Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

1 februari 2022, 17:00–20:00

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Ter herinnering: voor een L-structuur M is $D(M)$, het *diagram* van M, de verzameling van alle kwantorvrije L_M-zinnen die waar zijn in M. Er geldt: een L-structuur N is een model van $D(M)$ precies als M isomorf is met een substructuur van N,

a) (6 pts) Stel M_1 en M_2 zijn L-structuren. Veronderstel dat er geen L-structuur N bestaat waarvoor zowel M_1 als M_2 isomorf zijn met een substructuur van N. Bewijs dat er kwantorvrije L-formules $\phi(\vec{x})$, $\psi(\vec{y})$ zijn (met $\vec{x}, \vec{y}$ *disjuncte* rijtjes variabelen) zodat $M_1 \models \exists\vec{x}\phi(\vec{x})$, $M_2 \models \exists\vec{y}\psi(\vec{y})$ en de L-theorie $\{\exists\vec{x}\vec{y}(\phi(\vec{x}) \wedge \psi(\vec{y}))\}$ is inconsistent.

b) (4 pts) Geef een voorbeeld van structuren M_1 en M_2 waar de situatie van deeltje a) zich voordoet.

Opgave 2. In deze opgave beschouwen we de taal $L = \{+\}$, waar $+$ een binair (2-plaatsig) functiesymbool is. We beschouwen $\mathbb{Z}$ met optelling als L-structuur, en T de verzameling L-zinnen die waar zijn in $\mathbb{Z}$. We onderzoeken of de theorie T kwantoreliminatie heeft.

a) (3 pts) Geef een kwantorvrije L-formule die in $\mathbb{Z}$ het getal 0 definieert.

b) (3 pts) Laat zien dat er een L-formule $\phi_3(x)$ in één vrije variabele is, die in $\mathbb{Z}$ de verzameling $\{3x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ definieert.

c) (4 pts) Laat zien, door een geschikte ondergroep van $\mathbb{Z}$ te beschouwen, dat de formule ϕ_3 van deeltje b) niet equivalent kan zijn met een kwantorvrije formule.

Opgave 3. Laat met bewijsbomen zien:

a) (5 pts) $\vdash \forall x \neg \phi(x) \to \neg \exists x \phi(x)$

b) (5 pts) (Wet van Peirce): $\vdash ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

Opgave 4. Stel T is een L-theorie, en $\phi(x, y)$ is een L-formule in twee vrije variabelen zodat het volgende geldt:

$$T \vdash \forall x \exists y \forall z (\phi(x, z) \leftrightarrow z = y)$$

Laat F een nieuw, 1-plaatsig functiesymbool zijn, en zij T^F de $L \cup \{F\}$-theorie $T \cup \{\forall x \phi(x, F(x))\}$.

a) (3pts) Laat zien: $T^F \vdash \forall z (\phi(x, z) \leftrightarrow z = F(x))$

b) (3 pts) Stel $\psi(u)$ is een L-formule met één vrije variabele u. Laat zien dat de volgende equivalenties bewijsbaar zijn in de theorie T^F:

$$\psi(F(x)) \leftrightarrow \exists z (\phi(x, z) \wedge \psi(z)) \leftrightarrow \forall z (\phi(x, z) \to \psi(z))$$

c) (4 pts) Gebruik deeltje b) om te laten zien dat er voor elke $L \cup \{F\}$-formule χ een L-formule ψ is zodat $T^F \vdash \chi \leftrightarrow \psi$

Opgave 5 Een van de axioma's van ZF-verzamelingenleer is het *verenigingsaxioma*: als x een verzameling is, dan is ook $\bigcup x$, gedefinieerd door

$$\bigcup x \;=\; \{y \mid \exists w (w \in x \wedge y \in w)\}$$

een verzameling. Analoog kunnen de de *doorsnede* van x definiëren:

$$\bigcap x \;=\; \{y \mid \forall w (w \in x \to y \in w)\}$$

a) (5 pts) Laat zien dat $\bigcap x$ een verzameling is als x niet-leeg is.

b) (5 pts) Is $\bigcap \emptyset$ een verzameling? Motiveer je antwoord.