C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, p. 1204-1207 (20 décembre 1971) Série A

ALGÈBRE. — *Le* K_2 *des nombres duaux.*

Note (*) de M. **Wilberd Van der Kallen**, transmise par M. Henri Cartan.

On calcule le quotient du K_2 [de Milnor, *voir* (2), p. 204-205] des nombres duaux sur k par le K_2 de k, où k est un anneau commutatif. On obtient, dans le cas où $1/2 \in k$, le module des différentielles de k sur **Z**.

Soit k un anneau commutatif avec unité. L'anneau $k[T]/T^2$ est appelé l'anneau des nombres duaux sur k. On pose $\varepsilon = T/T^2$.

Il y a des homomorphismes de k-algèbres $u : k \to k[\varepsilon]$ et $v : k[\varepsilon] \to k$ tels que $v(\varepsilon) = 0$ et $vu =$ identité.

Cela induit

$$K_2(u): \; K_2(k) \to K_2(k[\varepsilon]) \qquad \text{et} \qquad K_2(v): \; K_2(k[\varepsilon]) \to K_2(k).$$

Donc $K_2(k[\varepsilon]) \simeq K_2(k) \oplus \ker(K_2(v))$, où $\ker(K_2(v))$ désigne le noyau de $K_2(v)$.

Nous nous proposons de déterminer $\ker(K_2(v))$.

Soit L le k-module libre ayant comme générateurs les symboles $D\,a$ ($a \in k$). On définit

$$F(a) = D(1+a) - D\,a.$$

Soit R le sous-module de L engendré par

$$D(ab) - a\,D\,b - b\,D\,a, \quad D(a+b) - D\,a - D\,b - F(ab), \quad F(a+b) - F\,a - F\,b.$$

Soit $M = L/R$.

Théorème. — $\ker(K_2(v))$ *est isomorphe au groupe additif de* M.

Avant de donner une esquisse de la démonstration du théorème on établit quelques relations dans M. Par abus de langage on désigne $D\,a/R$ par $D\,a$ et $F\,a/R$ par $F\,a$.

$$F(c^2 a) = D(ac+c) - D(ac) - D\,c = c\,D(a+1) - c\,D\,a = c\,F\,a.$$

(1) $\Rightarrow F(c^2 a) = c\,F\,a,$

(2) $\Rightarrow F(a) = -F(a) = F(-a),$

(3) $\Rightarrow F(2a) = 0.$

La relation (3) montre le

Corollaire. — Soit $1/2 \in k$. *Alors*

$$\ker(K_2(v)) \simeq M \simeq \Omega^1_{k/\mathbf{Z}}.$$

[*voir* (1), p. 102].

Exemples :

1. $k = \mathbf{Z}$. Alors $M \simeq \mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}$.
2. k est un corps de caractéristique $\neq 2$. Alors $M \simeq \Omega^1_{k/\mathbf{Z}}$.

3. k est un corps de caractéristique 2. Soit $\{x_i\}_{i\in I}$ une p-base de k [*voir* (3), p. 129]. Alors les éléments $D\,x_i$ et $F(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n})$ forment une base de M ($i_1, i_2, \ldots, i_n$ sont n éléments différents de I; $n \geq 1$).

Cas spécial : Si k est parfait, $M \simeq \Omega^1_{k/\mathbf{Z}}$.

Démonstration du théorème. — La démonstration consiste en deux parties. Dans la première partie [jusqu'au numéro (20)] on prouve que $\ker(K_2(v))$ est un quotient de M. Dans la deuxième partie on prouve l'existence d'un morphisme $\ker(K_2(v)) \to M$. On peut utiliser la relation (3) pour négliger tous les termes $F(a)$ lorsque $1/2 \in k$. Cela simplifie les vérifications.

Notations. — ST (A) est le groupe de Steinberg de l'anneau A. Les générateurs sont désignés par $x_{ij}(a)$. On a donc les relations

(4) $$x_{ij}(a)\,x_{ij}(b) = x_{ij}(a+b);$$

(5) $$(x_{ij}(a), x_{jk}(b)) = x_{ik}(ab) \qquad (i \neq k);$$

(6) $$(x_{ij}(a), x_{pq}(b)) = 1 \qquad (j \neq p,\ i \neq q),$$

où $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$.

