Vanuit Herkenning en Verbazing*

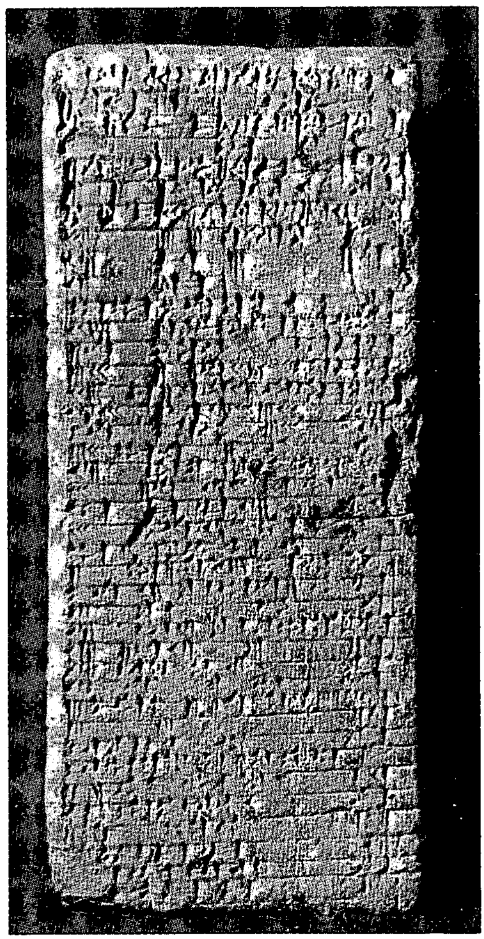
H. J. M. Bos

Herkenning en verbazing. – Deze twee ervaringen zijn essentiële drijfveren achter de belangstelling voor het verleden. Ik heb ze daarom als leidraad gekozen voor de presentatie van mijn vakgebied, de Geschiedenis van de Wiskunde, waartoe de aanvaarding van het ambt als buitengewoon hoogleraar mij vandaag de gelegenheid geeft.

Herkenning maakt het historische gebeuren bespreekbaar, en vormt zo het begin van de verbinding met het heden. Als die herkenning, de affiniteit, ontbreekt, dan zijn de vroegere gebeurtenissen nauwelijks historisch te beschrijven. Verbazing, anderzijds, is ook onmisbaar. Het onverwachte, het andere dat men tegenkomt, wekt nieuwsgierigheid en de verwachting dat er iets te ontdekken en te leren valt. Geschiedenis bedreven zonder die verbazing verarmt tot de mededeling van herkenbare zaken uit het verleden, die alleen afwijken van wat ons vertrouwd is doordat er een ander jaartal bij staat.

Laat ik dit illustreren met twee voorbeelden die bij mij die ervaringen sterk oproepen. Bij het eerste voorbeeld is dat vooral de herkenning. Het betreft een Babylonisch kleitablet[1] (zie Platen 1 en 2) dat in het Louvre museum wordt bewaard. Het dateert van omstreeks 1750 voor Christus. Het zal bij u wellicht niet meteen een reactie van herkenning te weeg brengen. De tekst bevat de oplossing van een wiskundige opgave. Er is sprake van een rechthoek met lengte, breedte en oppervlak. De som van lengte en breedte is 27; het verschil van lengte en breedte, opgeteld bij het oppervlak, levert 183. Gevraagd zijn de lengte en de breedte. Er zijn dus twee vergelijkingen met twee onbekenden. Wij lossen die op door eerst één onbekende te elimineren. Dat leidt ons tot een vierkantsvergelijking, waarvan wij de wortels vinden met de vertrouwde a,b,c-formule

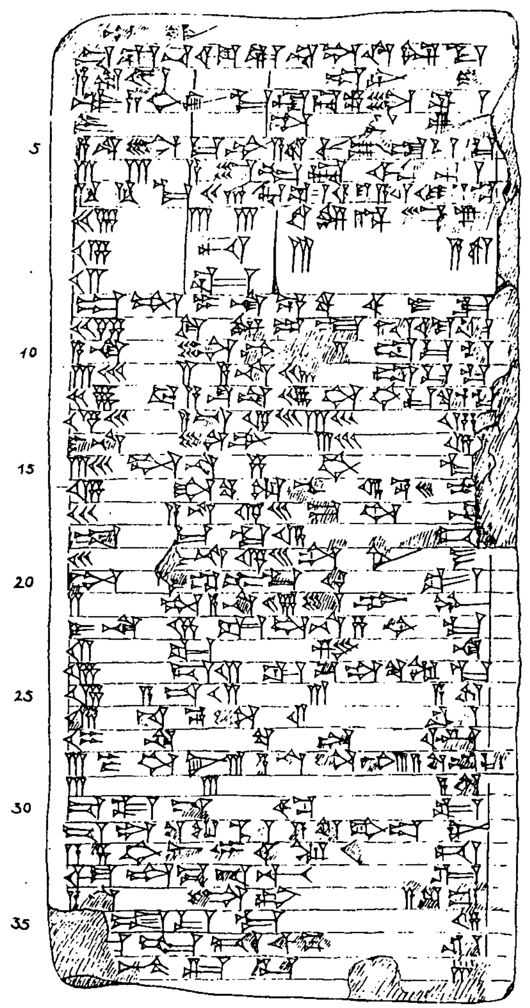
$$(1) \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Plaat 1. Babylonisch kleitablet met wiskundige tekst. Foto uit 'Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale', 29, (1932), Pl. I t.o. p. 4; zie noot 1.

