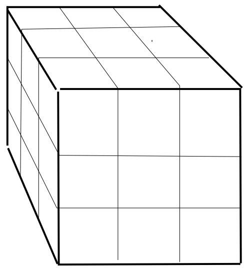
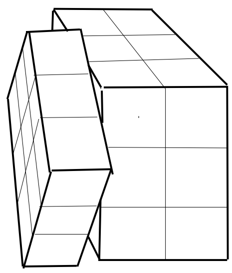
Rubik's Kubus, Invarianten en bijna commuteren.

Rubik's Kubus ziet er in de winkel uit als een kubus die verdeeld is in 27 kleine kubusjes waar gekleurde plakkertjes op zitten en wel zo dat de negen plakkertjes op één zijde van de grote kubus (aanvankelijk) dezelfde kleur hebben.



Als je de kubus sloopt, zul je zien dat hij niet echt uit 27 kleine kubusjes is opgebouwd, maar laten we even doen alsof. (Abstraheren dus.) Je hebt er waarschijnlijk wel eens een in de hand gehad want ze zijn (in 1980) razend populair geweest. Rubik is er rijk van geworden. Als de puzzel in de kubusvormige stand is, kan men willekeurig een laag kiezen bestaande uit negen deelkubusjes. Die laag kan men dan gaan draaien ten opzichte van de rest. Zie figuur.



Er zitten allerlei aspecten aan Rubik's kubus. We beschouwen de volgende kwesties, die voor een wiskundige voor de hand liggen. Ten eerste: Hoe krijgen we de puzzel weer in de beginstand als hij door draaien in de war is gebracht? Is daar een methode voor die een beetje algemeen is? (Zonder slopen.) Ten tweede: Hoe weten we dat we de eerste vraag onder de knie hebben?

Die tweede vraag lijkt misschien wat vreemd, dus laat ik die toelichten. Het is mogelijk om de kubus te slopen (draai de top laag een achtste slag en probeer dan je vinger onder een *rib-kubus* in die laag te krijgen). Daarna kun je hem weer zonder moeite in elkaar zetten zo dat alle kubusjes behalve die ene rib-kubus goed zitten, en die ene rib-kubus verkeerd om. (Ik neem aan dat je de plakkertjes er niet af getrokken hebt, want terug plakken valt tegen. De asjes kun je ook beter met rust laten.) Dan kun je de puzzel vervolgens wat door de war draaien en aan mij geven met het verzoek hem weer goed te draaien.

Omdat ik vraag twee onder de knie heb, zal ik dan kunnen zeggen dat de taak onmogelijk is. Het punt van vraag twee is dus dat je niet alleen wilt weten wat je zelf kunt, maar wat kan.

Daarom gaan we op zoek naar *invarianten*. Dat zijn funkties waarvan de waarde niet verandert bij legale operaties (dus zonder slopen).

De invariant die in het voorbeeld laat zien dat de taak onmogelijk is, is het teken van de permutatie van de 24 *rib-plakkertjes*. (Een rib-plakkertje is natuurlijk een plakkertje dat op een *rib-kubus* zit, en een rib-kubus is een klein kubusje waar twee plakkertjes op zitten.)

Dat het teken van permutaties een rol speelt zal velen niet verrassen. (Als je niet weet wat het teken is, dan zul je dat spoedig leren.) Er is nog zo'n tekeninvariant, namelijk het teken van de de permutatie van de 27 deelkubusjes. Maar gelukkig wordt het spannender. Stel dat alle kubusjes goed zitten behalve één *hoek-kubus*. (Een hoek-kubus is er een met drie plakkertjes er op.) Is de taak weer onmogelijk? Inderdaad, maar hier is een nieuw idee nodig, of hard werken met groepentheorie. Hard werken is voor de dommen en (voldoende) groepentheorie kent ook niet iedereen. We gaan daarom op de lezing een invariant ontwerpen met behulp van acht klokken waarvan de standen worden vergeleken met de klokken op een 'Greenwich kubus'. Het zijn een beetje rare klokken, want er zit maar één wijzer op zo'n klok en die wijzer kent maar drie standen. (Middernacht, Ochtend en Middag.) Met andere woorden, we rekenen modulo drie in plaats van modulo twaalf. Wat dat betreft is het gewone algebra. Maar er zit ook meetkunde in want de acht klokken zitten niet voor niets op de acht hoek-kubussen geschilderd.