Si $a \in k$ est inversible, on pose

$$h_{ij}(a) = x_{ij}(a)\,x_{ji}(-a^{-1})\,x_{ij}(a-1)\,x_{ji}(1)\,x_{ij}(-1).$$

On se rappelle :

$$h_{ij}(a)\,x_{pq}(b)\,h^{-1}_{ij}(a) = x_{pq}(a^r b),$$

où

(7) $$r = \delta_{ip} - \delta_{iq} - \delta_{jp} + \delta_{jq}; \qquad \delta = \text{symbole de Kronecker}.$$

Nous considérons ST ($k[\varepsilon]$). On définit

$$f_{ij}(a, b) = (x_{ij}(a\varepsilon), x_{ji}(b\varepsilon))$$

et

$$H_{ij}(a, b) = (x_{ij}(b), x_{ji}(a\varepsilon))\,x_{ij}(ab^2\varepsilon) \qquad (a, b \in k).$$

Remarquons que $f_{ij}(a, b)$ et $H_{ij}(a, b)\,h^{-1}_{ij}(1 + ab\varepsilon)$ sont des éléments de $K_2(k[\varepsilon])$. On déduit de (7) :

(8) $$H_{ij}(a, b)\,x_{pq}(c + d\varepsilon)\,H^{-1}_{ij}(a, b) = x_{pq}((1 + rab\varepsilon)(c + d\varepsilon)),$$

r comme dans (7).

On a

$$\begin{aligned} f_{ij}(a, b) &= x_{ij}(a\varepsilon)\,x_{jk}(b)\,x_{ki}(\varepsilon)\,x_{jk}(-b)\,x_{ki}(-\varepsilon)\,x_{ij}(-a\varepsilon)\,x_{ji}(-b\varepsilon) \\ &= (x_{ij}(a\varepsilon)\,x_{jk}(b)\,x_{ij}(-a\varepsilon))\,(x_{ij}(a\varepsilon)\,x_{ki}(\varepsilon)\,x_{ij}(-a\varepsilon)) \\ &\quad \times (x_{ij}(a\varepsilon)\,x_{jk}(-b)\,x_{ij}(-a\varepsilon))\,(x_{ij}(a\varepsilon)\,x_{ki}(-\varepsilon)\,x_{ij}(-a\varepsilon))\,x_{ji}(-b\varepsilon) \\ &= x_{ik}(ab\varepsilon)\,x_{jk}(b)\,x_{ki}(\varepsilon)\,x_{ik}(-ab\varepsilon)\,x_{jk}(-b)\,x_{ki}(-\varepsilon)\,x_{ji}(-b\varepsilon). \end{aligned}$$

De la même façon, on peut éliminer $x_{jk}(b)$ et $x_{jk}(-b)$; etc.

On trouve

(9) $$f_{ij}(a, b) = f_{ik}(ab, 1).$$

Donc

$$f_{ji}(b, a) = f_{ij}^{-1}(a, b) = f_{ik}^{-1}(ab, 1) = f_{ki}(1, ab). \tag{10}$$

On déduit de (9) et (10) que $f_{ij}(a, b)$ ne dépend pas de i et j mais seulement de ab. On peut donc définir :

$$f(a) = f_{ij}(a, 1).$$

Alors $f_{pq}(a, b) = f(ab)$. On a

$$f(a) f(-b) = f_{ij}(a, 1) f_{ji}(1, -b) = x_{ij}(-b\,\varepsilon) f(a+b) x_{ij}(b\,\varepsilon) = f(a+b) \tag{11}$$

donc f est additif et $f(a) = f(-a)$.

De la même façon on trouve des relations entre les H_{ij} :

$$H_{ij}(b, a) H_{ij}(c, a) = f(a^2 bc) H_{ij}(b + c, a); \tag{12}$$
$$H_{ij}(a, b + c) = H_{ij}(a, b) H_{ij}(a, c); \tag{13}$$
$$(H_{ij}(a, b), H_{pq}(c, d)) = f(rabcd), \quad \text{où } r \text{ est comme dans (7)}; \tag{14}$$
$$H_{ik}(c, ab) = H_{jk}(ca, b) H_{ij}(cb, a). \tag{15}$$
$$H_{ij}(a, 1) H_{ji}(a, 1) = 1. \tag{16}$$

On définit

$$N_{ij}(a, b) = H_{ij}(a, b) H_{ij}(ab, -1).$$

Remarquons que $N_{ij}(a, b) \in K_2(k[\varepsilon])$, et

$$N_{ki}(c, ab) = N_{ji}(cb, a) N_{kj}(ca, b). \tag{17}$$

On a $N_{ij}(a, 1) = 1$. Donc

$$N_{ki}(c, a) = N_{ji}(c, a) \quad \text{et} \quad N_{ki}(c, b) = N_{kj}(c, b).$$

Donc $N_{ji}(c, a)$ ne dépend pas de j ou de i. On peut donc définir :

$$N(a, b) = N_{ij}(a, b).$$

Alors $N_{pq}(a, b) = N(a, b)$. Et

$$N(c, ab) = N(cb, a) N(ca, b); \tag{17'}$$
$$N(a + b, c) = N(a, c) N(b, c); \tag{18}$$
$$N(a, b + c) = N(a, b) N(a, c) f(a^2 bc). \tag{19}$$

Lemme. — *Les* $N(a, b)$ *engendrent* $\ker(K_2(v))$.