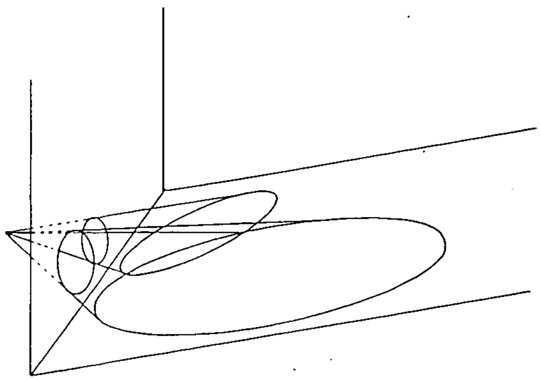
* Dit is de tekst van de rede die ik op 20 maart 1987 heb gehouden bij de aanvaarding van het ambt als buitengewoon hoogleraar in de Geschiedenis van de Wiskunde aan de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Rijksuniversiteit te Utrecht. Ten opzichte van de separaat gepubliceerde tekst (Utrecht, OMI Grafisch Bedrijf, 1987) wijkt deze versie af doordat de aanhef en de persoonlijke woorden aan het slot zijn weggelaten. Ook zijn enige fouten verbeterd.

Welnu, vrijwel net zo gebeurde het zo'n 4000 jaar geleden. Weliswaar staat de formule niet op het kleitablet, maar de getallen die de Babyloniër in zijn berekening opschreef (en die niet eens zo moeilijk zijn te lezen[2]) zijn dezelfde als die men tegenkomt bij het invullen en uitwerken van de a,b,c-formule. De procedures komen precies overeen.
Dit tablet is, sinds Neugebauer het in 1935 opnam in zijn grote studie over wiskundige spijkerschrift teksten, bijna een gemeenplaats geworden in de geschiedenis van de wiskunde. Ik kom het dus vaak tegen en ik kan u verzekeren dat het nog steeds een sterke ervaring van herkenning in me teweeg brengt: De a,b,c-formule, quintessens van de schoolalgebra, ondanks bijna 4000 jaar tijdsafstand direct herkenbaar! Een stuk cultuur dat onberoerd door op- en ondergang van beschavingen vrijwel ongewijzigd is gebleven. Hoe oud ook, dit is zonder twijfel wiskunde. Freudenthal sprak in zijn inaugurele rede[3] over 5000 jaar internationale wetenschap; het is vooral de wiskunde die ons in de oudste teksten op klei wetenschap laat herkennen. En die herkenning is een heel indringende ervaring. Het is ook een uitnodiging om nader stil te staan bij die oude Babylonische wiskunde; maar ik zal dat nu niet doen en overgaan tot een tweede voorbeeld waarbij het mij vooral om de verbazing gaat.

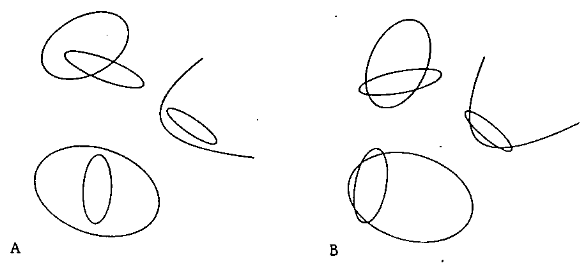


Plaat 2. Transcriptie van het tablet van Plaat 1; uit NEUGEBAUER, O., Mathematische Keilschrifttekste,' Berlin, 1935-37, dl 2, Pl. 35; zie noten 1 en 2.

