Ferdinand Verhulst
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
f.verhulst@uu.nl

Opinie

Vergeet 'zuivere en toegepaste' wiskunde

In de wiskundewereld wordt vaak onderscheid gemaakt tussen 'zuivere wiskunde' en 'toegepaste wiskunde'. Wat houdt dit onderscheid eigenlijk in, en moeten we zo'n onderscheid eigenlijk wel maken? Aan de hand van het werk van Felix Klein en Wiktor Eckhaus gaat Ferdinand Verhulst op zoek naar een antwoord.

In 1966 studeerde ik af aan de Universiteit van Amsterdam op een gemengd probleem van astronomie en numerieke wiskunde. Daarna werkte ik vijf jaar bij wiskunde van de TU Delft, vervolgens bij wiskunde van de Universiteit Utrecht. Vanaf het begin van mijn loopbaan in 1966 speelde de tegenstelling zuivere en toegepaste wiskunde een belangrijke rol, meestal in de discussie op een onaangename manier.

Mijn opleiding in Amsterdam bestond wat de wiskunde betrof uit de klassieke definitie-stelling-bewijs-resultaten van analyse, meetkunde en algebra en daarnaast uit experimentele en behoorlijk veel theoretische (astro-)fysica. De tegenstelling zuiver–toegepast begreep ik helemaal niet en dat onbegrip bleef en blijft tot de dag van vandaag wringen. Er bestaat geen goede omschrijving van 'zuiver' en 'toegepast' en het is toch wel vreemd dat allerlei wetenschappers die in hun werk heel degelijk zijn zo losjesweg deze begrippen gebruiken en zelfs bij belangrijke beleidsbeslissingen een rol laten spelen. In juni 2016 zag ik nog een advertentie voor 'een zuivere wiskundige' bij het Max Planck Instituut te Bonn. Navraag wat met 'zuivere wiskunde' werd bedoeld, leverde geen antwoord op.

Problemsolvers en conceptualisten

Een voorlopige conclusie zou kunnen zijn dat de begrippen zuivere en toegepaste wiskunde dan wel vaag en slecht omschreven zijn, maar kennelijk toch iets aanduiden dat leeft onder wiskundigen. Dit dacht ik tot dat ik een boek van David Ruelle las over het denken van de wiskundigen [6]. In dit boek komen de begrippen zuiver en toegepast namelijk niet voor. Ruelle onderscheidt onder wiskundigen de 'problemsolvers' en de 'conceptualisten' (we zullen met de term 'wiskundige' hier uitsluitend iemand aanduiden die wetenschappelijk onderzoek doet en publiceert in erkende wetenschappelijke tijdschriften). De problemsolvers houden zich bezig met problemen als "hoeveel priemgetallen zijn er?" of "hoe voorspel ik de waterstanden in een riviermonding?".

Ruelle noemt als een conceptualist Felix Klein, bijvoorbeeld in de opzet van zijn Erlangen-programma. In dat programma speelt het inzicht een rol dat naast de klassiek euclidische meetkunde er projectieve meetkunde is ontwikkeld, affiene en (later) symplectische meetkunde, enzovoort. Het gaat hierbij om het inzicht dat zulke wiskundige technieken gezamenlijk structuren in de wiskunde vormen, het ligt dicht bij wiskundige filosofie. Dit algemene inzicht brengt eenheid in de wiskunde en geeft ook een zekere esthetische bevrediging.

Ruelle merkt op dat problemsolvers meestal ook conceptueel bezig zijn. Iemand die geïnteresseerd is in het aantal priemgetallen zal zich ook wel gaan bezig houden met de verdeling van priemgetallen, het tweelingpriemprobleem en als ultiem onderwerp het vermoeden van Riemann. Je kunt waterstanden voorspellen en dan alleen bekende algoritmen gebruiken, dan ben je uitsluitend problemsolver, maar het ligt ook voor de hand om de grote vragen van de stromingsleer, het bestaan van oplossingen van de Navier–Stokes-vergelijkingen of het begrijpen van turbulentie aandacht te geven.

Het gaat bij een eventuele evaluatie van bezigheden van een wiskundige om kwaliteit. Een wiskundige met een betaalde baan die uitsluitend problemsolver is, kan dat rechtvaardigen als zijn werk veel maatschappelijke betekenis heeft. Maar wetenschappelijke kwaliteit ontstaat als er problemen worden opgelost en tegelijk nieuw conceptueel inzicht wordt verkregen. Van de andere kant: een wiskundige die uitsluitend conceptualist is wordt alleen gerechtvaardigd indien zijn werk de wiskunde een totaal nieuwe wending geeft. In de praktijk zal er bij goede wiskundigen bijna altijd een mengvorm zijn.