Démonstration. — On peut prouver, par un réarrangement progressif d'une expression en générateurs de $ST(k[\varepsilon])$, que tout $x \in ST(k[\varepsilon])$ est égal, modulo les $N(a, b)$, à (exactement) un élément y de la forme

$$y = \Pi_{j<i}\, x_{ij}(a_{ij}\,\varepsilon) . \Pi_n\, H_{n,n+1}(b_n, 1) . \Pi_{j>i}\, x_{ij}(a_{ij}\,\varepsilon) . (ST(u)(z)),$$

où les produits sont finis et les indices n sont mis dans l'ordre naturel ($z \in \mathrm{ST}(k)$). Pour un tel y on a

$$y \in \mathrm{K}_2(k[\varepsilon]) \iff y \in \mathrm{K}_2(u)(\mathrm{K}_2(k)).$$

Cela suffit.

Il y a un homomorphisme de groupes abéliens :
$\varphi : \mathrm{M} \to \ker(\mathrm{K}_2(v))$ donné par $\varphi(a \,\mathrm{D}\, b) = \mathrm{N}(a, b)$.
(20) Le lemme montre que φ est surjectif.

Maintenant nous cherchons un $\psi : \ker(\mathrm{K}_2(v)) \to \mathrm{M}$.
Soit $\mathrm{T} =$ groupe additif des matrices finis de trace 0 sur k.
Soit $\mathrm{G} = \mathrm{T} \times \mathrm{M}$. Nous munissons G d'une structure de groupe :

$$(t_1; m_1)(t_2; m_2) = (t_1 + t_2; m_1 + m_2 + \mathrm{F}(\Sigma_{i<j}(t_1)_{ij}(t_2)_{ji} + (t_1)_{jj}(t_2)_{ii})).$$

Soit $x_{ij}(a) \in \mathrm{ST}(k)$. On définit $\chi(x_{ij}(a)) \in \mathrm{Aut}(\mathrm{G})$ par

$$\begin{aligned}\chi(x_{ij}(a))(t; m) = (\mathrm{X}_{ij}(a)\, t\, \mathrm{X}_{ij}(-a); m + t_{ji}\,\mathrm{D}\, a \\ + \mathrm{F}(a(t_{ji}t_{ii} + \Sigma_{k\in((i,j))}(t_{ki}t_{jk} + t_{ji}t_{kk})))),\end{aligned}$$

où $((i, j)) = \{ n \in \mathbf{N} \mid i < n < j \text{ ou } j < n < i \}$,

$$\mathrm{X}_{ij}(a) = \text{image de } x_{ij}(a) \text{ dans } \mathrm{SL}(k) = \varinjlim \mathrm{SL}(n, k).$$

Comme les $\chi(x_{ij}(a))$ satisfont aux relations analogues à (4), (5), (6), on peut définir un homomorphisme $\chi : \mathrm{ST}(k) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{G})$.

Soit $\mathrm{S} = \mathrm{G}.\mathrm{ST}(k)$ le produit semi-direct de $\mathrm{ST}(k)$ et G selon l'action χ. On définit $\psi : \mathrm{ST}(k[\varepsilon]) \to \mathrm{S}$ par

$$\psi(x_{ij}(a + b\varepsilon)) = (be_{ij}; 0).x_{ij}(a),$$

où $(be_{ij}; 0) \in \mathrm{G}$, $be_{ij} \in \mathrm{T}$, $e_{ij} =$ matrice dont le coefficient à la place (i, j) est 1 et les autres coefficients sont 0.

La restriction de ψ à $\ker(\mathrm{K}_2(v))$ est l'inverse de φ.

C. Q. F. D.

Remarquons que $\psi : \mathrm{ST}(k[\varepsilon]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}$.

(*) Séance du 22 novembre 1971.

(1) M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques*, I, Masson-North Holland, Paris-Amsterdam, 1970.
(2) R. G. Swan, *Algebraic K-Theory* (*Lecture Notes of Mathematics*, n° 76, 1968).
(3) O. Zariski et P. Samuel, *Commutative Algebra*, I, Van Nostrand, 1958.

Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit,
Budapestlaan, De Uithof,
Utrecht, Pays-Bas.

185024. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e)
Imprimé en France