Tijdens Napoleons Russische veldtocht in 1812 raakte de jonge genieofficier Jean-Victor Poncelet in krijgsgevangenschap. Achttien maanden verbleef hij in een kamp in Saratov, aan de Wolga. Hij vond afleiding in de wiskunde; in het bijzonder bestudeerde hij kegelsneden. Kegelsneden (zie Plaat 3) zijn beelden van cirkels onder projectie. Het schaduwbeeld dat een cirkel maakt op een vlak (een muur bijvoorbeeld) als het door een lichtbron beschenen wordt, is een kegelsnede; het vlak snijdt als het ware de schaduw uit de gevormde schaduwkegel. Poncelet keek naar beelden van paren cirkels. Plaat 4A toont een aantal beelden die men kan krijgen als men de twee cirkels (die in één vlak liggen) verschillende grootte en ligging geeft: een paar ellipsen bijvoorbeeld, of een ellips en een parabool; de twee beelden kunnen los van elkaar liggen, ze kunnen elkaar ook in twee punten snijden. Poncelet stelde zich de vraag: kan ik ieder mogelijk paar kegelsneden zo krijgen? Hij vond (zie Plaat 4) dat, zolang de twee kegelsneden niet meer dan twee snijpunten hebben, ze inderdaad zo verkregen kunnen worden. Dat is niet eenvoudig direct in te zien; Poncelet bewees het en het bewijs is lastig. Hij bemerkte ook dat bij vier snijpunten de zaak niet doorgaat. Dat is wel eenvoudig te begrijpen. Immers, het cirkelpaar dat als beeld twee kegelsneden met vier snijpunten zou hebben, zou zelf ook vier snijpunten moeten hebben, en dat kan niet bij cirkels.



Plaat 3. Twee cirkels in het verticale vlak worden vanuit een punt geprojecteerd op een ander vlak. De beelden zijn kegelsneden (in dit geval ellipsen).



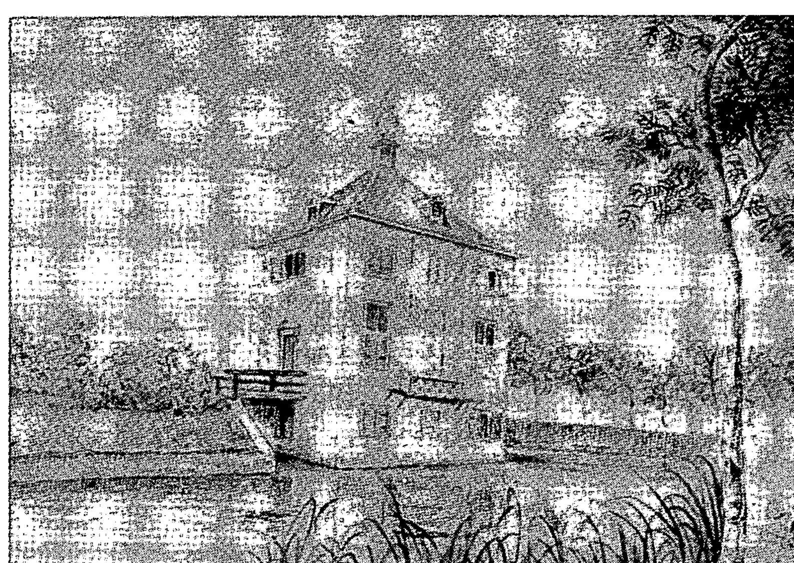
Plaat 4. Paren kegelsneden, links met twee of minder snijpunten; deze kunnen verkregen worden als projectie van een cirkelpaar. Rechts zijn er vier snijpunten; deze kunnen niet verkregen worden als projectie van paren cirkels.

Poncelet zag zich dus geconfronteerd met een onmogelijkheid en dat was een tegenslag voor hem. De theorie waaraan hij werkte[4] zou namelijk veel eenvoudiger opgezet kunnen worden als ieder tweetal kegelsneden wèl projectief beeld was van een paar cirkels. Nu is zo'n situatie niet ongebruikelijk in de wiskunde en we zijn gewend aan een specifieke reactie van wiskundigen: als binnen het voorhanden systeem iets onmogelijk is, dan construeert men een nieuw, uitgebreid systeem waarin het wel kan. Als het vervelend is dat aftrekken niet altijd kan, 7 – 5 kan wel, 2 – 5 kan niet, dan breidt men het getalsysteem uit en schept nieuwe getallen, de negatieve. Als men vindt dat de wortel ook uit negatieve getallen getrokken moet kunnen worden voert men imaginaire getallen in en dan kan het wel. Als men wil dat evenwijdige lijnen een snijpunt hebben, net als niet-evenwijdige lijnen, dan introduceert men snijpunten 'in het oneindige'. Men zou dus verwachten dat Poncelet iets dergelijks deed. Hij had bijvoorbeeld een imaginair projectiepunt of imaginaire cirkels in kunnen voeren. Veel latere wiskundigen hebben zijn werk ook zo geïnterpreteerd, omdat ze zich bij het lezen lieten meeslepen door datgene waaraan ze gewend waren. Maar als men goed leest merkt men dat Poncelet dit niet deed. Hij breidde het object van de meetkunde, dus de ruimte, niet uit. Wat deed hij wel? Hij introduceerde een uitbreiding van de regels van het wiskundig redeneren. Hij zei: hoewel het onmogelijk is dat twee kegelsneden met vier snijpunten projectief beeld zijn van twee cirkels, mogen we toch redeneren alsof ze dat zijn. Poncelet legde deze uitbreiding van het wiskundig redeneren vast in een principe, zijn beroemde en beruchte 'Principe de Continuité'. Ik zal niet proberen dat principe hier algemeen te formuleren; Poncelet's eigen pogingen tot formulering bleven steeds vrij vaag. In het geval van de paren kegelsneden houdt het principe in dat men zegt: Omdat alle paren kegelsneden met twee of minder snijpunten beeld zijn van een paar cirkels, mogen wij redeneren alsof die eigenschap algemeen geldt (dus ook voor twee kegelsneden met vier snijpunten). Dit niettegenstaande het feit dat we weten dat dat gewoon niet waar is.

