„ matrice. Questi sughi poi fissati e la-
„ pidefatti che sieno, per ridurli alla
„ fusione bisogna espurgarli da tutti
„ quegli escrementi, e ridurli a puro
„ metallo; nel quale però se bene stu-
„ dierà l'arte di separar gli elementi, e
„ di ridurre il composto al suo primo
„ principio, troverà in esso e terra, e
„ solfo, e sale, e acqua, che nella calci-
„ nazione si risolve in vapori, come ci
„ fa veder l'esperienza nella calcinazione
„ de' metalli stessi, benchè purgatis-
„ simi.

In altro Giornale daremo la continuazione.

ARTICOLO VI.

Teorema da cui si deduce una nuova misura degli Archi Elittici, Iperbolici, e Cicloidali. Del Sig. GIULIO CARLO DE' FAGNANI.

Teorema.

NE' due Polinomj infrascritti X, e Z, e nell'equazione (1) le lettere h, l, f, g rappresentino qualsivoglia quantità costante.

Io

Io dico in primo luogo, che se nell' equazione (1) l'esponente s significa l'unità positiva, l'Integrale dell' aggregato de' due Polinomj X + Z è

uguale a $-\frac{hxz}{\sqrt{-fl}}$

Io dico in secondo luogo, che se nella medesima equazione (1) l'esponente s esprime l'unità negativa, allora l'Integrale dell'aggregato di

X + Z è uguale a $\frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$

(X) $\frac{dx\sqrt{hxx+l}}{\sqrt{fxx+g}}$

(Z) $\frac{dz\sqrt{hzz+l}}{\sqrt{fzz+g}}$

(1) $\overline{fhxxzz}^{s}+\overline{flxx}^{s}+\overline{flzz}^{s}+\overline{gl}^{s}=0$

Dimostrazione della prima parte del Teorema.

Dall'equazione (1) nasce la seguente

$$(2)\qquad z = \frac{\sqrt{-flxx - gl}}{\sqrt{fhxx + fl}}$$

e di più dalla medesima equazione (1) si deduce un valore di x tale, che la medesima x è data per z come appunto z nell'equazione (2) è data per x. Laonde introducendo z nel Polinomio X, e x nel Polimonio Z si ha

$$(3)\qquad X+Z = \frac{dx\sqrt{-l}}{z\sqrt{f}} + \frac{dz\sqrt{-l}}{x\sqrt{f}}$$

Ma l'equazione (1) differenziata, e poi divisa per $2fxz$ fa conoscere

$$hzdx + hxdz + \frac{ldx}{z} + \frac{ldz}{x} = 0.$$

cioè

cioè trasponendo, e dividendo per $\sqrt{-fl}$

$$\frac{dx\sqrt{-l}}{z\sqrt{f}} + \frac{dz\sqrt{-l}}{x\sqrt{f}} = \frac{-hzdx}{\sqrt{-fl}} \frac{-hxdz}{\sqrt{-fl}}$$

dunque sostituendo il secondo membro di quest'ultima equazione in luogo del primo di essa nell'equazione (3), e poscia integrando si ottiene

$$(4) \quad S.X + S.Z = \frac{-hxz}{\sqrt{-fl}}. \quad \text{Q.E.D.}$$

S. significa somma, ovvero integrale.

Dimostrazione della seconda parte del Teorema.

Ponendo l'unità negativa in vece di s nell'equazione (1) e facendo le debite operazioni ritrovasi

$$(5) \quad z = \frac{\sqrt{-ghxx-gl}}{\sqrt{fhxx+gh}}$$

vedesi ancora, che x è data per z,

come z nell' antecedente equazione (s) è data per x, dimodochè l'introduzione di z nel Polinomio X, e di x nel Polinomio Z, somministra.

$$X + Z = \frac{z\,dx\sqrt{-b} + x\,dz\sqrt{-b}}{\sqrt{g}}$$

e integrando.