Er is in deze tijd ook een nieuwe gebruiksvorm van wiskunde ontwikkeld. Ik denk hierbij aan een gereedschapskist als Auto dat veelzijdig de gebruiker in staat stelt om periodieke oplossingen van gewone differentiaalvergelijkingen te zoeken (ontwerper is de Nederlands-Canadese Eusebius Doedel). Een ander voorbeeld is MatCont dat numeriek bifurcaties in differentiaalvergelijkingen volgt en analyseert. Hoe passen zulke gereedschapskisten in het plaatje? Ze zijn ongetwijfeld een grote steun voor de problemsolvers, echter de buitengewoon uitgebreide theorie die aan de constructie van Auto en MatCont ten gronde ligt en bovendien de vele wiskundige vragen die de constructies nog steeds oproepen plaatsen het werk aan deze programma's duidelijk op de mengvorm van problemsolving en conceptueel.

Laten we concreter worden door een aantal voorbeelden te bekijken.

Topwiskundigen als Isaac Newton, Bernhard Riemann of Henri Poincaré waren zowel problemsolver als conceptualist en dan in beide gebieden op uitzonderlijk hoog niveau. Zij laten in hun werk zien hoe het oplossen van problemen tot hoger, conceptueel inzicht leidt. Hun werk in de wiskunde is grensverleggend en bij Newton en Poincaré geldt dat ook voor hun werk in de natuurkunde. Bij de allergrootste wiskundigen is de samenhang tussen problemsolving en grensverleggende conceptie duidelijk.

Laten we echter eens kijken naar enkele boeken van twee excellente wiskundigen, Felix Klein en Wiktor Eckhaus, die dichter bij het dagelijkse werk van de gemiddelde wetenschapper staan dan de genoemde topwiskundigen. We kiezen voor deze twee wiskundigen omdat Klein na concrete problemen te hebben onderzocht het conceptuele sterk benadrukt terwijl bij Eckhaus de problemsolving voorop lijkt te staan.

Felix Klein (1849–1925)

Hoe staat het met Felix Klein? Zoals we boven zagen is zijn Erlangen-programma een voorbeeld van conceptualisme in de meetkunde, maar Klein hield zich ook bezig met differentiaalvergelijkingen, zie [3] en [4]. Aan het einde van de negentiende eeuw hielden boeken over gewone differentiaalvergelijkingen zich bezig met trucs om speciale exacte oplossingen te vinden en met het technisch moeilijker gebied van de speciale functies. Klein stelt een geheel nieuwe aanpak voor. Hij wil het globale karakter van oplossingen bestuderen, maar omdat dit nogal ambitieus is beperkt hij zich tot lineaire tweede orde vergelijkingen met ten hoogste drie singuliere punten:

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0,$$

waarbij y' de eerste afgeleide naar de complexe variabele z is, $p(z)$ en $q(z)$ zijn rationaal in z met eventueel polen. Zulke vergelijkingen leiden bijvoorbeeld tot hypergeometrische of tot Lamé-functies. In de jaren voor 1890 heeft Klein grote bijdragen geleverd aan de theorie van automorfe functies en dit gebied vormt de inspiratie voor zijn werk over differentiaalvergelijkingen. Vertakkingspunten in het complexe vlak van oplossingen worden behandeld met uniformiseringsmethoden waarbij door geschikte transformatie een globale parametrisering ontstaat op het Riemann-oppervlak. Dat levert bijvoorbeeld bij elliptische functies een variabele die de uitwijking van een slinger en de bijbehorende periode van beweging in één tabel kan leveren. Klein filosofeert uitvoerig over het belang van de meetkunde in dit verband en dan speciaal over de synthetische en de algoritmische aanpak. Zijn colleges [3] geven meer het complexe-functie-kader om met behulp van automorfe functies naar differentiaalvergelijkingen te kijken dan dat er kwantitatief of kwalitatief zulke vergelijkingen worden bestudeerd. Dat komt wel aan de orde in de monografie die Klein met Sommerfeld schreef [4]. De uitwerking van Kleins opzet, grotendeels door Sommerfeld uitgevoerd, leidt tot de analyse van een aantal oscillatorproblemen uit de mechanica.