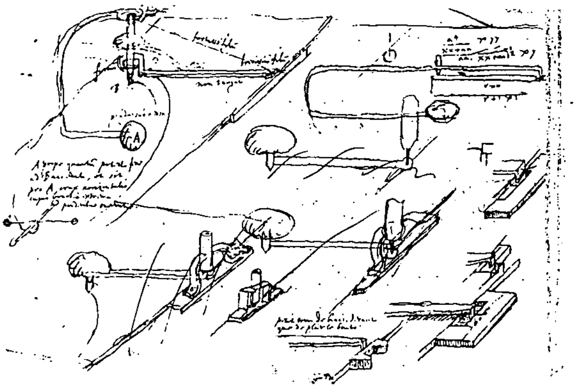
Nu, dat is verbazend. Het is verbazend omdat het een manier van denken toont die in de wiskunde niet meer gebruikelijk is. Redeneringen moeten kloppen; ze mogen niet van evident foute veronderstellingen uitgaan. Poncelet zei dat dat wel kon – verbazing. Die verbazing is ook uitnodigend en het is een dankbare opgave om die uitnodiging aan te nemen. Als men namelijk Poncelet hierin serieus neemt en zijn Principe de Continuité aanvaardt als principe waarmee wiskundigen toen werkten en resultaten bereikten, komt men op het spoor van een manier van denken die in die periode meer voorkwam. Het was zelfs een vruchtbare manier van denken (want merkwaardig genoeg waren de stellingen die Poncelet met behulp van zijn principe afleidde wel vrijwel allemaal juist), die op interessante wijze aansloot bij filosofische stromingen in de late achttiende eeuw.[5] Al die aspecten ziet men pas als men zich openstelt voor de werking van de verbazing, en zich niet laat afleiden door wat men verwacht te vinden uitgaande van de veronderstelling dat het allemaal wel herkenbaar zal zijn.

Na deze twee korte voorbeelden wil ik graag wat dieper ingaan op een episode uit de geschiedenis van de wiskunde die deel uitmaakt van mijn tegenwoordig onderzoek. Ik kan er, hoop ik, iets mee laten zien van wat mij in dat onderzoek fascineert. De episode begon in het najaar van 1692 en wel in Voorburg of misschien in Den Haag. In Voorburg lag het buiten Hofwijck (zie Plaat 5). Het ligt er nog, eigenlijk niet meer dan een wat brede toren in een gracht, u kunt het op reis naar Den Haag vanuit de trein zien liggen. Waar vroeger de tuinen van het kasteeltje waren is nu het parkeerterrein van station Voorburg. Vanaf 1688 woonde Christiaan Huygens op Hofwijck, zij het dat hij in de wintermaanden de voorkeur gaf aan een appartement aan het Noordeinde in Den Haag. In 1692 was Huygens 63 jaar oud, zijn wetenschappelijke carrière goeddeels achter zich, maar nog zeer actief, zijn briefwisseling en zijn nagelaten manuscripten getuigen daarvan. Onder die manuscripten bevinden zich 10 bladen, gedateerd 29 October – 20 November 1692, van een wat ongewoon karakter.[6] De uitgevers van Huygens' *Œuvres Complètes* wisten er niet goed raad mee en besloten ze niet in extenso te publiceren; wel werden een samenvatting en enige karakteristieke citaten opgenomen.