$$(6)\quad S.X + S.Z = \frac{xz\sqrt{-b}}{\sqrt{g}} \quad \text{Q.E.D}$$

fig. 1. *Applicazione della prima parte del Teorema all' Elissi.*

Uno degli Assi dell' Elisse AGHI, sul quale si vogliono prendere l'abscisse, v. g. l'asse IG si nomini ($2a$), il suo parametro (p), e x l'abscissa variabile CD, che ha per origine il centro C. E noto a gl' intendenti della Geometria interiore, che se per abbreviare si suppone $b = p - 2a$, l'Elemento dell' Arco AB corrispondente all'abscissa CD è

dx

$$\frac{dx\sqrt{bxx+2a^3}}{\sqrt{2a^3-2axx}}$$

Suppongasi dunque questo Polinomio eguale al Polinomio Generale X, e si averà $l = 2a^3$; $f = -2a$; $g = 2a^3$, i quali valori surrogati nell'equazioni (2) e (4) fanno conoscere, che prendendo l'altra abscissa CF (z) di tal natura, che sia

$$z = a\frac{\sqrt{2a^3-2axx}}{\sqrt{bxx+2a^3}}$$

Si ha

$$\text{Arc. AB} + \text{Arc. AF} = -\frac{bxz}{2aa} + K$$

Per trovare il valore della costante K si osservi, che quando $x = 0$, allora l'Arco A B è nullo, come anche l'espressione rettilinea $\frac{bxz}{2aa}$, ma in questo caso l'Arco A F diviene uguale all'

Arco intero AG, dunque k è uguale a questo medesimo Arco, e però trasponendo l'ultima equazione, e sostituendo l'Arco GF negativo in cambio di Arc. AF – Arc. AG finalmente si scuopre

$$\text{Arc. } AB - \text{Arc. } GF = -\frac{bxz}{2aa}$$

fig. 2. *Applicazione della seconda parte del Teorema all'Iperbole.*

Il primo asse HA dell'Iperbole ABF si chiami ($2a$) il suo parametro (p), e (x) l'abscissa variabile CD, che nasce dal centro C, suppongasi ancora $b = p + 2a$; sanno i Conoscitori, che l'Elemento dell'Arco AB, il quale corrisponde all'abscissa CD è

$$\frac{dx\sqrt{bxx - 2a^3}}{\sqrt{2axx - 2a^3}}$$

E questo Polinomio essendo uguagliato al Polinomio generale X mostra,

che

che $l = -2a^3$; $f = 2a$; $g = -2a^3$; i quali valori posti nell'equazioni (5) e (6) fanno vedere, che assumendo l'altra abscissa CE (z) tale, che si abbia

$$z = \frac{a\sqrt{bxx - 2a^3}}{\sqrt{bxx - baa}}$$

si ottiene

$$(7)\ \text{Arc. AB} + \text{Arc. AF} = \frac{xz\sqrt{b}}{a\sqrt{2a}} + K$$

Si noti, che z decresce al crescere di x, come ciascuno potrà da se medesimo assicurarsi

Chiamisi ora (t) l'abscissa Cd, ed (u) l'altra abscissa Ce in modo però, che ci sia data per t come z per x, e per la stessa ragione si averà

$$\text{Arc. A}b + \text{Arc. A}f = \frac{tu\sqrt{b}}{a\sqrt{2a}} + K$$

Dunque ſottraendo queſt'ultima equazione dall' equazione (7) infine ſi ſcoprirà.

$$\text{Arc. } Ff - \text{Arc. } Bb = \frac{xx\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}} - \frac{tt\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}}$$

Egli è viſibile, che uno de i due Archi Ff, Bb, è arbitrario.

Applicazione della prima parte del Teorema alle Cicloidi.

figg. 3. 4. La Cicloide ABFG è generata dal Cerchio NTR rotato ſu l' Arco Circolare RSV, e il punto A, che la deſcrive, è preſo ſu la circonferenza del Cerchio generatore, ovvero fuori di eſſa; la ſemiperiferia circolare AICH è deſcritta dal centro K commune al Cerchio Generatore, e dal raggio KA; AB è un' Arco variabile della Cicloide, e BI è un' Arco circolare deſcritto dal centro O comune al Cerchio, che è Baſe, e dal raggio variabile CB; l'Arco ſuddetto BI taglia il ſemicerchio AICH nel punto I, da cui diſcende ſul diametro,

tro AH la perpendicolare ID.