We keren nu terug naar vraag een. Is er een algemene methode om dit soort puzzels mee aan te pakken? (Er zijn verschillende varianten in de handel.) Het blijkt al snel dat wat je graag zou willen, is routines hebben die netto slechts weinig plakkertjes verplaatsen. (De overige plakkertjes worden wellicht *tijdens* de routine bewogen, maar keren naar hun plaats terug.)

Eén manier om een routine te maken die netto geen enkel plakkertje verplaatst is deze: Zij T de draaiing die de *toplaag* een kwart slag draait zo dat de *toplaag-midden-kubus* (waar 1 plakkertje op zit) met de klok mee draait (als je er van buiten op kijkt). Zij analoog B de draaiing die de *bodemlaag* een kwart slag draait met de klok mee. Als je doet $TBT^{-1}B^{-1}$, dus eerst T, dan B, dan T terug, dan B terug, dan gebeurt er netto niets. Het is dus gelukt om een routine te ontwerpen die netto weinig plakkertjes verplaatst, maar het is te goed gelukt, en hier heb je niets aan.

Wat er hier gebeurde is dat bij de routines T en B *commuterende* permutaties horen. En de *commutator* $\pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1}$ van commuterende permutaties π en σ is triviaal. Het is dus niet onredelijk om te hopen dat als twee permutaties bijna commuteren, dat dan hun commutator bijna triviaal is. Op de lezing zullen we hier betekenis aan geven. Is dat eenmaal gelukt, dan blijkt snel dat deze opmerking volstaat om praktische routines te maken om de kubus in de beginstand te krijgen in alle gevallen waarin er geen invariant is die het verbiedt. Dat betekent dat we met wat wiskunde de puzzel goed onder de knie hebben gekregen. Merk nog op dat we de beantwoording van vraag een nodig hebben om bij vraag twee te weten dat we genoeg invarianten gevonden hebben.

Permutaties, tekens en naamswijziging.

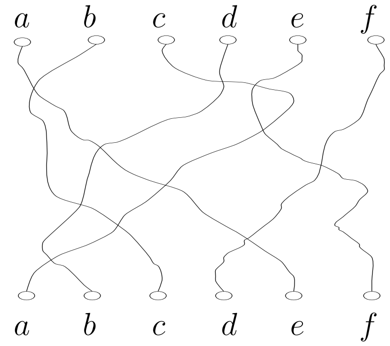
Voor de volledigheid bespreken we enige termen en feiten die we nodig hebben. Een *permutatie* π van een eindige verzameling X is een inverteerbare afbeelding van X naar zichzelf. Dus π verhutselt de elementen van X.

Een routine zoals $TL^{-1}B^2$, die dus eerst de toplaag een kwart slag met de klok mee draait, dan de linker laag een kwart slag tegen de klok in en dan de bodemlaag een halve slag, veroorzaakt een permutatie π van de 54 plakkertjes-plaatsen. En wel als volgt. Als p een plaats is, bijvoorbeeld 'boven-voor op het linker vlak', dan is $\pi(p)$ de plaats waar het plakkertje op plaats p naar toe gaat onder de routine $TL^{-1}B^2$. Dat is dus 'rechts-voor op het onderste vlak'.

Er zijn varianten denkbaar. Zo zou men in plaats van de plaatsen van de plakkertjes de plakkertjes zelf kunnen permuteren. Dat leidt tot andere formules.

Men kan een permutatie schematisch weergeven door de elementen van X op een rij te zetten, en daaronder nog eens, met $\pi(x)$ recht onder x. Het kan ook anders, namelijk met het touwtjes-model. Men zet dan de elementen van X op een rij en op enige afstand daaronder nog eens, maar deze keer

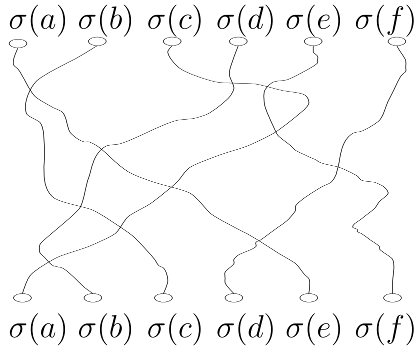
x recht onder x. Men verbindt nu x in de bovenste rij met zijn beeld in de onderste rij door een touwtje te tekenen dat van x naar $\pi(x)$ daalt. Die touwtjes moeten een beetje 'slordig' getekend worden, zodat ze in 'algemene positie' liggen, wat hier betekent dat ze elkaar wel mogen kruisen maar niet mogen raken, en dat er geen drie touwtjes door één punt mogen gaan. Men definieert nu het *teken* van de permutatie als te zijn $(-1)^k$, waarbij k het aantal kruisingen tussen de touwtjes is.