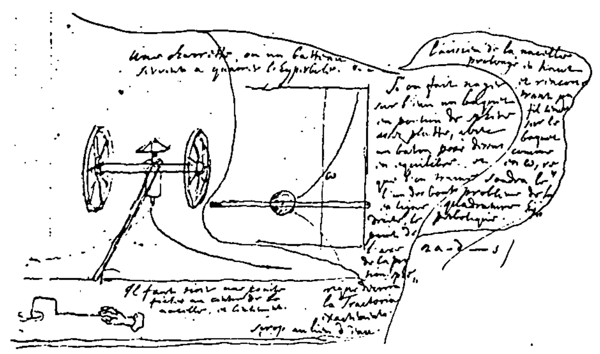
Ik meen dat deze manuscripten meer aandacht verdienen. Ze gaan over het mechanische proces van *slepen*. Huygens bestudeerde in het bijzonder de sleepbeweging die optreedt wanneer een zwaar lichaam langzaam over een horizontaal vlak gesleept wordt met behulp van een koord of een staaf, die er aan vast gemaakt is en waarvan het andere uiteinde langs een rechte lijn gevoerd wordt. De manuscripten tonen dat Huygens veel tijd en energie gaf aan het probleem om het sleepproces mechanisch uit te voeren, en wel op zo'n manier dat de baan van het gesleepte object zo precies mogelijk als een kromme op het horizontale vlak gemarkeerd wordt. Hij overwoog (zie Plaat 6) om een tekenspits met een gewicht te belasten en het geheel te slepen met een staaf; hij schetste allerlei manieren om het uiteinde van de staaf langs een rechte lijn te voeren. Het gewicht werd boven op de spits gelokaliseerd, of loodrecht eronder, verbonden via een beugel rond het tafelblad, blijkbaar om te zorgen dat de stift niet uit het lood werd geduwd door het



Plaat 5. Het buiten Hofwijck, tekening door Christiaan Huygens (Univ. Bibl. Leiden – Ms. Hug. 14, fol. 5r.).

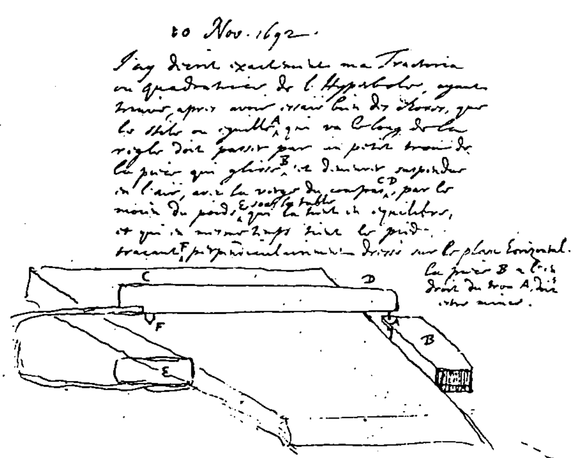


Plaat 6. Huygens' eerste schetsen voor het sleepinstrument (Univ. Bibl. Leiden, Ms Hug. 6, fol. 59r).

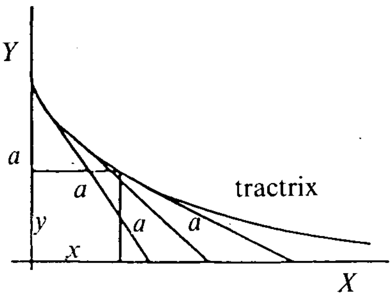


Plaat 7. Detail uit Huygens' manuscript over de sleepbeweging (Univ. Bibl. Leiden, Ms. Hug. 6, fol. 64r).

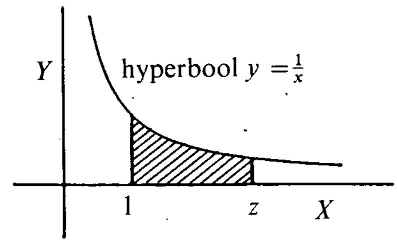
gewicht. We zien stelschroeven, om het vlak precies horizontaal te stellen. Huygens tekende ook (zie Plaat 7) een karretje dat rijdt over het oppervlak en daarbij de kromme tekent, en hij overwoog nog om het lichaam te laten drijven op een vloeistofoppervlak (voordeel: dat staat zeker horizontaal), hij dacht aan stroop (dat levert veel wrijving) of water.
Plaat 8 toont het ontwerp dat Huygens uiteindelijk het best beviel; voor zover uit de stukken valt op te maken heeft hij het instrument ook inderdaad gemaakt en er de kromme mee getrokken. Toch bleef hij ook daarna nog naar alternatieven zoeken; hij werkte de mogelijkheid van slepen van drijvende lichamen verder uit, hij overwoog ook de wrijving van het lichaam te vergroten door het gebruik van een kolf die men verhit en die zich dan op het oppervlak vastzuigt, wat grote weerstand moet opleveren. Verder wijdde Huygens vele pagina's aan het exact horizontaal stellen van het oppervlak met behulp van een waterpas – een toen zeer recente uitvinding waarvoor Huygens nog terloops een controleprocedure uitwerkte. De horizontale stand van het vlak is noodzakelijk; stond het scheef dan zou de zwaartekracht een zijwaartse afwijking van de kromme veroorzaken. Huygens voerde de zorg over een eventuele zijwaartse afwijking zelfs zover dat hij opmerkte dat de aardse aantrekkingskracht niet langs parallelle lijnen werkt maar gericht naar het centrum der aarde, zodat er eigenlijk maar één punt van de tafel is waar de kracht werkelijk loodrecht op het vlak gericht staat.
Wat gebeurt hier? Waarom ondernam Huygens deze studie? Ging het hem er om de sleepbeweging als natuurwetenschappelijk verschijnsel te beschrijven? Of om de sleepbeweging bruikbaar te maken voor enig praktisch doel? Ging het hem om de uiterste precisie? Nee, de belangrijkste motivatie lag elders. Om dat te verduidelijken moet ik eerst aangeven om welke kromme het hier gaat en welke wiskundige eigenschappen die kromme heeft. Huygens noemde de kromme die het gesleepte object beschrijft de *Tractoria*, later is de naam *Tractrix* meer gebruikelijk geworden. De definiërende eigenschap is dat het stuk van de raaklijn tussen as en kromme steeds constant is, het is namelijk de lengte van het koord waarvan het andere uiteinde langs de



