(a_1, \ldots, a_n)$ natuurlijke getallen, er oneindig veel $k \in \mathbb{N}$ zijn die voldoen aan

$$f(k) = a_1,\ f(k+1) = a_2,\ \ldots\ f(k+n-1) = a_n$$

Laat zien dat er overaftelbaar veel repeterende functies $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bestaan.
[Hint: het kan helpen, eerst te bewijzen dat er overaftelbaar veel bijecties $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bestaan.]

Uitwerking: Eerst laten we zien dat er een repeterende functie bestaat. De verzameling van alle eindige, niet-lege rijtjes van elementen van $\mathbb{N}$ is aftelbaar; som ze op als $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$. Laat σ_i het rijtje $(a_1^i, \ldots, a_{k(i)}^i)$ zijn. Definieer $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ door

$$\begin{array}{lll} f(0) = a_1^0 & \cdots & f(k(0)-1) = a_{k(0)}^0 \\ f(k(0)) = a_1^1 & \cdots & f(k(0)+k(1)-1) = a_{k(1)}^1 \\ f(k(0)+k(1)) = a_1^2 & \cdots & \\ \cdots & & \end{array}$$

Dan komt elk rijtje $(a_1, \ldots, a_n)$ voor als $(f(k), \ldots, f(k+n-1))$ voor zekere k en zelfs voor oneindig veel k, want het rijtje is een deelrijtje van elk van de oneindig veel rijtjes $(a_1, \ldots, a_n, m)$, $m \in \mathbb{N}$. Dus f is repeterend.

Nu is voor elke bijectie $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie $\alpha \circ f$ repeterend: gegeven een rijtje $(a_1, \ldots, a_n)$ komt het rijtje $(\alpha^{-1}(a_1), \ldots, \alpha^{-1}(a_n))$ oneindig vaak voor in f, en dus het gegeven rijtje oneindig vaak in $\alpha \circ f$. Bovendien geldt voor twee bijecties α en β dat $\alpha \circ f \neq \beta \circ f$ als $\alpha \neq \beta$ (omdat f surjectief is), dus we hebben een injectieve functie $\alpha \mapsto \alpha \circ f$ van de verzameling bijecties naar de verzameling repeterende functies; we zijn dus klaar als we weten dat er overaftelbaar veel bijecties bestaan.

Voor elke functie $g : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ hebben we een bijectie α_g, gedefinieerd door

$$\begin{array}{ll} \alpha_g(2k) = 2k, \alpha_g(2k+1) = 2k+1 & \text{als } g(k) = 0 \\ \alpha_g(2k) = 2k+1, \alpha_g(2k+1) = 2k & \text{als } g(k) = 1 \end{array}$$

Dan is α_g een bijectie (hij is zijn eigen inverse), en de afbeelding $g \mapsto \alpha_g$ is injectief. Omdat er overaftelbaar veel functies $g : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ zijn, weten we nu dat er overaftelbaar veel bijecties zijn.

Opgave 2.

a) (5) Bewijs dat er een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ bestaat die maximaal is met betrekking tot de volgende eigenschappen:

   i) A is gesloten onder optelling (d.w.z. als $a, b \in A$ dan ook $a+b \in A$)

   ii) $A \cap \mathbb{Q} = \emptyset$

b) (5) Stel A is als in deeltje a). Bewijs dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ één van de volgende (elkaar uitsluitende) uitspraken waar is: $x \in A$, $x \in \mathbb{Q}$ of er is een geheel getal $m > 0$ en een $a \in A$ zodat $mx + a \in \mathbb{Z}$.

Uitwerking:

a) Laat P de poset van alle deelverzamelingen A van $\mathbb{R}$ zijn die voldoen aan i) en ii), geordend door inclusie. De verzameling P is niet-leeg want $\emptyset \in P$. Als $\mathcal{C} \subseteq P$ een keten is, dan is $\bigcup \mathcal{C}$ ook een element van P: als $x, y \in \bigcup \mathcal{C}$ dan is er, omdat $\mathcal{C}$ een keten is, een $C \in \mathcal{C}$ met $x, y \in C$. Er volgt $x + y \in C$ omdat $C \in P$, en dus $x + y \in \bigcup \mathcal{C}$. We zien dat $\bigcup \mathcal{C}$ gesloten is onder de optelling. Tevens is $\bigcup \mathcal{C} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, want

$$\bigcup \mathcal{C} \cap \mathbb{Q} \;=\; \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (C \cap \mathbb{Q}) \;=\; \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \emptyset \;=\; \emptyset$$