In dit voorbeeld is $k = 11$. Terwijl k van het plaatje afhangt, hangt het teken slechts van π af. Men noemt π even als zijn teken 1 is, en anders oneven. Uit plaatjes is snel duidelijk dat de samenstelling van twee even permutaties weer even is. Omdat de permutatie van (de verzameling X der) 'rib-plakkertjes-plaatsen' die hoort bij een fundamentele operatie als T steeds even is, is het onmogelijk een oneven permutatie van X te veroorzaken met legale operaties.

Ter afsluiting noemen we nog een fundamenteel principe, het 'principe van de naamswijziging'. Dit zegt ongeveer dat wat π doet met x, dat doet $\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1}$ met $\sigma(x)$. Pas op: Bij het samenstellen van afbeeldingen, hier weergegeven met $\circ$, lezen we toch maar van rechts naar links, hoewel we bij $TL^{-1}B^2$, wat je met de hand moet uitvoeren, van links naar rechts lazen.

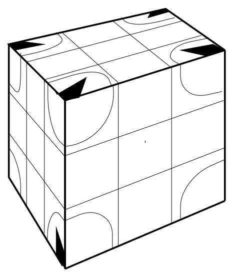
Het fundamentele principe wordt duidelijker in het touwtjes model. Als je een touwtjes-plaatje van π hebt als boven, dan krijg je er een van $\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1}$ door de touwtjes te laten staan, maar in de rijen overal x door $\sigma(x)$ te vervangen:



Vergelijk met basistransformaties in de lineaire algebra.

De voordracht in telegramstijl samengevat (voor toehoorders).

De midden-kubussen zitten aan het assenkruis vast. De acht hoek-kubussen zijn op $8!\,3^8$ manieren te monteren. De twaalf rib-kubussen op $12!\,2^{12}$ manieren. De sloopgroep heeft $8!\,3^8 12!\,2^{12} = 519024039293878272000$ elementen. Er zijn slechts 519024039293878272000/12 legale toestanden. Invarianten bij legale bewerking: De permutatie van de rib-plakkertjes is even. De permutatie van de deelkubussen is even. Het totale tijdsverschil tussen de hoekklokken en klokken op een referentie-kubus is een drievoud. Om dat laatste in te zien kijken we wat draaiing van (zeg) de toplaag doet met het totale tijdsverschil. In het voorbeeld



doet die draaiing niets, en in het algemene geval verandert het totale verschil met dit voorbeeld niet.

De drager $\mathrm{supp}(\sigma)$ van σ is $\{\, x \mid \sigma(x) \neq x \,\}$. Er geldt

$$\sigma(\mathrm{supp}(\sigma)) = \mathrm{supp}(\sigma) = \mathrm{supp}(\sigma^{-1}).$$

De drager van een commutator $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ is hoogstens drie keer zo groot als de doorsnede van de twee dragers, omdat

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp}(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) \subset \\
&\quad \operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau) \cup \\
&\quad \sigma(\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau)) \cup \\
&\quad \tau(\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau)).
\end{aligned}$$

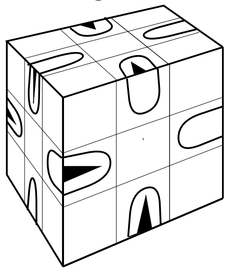
Door σ te laten corresponderen met draaiing van de toplaag en door τ handig te kiezen kan men dus zorgen dat de commutator slechts drie hoek-kubussen verplaatst. Of slechts drie rib-kubussen. Of slechts de plakkertjes op hoogstens drie (twee dus) rib-kubussen maar de rib-kubussen zelf niet. Of slechts de plakkertjes op hoogstens drie (alweer twee) hoek-kubussen maar de hoek-kubussen zelf niet.

Door het principe van naamswijziging te gebruiken kun je nog regelen welke twee of drie deelkubussen er veranderen.