Plaat 8. Huygens' definitieve schets van het sleepinstrument (Univ. Bibl. Leiden, Ms. Hug. 6, fol. 66r.).



Figuur 1



Figuur 2

as gevoerd wordt; door de wrijving volgt het lichaam steeds de richting waarin het koord trekt (zie Figuur 1). De differentiaalvergelijking waaraan de kromme voldoet is dus

$$(2)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

en men leidt daaruit eenvoudig af dat de vergelijking van de kromme is:

$$(3)\quad x = a\log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Huygens zelf beschreef de relatie tussen de coördinaten x en y van punten op de kromme niet met behulp van deze vergelijking. Hij onderkende die relatie wel, maar formuleerde hem in meer meetkundige termen. In het bijzonder onderkende hij het voorkomen van de logaritme. Die logaritme interpreteerde hij ook meetkundig, namelijk als wat hij noemt de 'quadratuur van de hyperbool'. Wij herkennen daarin de in de volgende formule weergegeven relatie:

$$(4)\quad \log z = \int_1^z \frac{dx}{x}.$$

Immers (zie Figuur 2) de integraal in het rechterlid beschrijft het oppervlak (de 'quadratuur') van het aangegeven vlakdeel onder de hyperbool met vergelijking

$$(5)\quad y = \frac{1}{x}.$$

Keren we nu terug naar de vraag naar Huygens' motivatie bij deze onderzoekingen. Wilde Huygens de sleepbeweging als natuurverschijnsel wiskundig beschrijven? Nee, daartoe zou de relatie van Formule (3) voldoende zijn, de verdere onderzoeking naar het precies trekken van de kromme is dan overbodig. Ook zien we geen praktisch doel gediend met al de verschillende manieren van slepen die Huygens onderzocht. Ging het dan om precisie bij het beschrijven der kromme? In zekere zin wel; Huygens legt er de nadruk op dat de kromme door de beweging zeer precies getrokken moet worden. Anderzijds kan dit niet de volledige motivatie zijn omdat Huygens een veel precieser en eenvoudiger middel om de kromme te trekken ter beschikking stond, namelijk logaritmentafels. Met behulp van zulke tafels zou hij uit de relatie van formule (3) de coördinaten van punten op de kromme kunnen bepalen met een nauwkeurigheid die met trekken op papier niet te verkrijgen is. Zo het al om precisie ging bij Huygens dan was het niet een praktische precisie maar een ideële.

Laten we, om na te gaan wat er dan wel achter Huygens' inspanningen zat, onderzoeken wat hij zelf over de motivatie van zijn onderneming noteerde. Hier zijn enkele karakteristieke citaten. In het eerste vergelijkt hij zijn instrument met de klassieke meetkundige instrumenten passer en liniaal:

'Men moet toegeven dat, wanneer mijn kromme verondersteld of gegeven is, men de quadratuur van de hyperbool heeft. Als ik dus enig middel vind om hem even exact te beschrijven als men met een gewone passer een cirkel beschrijft, heb ik dan niet die quadratuur gevonden? (-) Weliswaar heb ik nodig dat een vlak evenwijdig aan de horizon geplaatst wordt, maar dat is mogelijk, niet in alleruiterste precisie, maar zoals een liniaal recht is. Voor het overige beschrijf ik mijn kromme met vrijwel evenveel gemak als een cirkel en de machine die ik gebruik komt wat eenvoud betreft dicht bij een passer.'"[7]

Bij zijn eerste schets van het lichaam dat over een vloeistofoppervlak gesleept wordt (zie Plaat 7) noteert hij dat die constructie

'het probleem van de hyperbolische quadratuur zal oplossen';[8]

en bij de tekening van het karretje op hetzelfde vel:

'Een karretje of een bootje kan gebruikt worden om de hyperbool te quadreren".[9]

We concluderen dat Huygens' tractrix niet diende als wiskundig model om de sleepbeweging te beschrijven maar omgekeerd: de sleepbeweging hielp Huygens de tractrix wiskundig in handen te krijgen, en daarmee de hyperboolquadratuur en alle andere meetkundige problemen die daarvan afhangen.