De grote nadruk op het gebruik van automorfe functies voor differentiaalvergelijkingen is belangrijk voor speciale functies maar heeft nauwelijks of geen invloed gehad op de ontwikkeling van de algemene theorie van differentiaalvergelijkingen. De opzet van de theorie zoals vanaf rond 1880 door Henri Poincaré gegeven, zie [7], is in de loop van de twintigste eeuw de leidende theorie geworden. Klein was goed bekend met het werk van Poincaré en het is dan ook vreemd dat hij die ontwikkelingen negeerde. De conceptuele weg die Klein op het gebied van differentiaalvergelijkingen koos was wel natuurlijk, gezien zijn werk aan automorfe functies, maar heeft alleen op andere gebieden van de analyse succes gehad.

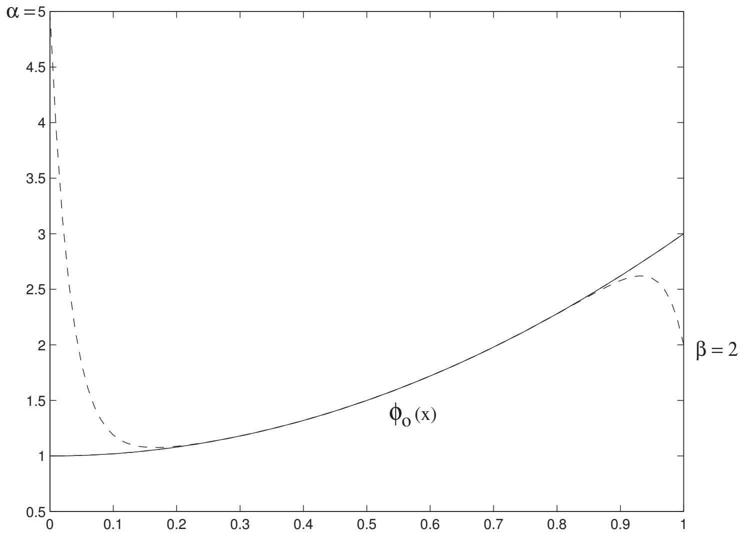
Wiktor Eckhaus (1930–2000)

Wiktor Eckhaus was een bijzonder creatieve problemsolver. Zijn hoofdthema's waren niet-lineaire stabiliteitstheorie, bifurcatie analyse en singuliere storingen; zie ook het In Memoriam [1]. Over het laatste gebied publiceerde Eckhaus een fundamenteel en samenvattend boek [2]. Wat zijn singuliere storingen? Bekijk eens het lineaire randwaarde probleem voor $\phi(x)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon\phi'' + \phi &= 1 + 2x^2, \\ \phi(0) &= \alpha = 5, \\ y(1) &= \beta = 2. \end{aligned}$$

De parameter ε is steeds klein en positief. Het probleem kan exact worden opgelost, maar als we de parameter ε nul stellen verwachten we een benadering $\phi_0(x) = 1 + 2x^2$ van de oplossing te krijgen; ε kan immers willekeurig klein worden gekozen. Echter, voor $\varepsilon = 0$ ontstaat $\phi_0(0) = 1$, $\phi_0(1) = 3$, $\phi_0(x)$ voldoet kennelijk niet aan de randvoorwaarden. Als we toevallig $\alpha = 1$, $\beta = 3$ hadden gekozen was het goed gegaan, maar dan wisten we nog niet of we een echte benadering van de oplossing $\phi(x)$ hadden. Slecht idee dus? Nee, want de Duitse ingenieur-wiskundige L. Prandtl had voor zulke problemen het briljante idee dat in verschillende gebieden, in ons voorbeeld in $[0,1]$, de oplossing verschillende benaderende (asymptotische) reeksontwikkelingen heeft die glad aan elkaar gepast moeten worden om een benadering van de oplossing voor het complete gebied te krijgen. (Voor een boeiende historische beschrijving zie [5].) In dit voorbeeld zijn dat de drie gebieden met allereerst een $\sqrt{\varepsilon}$-omgeving van $x = 0$, ten tweede een $\sqrt{\varepsilon}$-omgeving van $x = 1$ en ten derde het middengebied waar $\phi_0(x)$ een benadering is, zie Figuur 1.

Het gaat Eckhaus in zijn monografie [2] om verschillende zaken. Een conceptueel geluid in de Preface is "This book is an inquiry into the mathematical structure of the theory of singular perturbation."



Figuur 1 Matching bij de twee eindpunten voor het randwaardeprobleem. De 'benadering' $\phi_0(x)$ is een benadering in het middengebied.