We concluderen dat elke keten in P een bovengrens heeft in P. Met het lemma van Zorn volgt nu dat P een maximaal element heeft; dit is een element A als gevraagd in a).

b) Eerst laten we zien dat de drie mogelijkheden elkaar uitsluiten. We weten al dat $A \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. Zij B de verzameling van die reële getallen x waarvoor er een $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ en een $a \in A$ bestaan zodat $mx + a \in \mathbb{Z}$. Dan is $A \cap B = \emptyset$: als $x \in A \cap B$, zeg $mx + a \in \mathbb{Z}$, dan is (omdat A gesloten onder optelling) $mx + a \in A \cap \mathbb{Q}$; tegenspraak. Als $x \in \mathbb{Q} \cap B$, zeg $x = \frac{p}{q}$, $m\frac{p}{q} + a \in \mathbb{Z}$ dan volgt $a \in \mathbb{Q}$, ook leidend tot tegenspraak.

Om te zien dat één van de mogelijkheden zich inderdaad voordoet, neem x met $x \notin A$, $x \notin \mathbb{Q}$. Beschouw de verzameling

$$A_x \;=\; \{nx + ka \,|\, a \in A, n, k \in \mathbb{N}, n + k > 0\}$$

We zien dat A_x gesloten is onder optelling en $A \subsetneq A_x$ (omdat $x \in A_x$). Wegens de maximaliteit van A moet dus gelden, dat $A_x \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Dat betekent dat er $n, k, p, q \in \mathbb{Z}$ zijn met $n \geq 0$, $k \geq 0$, $n + k > 0$, en $q > 0$, en een $a \in A$ zodat

$$nx + ka = \frac{p}{q}$$

Hieruit volgt $qnx + qka = p$. Merk op dat ook volgt dat $k > 0$ (anders is $x \in \mathbb{Q}$, in strijd met de aanname) en $n > 0$ (anders is $ka \in A \cap \mathbb{Q}$), dus voor $m = qn > 0$ en $a' = qka \in A$ geldt $mx + a' \in \mathbb{Z}$.

Opgave 3. We beschouwen een poset $(X, \leq)$. Gegeven is, dat er een welordening $(L, \leq)$ bestaat en een functie $f : X \to L$ die injectief is en ordebewarend (d.w.z. als $x \leq y$ in X, dan $f(x) \leq f(y)$ in L).

a) (5) Bewijs, dat elke niet-lege deelverzameling $Y \subseteq X$ een minimaal element y_0 heeft (d.w.z. voor alle $y \in Y$ geldt: als $y \leq y_0$ dan $y = y_0$).

b) (5) Stel, $Y \subseteq X$ is een keten (Y is lineair geordend met de ordening van X). Bewijs, dat Y een welordening is.

Uitwerking:
a) Stel $Y \subseteq X$ is niet-leeg. Beschouw het beeld $f(Y)$ van Y onder f. Dit is een niet-lege deelverzameling van de welordening L en heeft dus een kleinste element l. Kies $y \in Y$ zodat $f(y) = l$. Dan is er geen $z \in Y$ met $z < y$, want dan zou volgen $f(z) < f(y) = l$ in strijd met de minimaliteit van l. Dus y is een minimaal element van Y.
b) Stel $Y \subseteq X$ is een keten; stel $Z \subseteq Y$ een niet-lege deelverzameling. Dan heeft Z een minimaal element volgens a); maar omdat Z (als deelverzameling van de keten Y) een keten is, is elk minimaal element ook een kleinste element. We concluderen dat Y een welordening is.

Opgave 4. In deze opgave beschouwen we de taal L_{pos} van posets; $L_{\text{pos}} = \{\leq\}$. We beschouwen ook de L_{pos}-structuur $M = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

a) (3) Geef een L_{pos}-formule in één vrije variabele $\phi(x)$, die in M uitdrukt dat x een singleton (een verzameling met precies één element) is: d.w.z., $M \models \phi(A)$ precies als A een singleton is.

b) (3) Geef een L_{pos}-formule $\chi(x, y)$ in twee vrije variabelen, die in M uitdrukt: "x en y zijn disjunct".

c) (4) Geef een L_{pos}-formule in twee vrije variabelen $\psi(x, y)$ die in M uitdrukt: "de doorsnede van x en y heeft precies twee elementen".

