Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A met beknopte uitwerking

15 december 2017, 13:30–16:30

Opgave 1. Geef voor elke van onderstaande verzamelingen aan, of hij eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar is. Motiveer je antwoord kort.

a) (3) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ is eindig of } \mathbb{N} - A \text{ is eindig}\}$

b) (4) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \text{voor alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ geldt } |A \cap \{0, \ldots, n\}| = n\}$

c) (3) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \text{voor maar eindig veel } B \subseteq \mathbb{N} \text{ geldt } A \cup B = \mathbb{N}\}$

Uitwerking. a): de verzameling van eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ is aftelbaar oneindig; en hiermee staat in bijectief verband de verzameling van alle co-eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ (via de bijectie $A \mapsto \mathbb{N} - A$). De hier gegeven verzameling is dus de vereniging van twee aftelbaar oneindige verzamelingen, en daarmee aftelbaar oneindig.

b): stel A is een element van de gegeven verzameling. Voor $n = 1$ geldt dat $|A \cap \{0, 1\}| = 1$, dus A bevat precies één van de getallen $0, 1$. Verder geldt voor $n > 1$ dat A precies één van de getallen $\{0, \ldots, n\}$ mist; dat is dus het getal 0 of het getal 1. We zien: $A = \mathbb{N} - \{0\}$ of $A = \mathbb{N} - \{1\}$. De gegeven verzameling heeft twee elementen, en is dus *eindig*.

c): er geldt dat $A \cup B = \mathbb{N}$ precies als $\mathbb{N} - A$ een deelverzameling is van B, en dus is B (gegeven dat $A \cup B = \mathbb{N}$) geheel bepaald door $A \cap B$. Voor elke deelverzameling X van A hebben we zo'n B, nl. $X \cup (\mathbb{N} - A)$. De gegeven verzameling bestaat dus uit die $A \subseteq \mathbb{N}$ die maar eindig veel deelverzamelingen hebben. Dat zijn precies de eindige deelverzamlingen van $\mathbb{N}$ en de collectie daarvan is aftelbaar oneindig, zoals we weten.

Opgave 2. Bewijs dat er geen verzameling X bestaat zodat er een bijectie is tussen $\mathcal{P}(X)$ en $\mathbb{N}$ ($\mathcal{P}(X)$ is de machtsverzameling van X).

Uitwerking. Als X eindig is, is $\mathcal{P}(X)$ het ook. Als X oneindig is, geldt

$$|\mathbb{N}| \leq |X| < |\mathcal{P}(X)|.$$

Opgave 3. Laat $(P, \leq)$ een poset zijn. Een deelverzameling A van P heet een *bos* als voor alle $x, y, z \in A$ geldt: als $x \leq z$ en $y \leq z$, dan $x \leq y$ of $y \leq x$.

a) (5) Bewijs met behulp van het Lemma van Zorn dat P een maximaal bos heeft (maximaal m.b.t. $\subseteq$).

b) (2) Stel $A \subseteq P$ is een maximaal bos als in a), en stel dat $p \in P$ een ondergrens is voor A (d.w.z., $p \leq a$ voor alle $a \in A$). Laat zien dat $p \in A$.

c) (3) Stel A als in b), en stel $p \in P - A$. Laat zien: er is een $x \in A$ met $p \leq x$, of er is een $x \in A$ met $x \leq p$.

Uitwerking. a): laat $\mathcal{B}$ de verzameling bossen in P zijn,geordend door inclusie. Als $\{B_i \,|\, i \in I\}$ een keten in $\mathcal{B}$ is, beschouw $B' = \bigcup_{i \in I} B_i$. Voor alle $x, y, z \in B'$ geldt, dat er een i is zodat $x, y, z \in B_i$ (vanwege de keteneigenschap); dus als $x \leq z$ en $y \leq z$, dan $x \leq y$ of $y \leq x$. We zien dat B' een bos is; en dus is B' een bovengrens voor de gegeven keten in $\mathcal{B}$. Met Zorn concluderen we, dat $\mathcal{B}$ een maximaal element heeft.

b): als A een maximaal bos in P is en a is een ondergrens van A, dan is gemakkelijk in te zien dat $A \cup \{a\}$ nog steeds een bos. Uit de maximaliteit van A volgt dat $a \in A$.

c): laat weer A een maximaal bos zijn. Stel $p \notin A$, en stel dat voor alle $x \in A$ geldt: $x \not\leq p$ en $p \not\leq x$. Dan is ook $A \cup \{p\}$ een bos, wat in strijd is met de maximaliteit van A.

Opgave 4. Laat L een lineaire ordening zijn met kleinste element 0_L. Veronderstel dat voor elke $x \in L$ er een kleinste element $x + 1$ van L is, zodat $x < x + 1$.

Bewijs of weerleg (door een tegenvoorbeeld), dat L een welordening is.

Uitwerking. L hoeft geen welordening te zijn. Beschouw bijvoorbeeld de ordening $\mathbb{N}+\mathbb{Z}$, waar elk element van $\mathbb{Z}$ groter is dan elk element van $\mathbb{N}$. Deze ordening voldoet aan de gegeven eigenschappen, maar is geen welordening want de niet-lege deelverzameling $\mathbb{Z}$ heeft geen kleinste element.

Opgave 5. We beschouwen de taal L die twee functiesymbolen heeft: m en ξ, met m 2-plaatsig en ξ 1-plaatsig. Zij M de L-structuur met onderliggende verzameling $\mathbb{R}$, en de volgende interpretatie van de functiesymbolen: $m^M(x,y) = xy$ (vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$) en $\xi^M(x) = e^x$.

a) (3) Geef een L-formule $\phi_0(x)$ met één vrije variabele x die in M het getal 0 definieert, d.w.z. voor een reëel getal r geldt: $M \models \phi_0(r)$ precies wanneer $r = 0$.

b) (3) Geef een L-formule $\phi_+(x,y,z)$ zodat voor elk drietal reële getallen a,b,c geldt: $M \models \phi_+(a,b,c)$ precies wanneer $a+b=c$.

c) (4) Geef een L-formule $\phi_<(x,y)$ zodat voor elk paar reële getallen a,b geldt: $M \models \phi_<(a,b)$ precies als $a < b$.

Uitwerking. a) $\forall y(m(x,y) = x)$.

b): $m(\xi(x), \xi(y)) = \xi(z)$.

c): $\exists z \phi_+(x, \xi(z), y)$, waar ϕ_+ de formule uit b) is. Of:

$$\exists z(\neg\phi_0(z) \wedge \phi_+(x, m(z,z), y))$$

waar ϕ_0 en ϕ_1 de formules uit a) resp. b) zijn.