Chiamisi ora OB (b), KA (a), KN (c), l'abscissa AD del Semicerchio AIOH si nomini t, e per maggior brevità suppongasi $a + c = q$; il celebre Sig. Nicole nel suo *Schediasma* inserito nelle Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi dell' Anno 1708. mostra, che l' Elemento dell' Arco Cicloidale AB è uguale al Polinomio seguente.

$$\frac{dt\sqrt{qq - 2ct}}{\sqrt{2at - tt}} \text{ moltiplicato per } \frac{b + c}{b}$$

Ciò posto chiamisi x la Corda AI; e si averà $t = \frac{xx}{2a}$, e $dt = \frac{xdx}{a}$; dunque l' Elemento dell' Arco Cicloidale $A\beta$ sarà eguale al Polinomio, che siegue.

$$\frac{dx\sqrt{aqq - cxx}}{\sqrt{4a^3 - axx}} \text{ moltiplicato per } \frac{2b + 2c}{b}$$

Concepiscasi pertanto quest' ultimo Polinomio eguale al Polinomio generale X moltiplicato per $\frac{2b+2c}{b}$, e si troverà $b = -c$; $l = aqq$; $f = -a$; $g = 4a^3$, dimodochè sostituendo questi valori nell' equazioni (2) e (4), e procedendo, come si è fatto nell' Elisse, si vedrà parimente, che se si prende l'altra corda AC, la quale si chiami z tale, che abbiasi

$$z = \frac{aq\sqrt{4aa - xx}}{\sqrt{aaqq - acxx}}$$

e se dal centro O col raggio OC descrivesi l'Arco circolare CF, che sega la Cicloide nel punto F, si averà

$$\text{Arc. AB} - \text{Arc. GF} = \frac{2cxz}{aq} + \frac{2ccxz}{abq}$$

Corollarj

1. Quando $a = c$, allora $q = 2a$, e z è sempre uguale al diametro AH $= 2a$ dimanierachè l'Arco GF è nullo, e per conseguenza

Arc.

$$\text{Arc. AB} = 2x + \frac{2ax}{b}.$$

2. Ma quando c è infinita, allora l' Arco RSV cangiasi in una linea retta, e si ottiene

$$\text{Arc. AB} - \text{Arc. GF} = \frac{2cxz}{aa+ac}$$

3. Se oltre quest'ultima supposizione $a = c$, la Curua ABFG è la Cicloide ordinaria, e ritrovasi

$$\text{Arc. AB} = 2x$$

Altro Teorema che serve per misurare differentemente gli Archi dell' Iperbole

Teorema.

Sieno come sopra i due Polinomj X, e Z, io dico, che se si prenderà

$z = \frac{1}{x} \frac{\sqrt{gl}}{\sqrt{fh}}$ l'Integrale di X + Z sa-

rà

rà $\frac{1}{f}\sqrt{fxx+g}\sqrt{h+\frac{l}{xx}}$

Dimostrazione.

Introducendo nel Polinomio Z in luogo di z, e dz, i loro valori in x, e dx, e operando nel debito modo, si averà.

$$Z = -\frac{l}{f}\frac{dx}{xx}\frac{\sqrt{fxx+g}}{\sqrt{hxx+l}}$$

perlochè X + Z sarà eguale al differenziale di $\frac{1}{f}\sqrt{fxx+g}\sqrt{h+\frac{l}{xx}}$

Dunque ec. Q. E. D.

Applicazione all' Iperbole.

Chiamisi ($2b$) il secondo asse dell' Iperbole, e (q) il suo parametro, prendasi sul medesimo secondo asse prolungato qualunque abscissa x; egli è già noto, che l'Arco corrisponden-

te

. 278.

Fig. 2.

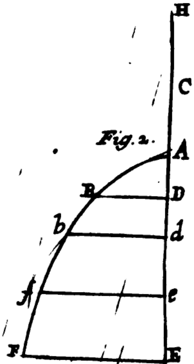

Fig. 4.