Zo ontwikkelt hij in de eerste drie hoofdstukken de theorie van ordefuncties, reële, continue functies $\delta(\varepsilon)$ in een omgeving van $\varepsilon = 0$ waarvoor de limiet $\varepsilon \to 0$ bestaat. De verzameling van ordefuncties kan worden geordend, die ordening is partieel, ze vormen de basis voor een groot aantal asymptotische theorieën. Om het idee van Prandtl te gebruiken is het dan de kunst om lokale variabelen te identificeren die ons in staat stellen lokale reeksontwikkelingen te construeren. In het voorbeeld van boven gaat het om drie gebieden met variabelen $e^{-x/\sqrt{\varepsilon}}$, x en $e^{(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}$.

Er blijken bij verschillende auteurs verschillende heuristische methoden te bestaan om die lokale variabelen te identificeren. Dat is meer een kwestie van smaak dan een wezenlijk probleem. Wel fundamenteel is de vraag of je de lokale benaderingen met elkaar kunt verbinden (matchen), hoe je dat moet uitvoeren en of dat 'altijd' kan; met 'altijd' bedoel ik of het kan voor alle mathematisch-fysische problemen waarin een kleine parameter voorkomt. Hierbij speelt de zogenaamde 'overlap-hypothese' een belangrijke rol. Deze hypothese houdt in dat er tussen twee gebieden met lokale benaderingen een tussengebied bestaat waar beide lokale benaderingen geldig zijn zodat ze met elkaar verbonden kunnen worden (technische term: 'gematcht'). Eckhaus laat zien dat overlap een voldoende voorwaarde voor matching is maar niet noodzakelijk. Apriori aangeven bij een gewone of partiele differentiaalvergelijking, een delay-vergelijking of wat dan ook, of de methode van lokale benaderingen gevolgd door matching mogelijk is en vervolgens een benadering in de mathematische zin levert, blijft onopgelost. Wel laat Eckhaus in de volgende hoofdstukken zien hoe voor een groot aantal klassen vergelijkingen de heuristische werkwijze gevolgd door bewijzen van geldigheid de procedure kan worden uitgevoerd. Dit is rechtvaardiging achteraf, de fundamentele aanpak is niet opgehelderd. Het is een mooi voorbeeld van wat Van der Blij eens in zijn colleges de moraal van de wiskundige noemde: "Doe wat je wilt en maak later alles in orde."

Conclusie

Als we een conclusie kunnen trekken is het dat het spreken over zuivere en toegepaste wiskunde alleen schijnbetekenis heeft. Dat kunnen we beter laten.

Verder heeft het zin om in het werk van wiskundigen problemsolving en concepties ontwikkelen te onderscheiden. In de praktijk zijn beide aspecten bij zo goed als alle wiskundigen aan te treffen, alleen de nadruk kan verschillend zijn. Zowel Klein als Eckhaus hebben in de genoemde boeken geprobeerd een conceptuele eenheid tot stand te brengen. Het zijn vruchtbare mislukkingen geworden, mislukking omdat het doel te beperkt of niet bereikt is, vruchtbaar omdat er ideeën zijn ontwikkeld die een zeker nut hebben gebracht. Bij Klein is het conceptuele aspect zozeer op de voorgrond geraakt dat hij binnen de algemene theorie van differentiaalvergelijkingen op een (overigens interessant) zijspoor is beland. Bij Eckhaus zijn de concepten scherp geformuleerd maar het fundamentele probleem van de algemene toepasbaarheid van het idee van Prandtl is open. Vermoedelijk kunnen geometrisch-topologische inzichten hier mede een bijdrage leveren.

De pogingen van beide wiskundigen om problemsolving en conceptueel denken bijeen te brengen zijn fraaie voorbeelden van de ontwikkeling van wiskundige activiteit.

Referenties

1 Arjen Doelman, Hans Duistermaat, Johan Grasman en Aart van Harten, In memoriam Wiktor Eckhaus (1930–2000), *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/2, (2001), 18–20.

2 Wiktor Eckhaus, *Asymptotic Analysis of Singular Perturbations*, North-Holland, 1979, 288 pp.

3 Felix Klein, *Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung*, Lectures Sommersemester Göttingen, notes by E. Ritter, 1894, 524 pp..

4 F. Klein en A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels*, B.G. Teubner, 1897, 512 pp.

5 R. E. O'Malley, *Historical Developments in Singular Perturbations*, Springer, 2014, 256 pp.

6 David Ruelle, *The Mathematician's Brain*, Princeton University Press, 2007, 160 pp.

7 Ferdinand Verhulst, *Henri Poincaré, Impatient Genius*, Springer, 2012, 260 pp.