Uitwerking:
a) Bijvoorbeeld door te zeggen: x is een singleton als er precies twee elementen $\leq x$ zijn (nl. x zelf en $\emptyset$): laat $\phi(x)$ de volgende formule zijn:

$$\exists y \exists z(\neg(y = z) \wedge y \leq x \wedge z \leq x \wedge \forall w(w \leq x \rightarrow w = y \vee w = z))$$

b) Bijvoorbeeld door te zeggen: elk element dat $\leq x$ en $\leq y$ is, is het kleinste element: laat $\chi(x, y)$ de volgende formule zijn:

$$\forall z(z \leq x \wedge z \leq y \rightarrow \forall w(z \leq w))$$

c) Bijvoorbeeld door te zeggen dat er precies twee singletons $\leq x$ en $\leq y$ bestaan. Laat $\psi(x, y)$ de volgende formule zijn:

$$\begin{gathered}\exists z \exists w(\phi(z) \wedge \phi(w) \wedge z \leq x \wedge z \leq y \wedge w \leq x \wedge w \leq y \wedge \\ \neg(z = w) \wedge \forall v(\phi(v) \wedge v \leq x \wedge v \leq y \rightarrow v = z \vee v = w))\end{gathered}$$

Opgave 5. We beschouwen de taal $L_{\mathbb{R}}$ van $\mathbb{R}$-vectorruimten: de taal heeft een constante 0, een functiesymbool $+$ voor optelling van vectoren, en voor elke $r \in \mathbb{R}$ een functiesymbool f_r voor vermenigvuldiging van een vector met de scalar r. We hebben ook de theorie $T_{\mathbb{R}}$ van $\mathbb{R}$-vectorruimten, gegeven door de axioma's

$$\begin{array}{ll} f_r(0) = 0 & \forall xy(f_r(x + y) = f_r(x) + f_r(y)) \\ \forall x(f_1(x) = x) & \forall x(f_r(f_s(x)) = f_{rs}(x)) \\ \forall x(f_{r+s}(x) = f_r(x) + f_s(x)) & \end{array}$$

Bewijs met behulp van de Compactheidsstelling dat er geen $L_{\mathbb{R}}$-formule $\phi(x, y)$ in twee vrije variabelen x en y is, die uitdrukt dat x en y lineair

onafhankelijk zijn over $\mathbb{R}$, met andere woorden: die zo is dat voor elke $\mathbb{R}$-vectorruimte V en elk tweetal elementen v, w van V geldt: $V \models \phi(v, w)$ precies als v en w in V lineair onafhankelijk zijn.
[Hint: gesteld zo'n formule $\phi(x, y)$ bestond; beschouw dan de ontkenning $\neg\phi(x, y)$. Beschouw een uitbreiding van de taal met twee nieuwe constanten, en formuleer een geschikte uitbreiding van de theorie $T_{\mathbb{R}}$]

Uitwerking: Stel zo'n formule $\phi(x, y)$ was er wel. Dan drukt $\neg\phi(x, y)$ uit dat x en y lineair afhankelijk zijn: d.w.z., $x = 0$ of $y = f_r(x)$ voor zekere r.

Laat L' de taal $L_{\mathbb{R}} \cup \{c, d\}$ zijn, waar c, d nieuwe constanten zijn. Zij T' de theorie:

$$T_{\mathbb{R}} \cup \{\neg\phi(c, d)\} \cup \{\neg(c = 0)\} \cup \{\neg(f_r(c) = d) \,|\, r \in \mathbb{R}\}$$

Als $T'' \subset T'$ eindig is, dan bevat T'' maar eindig veel van de axioma's $\neg(f_r(c) = d$; zeg, T'' bevat de axioma's

$$\neg(f_{r_1}(c) = d), \ldots, \neg(f_{r_k}(c) = d)$$

Neem nu $\mathbb{R}$ als vectorruimte over zichzelf, $c^{\mathbb{R}} = 1$ en $d^{\mathbb{R}} \notin \{r_1, \ldots, r_k\}$. Dan is $\mathbb{R}$ met deze interpretatie een model van T'', want $c^{\mathbb{R}}$ en $d^{\mathbb{R}}$ zijn afhankelijk over $\mathbb{R}$.

We zien dat elke eindige deeltheorie T'' van T' consistent is, dus met de Compactheidsstelling is T' consistent. Dit leidt tot een tegenspraak. Stel nl. V ee model van T'. Dan is V een vectorruimte over $\mathbb{R}$, c^V en d^V zijn afhankelijke vectoren maar $c^V \neq 0$ en $r{\cdot}c^V \neq d^V$ voor alle $r \in \mathbb{R}$! Dit kan natuurlijk niet. Deze tegenspraak bewijst dat de veronderstelde formule niet kan bestaan.