Waarom was dat nodig? Omdat blijkbaar de hyperboolquadratuur (wij zouden zeggen, de logaritme-functie) niet als echt bekend werd beschouwd en omdat een kromme als de tractrix voorheen niet zonder meer goed genoeg was om in de meetkunde te dienen als oplossing van problemen, Wie bepaalde nu zoiets? In dit geval was dat Descartes. Descartes had zo'n vijftig jaar eerder zich heel nadrukkelijk uitgesproken over wat wel en wat niet aanvaardbaar was in de meetkunde. Krommen waren aanvaardbaar als ze, in de nieuwe analytische meetkunde die Descartes invoerde, vergelijkingen hadden die algebraïsch waren, dat wil zeggen, als er in die vergelijkingen geen andere bewerkingen dan optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen voorkwamen. De tractrix heeft niet zo'n vergelijking, het is een transcendente, dat wil zeggen niet-algebraïsche kromme. Huygens had ook onderkend dat voor zijn kromme geen algebraïsche vergelijking op te schrijven was en dat dus binnen de Cartesiaanse afgrenzing van de meetkunde de kromme niet acceptabel was. Daar verzette hij zich tegen.
Overigens, toen Descartes de bovengenoemde begrenzing van de meetkunde stelde was dat niet een beperking van het vak maar een uitbreiding. Vóór Descartes werden de grenzen, voorzover ze precies werden omschreven, veel enger getrokken. Maar Huygens voelde de bredere omgrenzing die Descartes had opgesteld alweer als te eng. Hij noteerde dat al op een der eerste bladen van zijn studie:

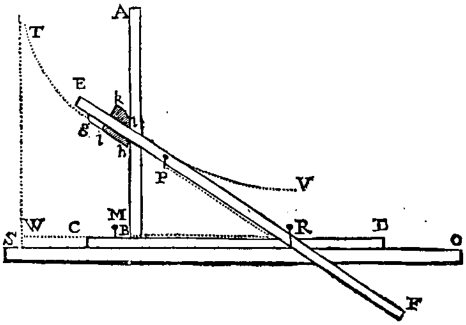
'Ten onrechte verwierp Descartes in zijn meetkunde krommen welker natuur hij niet met een vergelijking kon weergeven. Hij had er beter aan gedaan toe te geven dat zijn meetkunde daar nog een beperking had en ontoereikend was voor de behandeling er van.'[10]

Dat het Huygens vooral er om ging het predicaat 'geometrisch' te verlenen aan zijn kromme blijkt ook uit de publikatie die hij een jaar later aan de kromme wijdde. Hij legde daarin de sleepbeweging uit (hoewel zonder expliciete beschrijving van het instrument) en schreef:

'Als deze beschrijving, die naar de wetten der mechanica exact moet zijn, als geometrisch aanvaard zou kunnen worden, evenals de beschrijving van kegelsneden met instrumenten die men daarvoor heeft, dan had men daarmee zowel de quadratuur van de hyperbool als de perfecte constructie van alle problemen die gereduceerd kunnen worden tot die quadratuur.'[11]

En in een brief aan Leibniz uit deze tijd merkte Huygens enigszins ongerust op dat Bernoulli twijfels had uitgesproken over de 'geometricité' van de kromme.[12]

Het ging Huygens dus niet louter om het maken van een precisie-instrument; het ging hem om het verleggen van de grenzen van de zuivere meetkunde. Nu, dat geeft genoeg reden tot verbazing: een mechanische legitimatie binnen de wiskunde? De grenzen van zuivere meetkunde verleggen met gewichten, waterpassen, karretjes en zelfs stroop? De verbazing is uitnodigend, laten we ons verder verdiepen in de achtergrond van deze denkwijze.
Daartoe stellen we allereerst vast dat het niet zomaar een persoonlijke eigenaardigheid van Huygens was om op deze knutselende, doe-het-zelf manier het probleem te benaderen. Het motief van de sleepbeweging als mechanische legitimatie van transcendente krommen duikt in de periode van de vroege differentiaal- en integraalrekening herhaaldelijk op. Geen centraal thema in de ontwikkeling van de wiskunde, maar een vaak tussengeweven motief, zeker herkenbaar en vertrouwd voor tijdgenoten. Huygens publiceerde zijn ideeën in 1693.[13] Ze werden meteen opgenomen door Leibniz, die, karakteristiek, meedeelde dat hij al eerder op hetzelfde idee was gekomen en een schets gaf van een gegeneraliseerde sleepmachine waarmee allerlei differentiaalvergelijkingen opgelost zouden kunnen worden.[14] Een zekere John Perks bedacht een



Plaat 9. John Perks' sleepinstrument voor de hyperboolquadratuur (zie noot 15).