Beschouw een toestand die onze drie invarianten respecteert. Je kunt zes van de hoek-kubussen op hun plaats zetten. Je kunt de permutatie van de hoek-kubussen even maken. Door beide te doen kun je de acht hoek-kubussen op hun plaats zetten. Je kunt de hoek-kubussen op hun plaats laten tollen tot er zeven goed staan. Dan vanzelf acht. Je kunt tien van de rib-kubussen op hun plaats zetten. Dan vanzelf alle twaalf (mits de de hoek-kubussen nog goed staan). Je kunt de rib-kubussen op hun plaats laten flippen tot er elf goed staan. Dan vanzelf alle twaalf. Je kunt dus naar de beginstand.

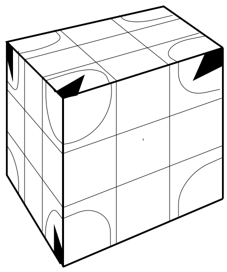
Opgaven

Opgave 1 Beschouw een ongekleurde Rubik kubus met op ieder van de twaalf rib-kubussen een klok geschilderd als in de figuur.



Iedere klok heeft slechts één wijzer en die ene wijzer kent slechts twee standen, beide dwars op de ribbe. Laat zien dat als iemand achter zijn rug één laag een kwart slag draait, en dan de kubus weer terug geeft, dat dan het totale ogenschijnlijke tijdsverschil tussen de klokstanden ervoor en erna even is. En als hij achter zijn rug de hele kubus een kwart slag draait?

Opgave 2 Nu dan met acht klokken, elke klok op een hoek-kubus. Iedere wijzer kent nu drie standen.



Wat kunnen we zeggen van het totale ogenschijnlijke tijdsverschil als iemand achter zijn rug de hele kubus draait en dan weer terug geeft?

Opgave 3 Net als T, B, L hebben we natuurlijk nog R, V en A (van *rechts*, *voor* en *achter*). Laat nog K de kwart slag van de hele kubus om de vertikale as zijn waarbij de rechterlaag naar voren komt. Dan is de routine appelschillen (voor rechtshandigen) als volgt gedefinieerd. (We lezen nog steeds van links naar rechts.)

$$\text{appelschillen} = RKRKRKRTR^{-1}K^{-1}R^{-1}K^{-1}R^{-1}K^{-1}R^{-1}T^{-1}$$

Bij het appelschillen gaan alle deelkubussen terug naar hun oude stand, behalve de drie rib-kubussen voor-boven, rechts-boven en voor-rechts, die onderling verwisseld worden.

Hoe maak je nu met het principe van naamswijziging een routine die alle deelkubussen terugbrengt naar hun oude stand, behalve de drie rib-kubussen voor-boven, rechts-boven en voor-links?

Opgave 4 Ga na waar de plakkertjes precies naar toe gaan bij het appelschillen. Dit patroon is niet symmetrisch met betrekking tot draaiing om de lange as die de voor-boven-rechts hoek verbindt met de achter-onder-links hoek. Is dat toeval, of is dat bij elke routine zo die 'alle deelkubussen terug brengt naar hun oude stand, behalve de drie rib-kubussen voor-boven, rechts-boven en voor-rechts, die onderling verwisseld worden.'? Wat doet de commutator van appelschillen met een draaiing om die lange as?

Opgave 5 Bij de gewone gekleurde Rubik kubus is het niet te zien als een midden-kubus gedraaid is ten opzichte van zijn oorspronkelijke stand. Men kan de puzzel dus nog wat moeilijker maken door op alle zes de middenkubussen nog een figuur te tekenen dat niet rotatie-symmetrisch is. Laten we zeggen weer een klok met één wijzer. Stel dat we behalve de kleuren ook de klokstanden voorschrijven. Wat is de conditie waaraan het voorschrift moet voldoen wil de opdracht uitvoerbaar zijn zonder slopen? Als je dan eerst de zes klokken goed zet, dan kun je vervolgens met de oude routines de plakkertjes op hun plaats gaan brengen, zonder de klokstanden te verprutsen. Waarom is dat?

Opgave 6 Met zes draaiingen kan men de voor-rechts-boven kubus getold terug op zijn plaats zetten, zonder dat de andere deelkubussen in de bovenlaag netto verstoord worden. Bijvoorbeeld zo: $R^{-1}BRVBV^{-1}$. Kan het korter? (Niet dat ik weet.) Als we een draaiing van een van de drie middenlagen als slechts één draaiing tellen, hoeveel draaiingen heb je dan nodig om de voor-boven kubus geflipt terug op zijn plaats zetten, zonder dat de andere deelkubussen in de bovenlaag netto verstoord worden? Hint: Het doet er toe welke middenlaag je benut.