sleepinstrument (zie Plaat 9), waar de wiskundige De Moivre blijkbaar genoeg in zag om een artikel erover van Perks te laten plaatsen in de *Philosophical Transactions* van 1706 onder de titel 'Nieuwe quadratrix van de hyperbool'.[15] In 1728 nam de Italiaanse geleerde Poleni het onderwerp weer op. Hij ontwierp een sleepinstrument (zie Plaat 10) en zond exemplaren naar drie collega's, met het argument, alweer, dat door dat instrument nu eindelijk de hyperboolquadratuur meetkundig aanvaardbaar opgelost was. Zijn correspondenten reageerden positief. Een van hen, Jacopo Riccati, greep de gelegenheid aan om zijn mening over de rol van constructies in de zuivere wiskunde uitvoerig op papier te zetten. Poleni publiceerde zijn onderzoek een jaar later, hij voegde de brieven der anderen als appendix toe.[16] Ook bij Euler[17] en in later werk van Riccati[18] vinden we het motief van de sleepbeweging terug. En steeds gaat het dan niet om de wiskundige beschrijving van de sleepbeweging, maar, omgekeerd, om de legitimatie van transcendente krommen als bruikbare oplossingen in de meetkunde.

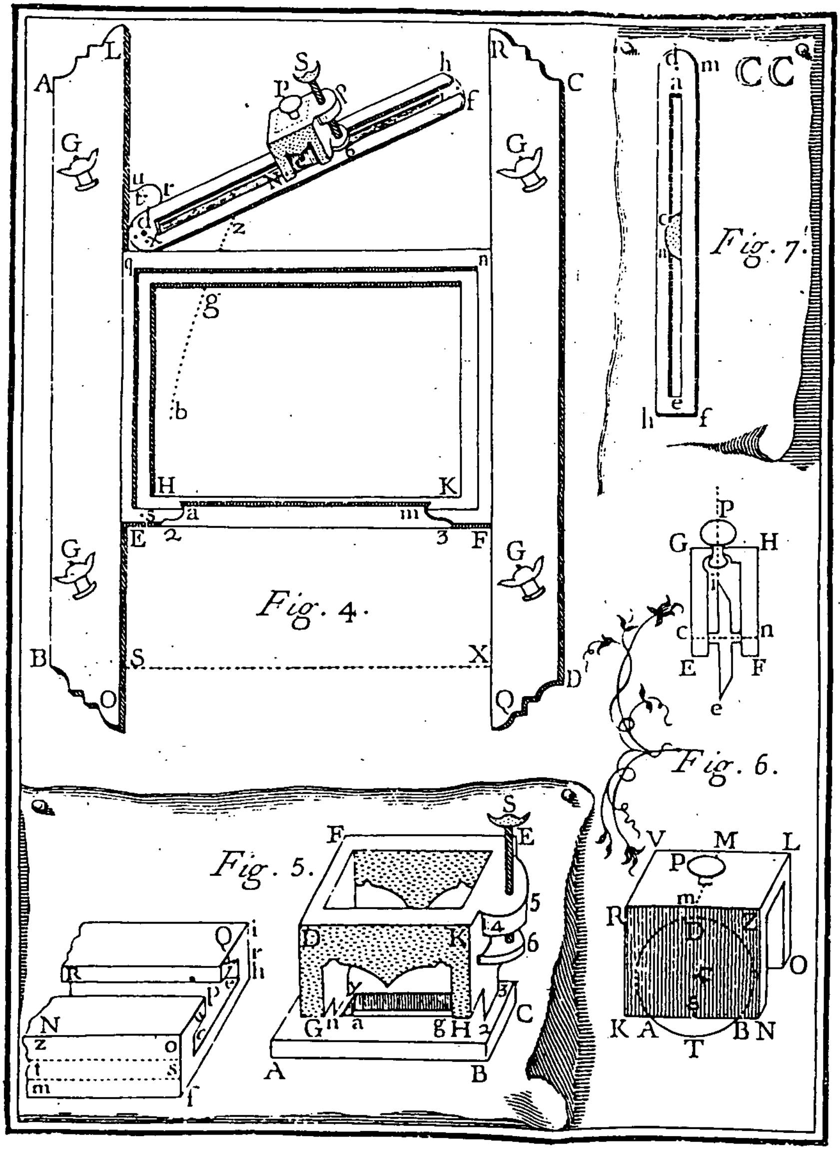
Keren we terug naar Huygens. Hij stond dus niet alleen in zijn belangstelling voor de sleepbeweging in verband met de vraag naar de rechtmatige grenzen van de meetkunde. Onze eerste verbazing heeft ons geleid naar aspecten van vroegere wiskunde die we niet meer zo goed herkennen. Laten we proberen deze voor ons ongebruikelijke denkwijze verder te analyseren om te zien wat we op het spoor zijn gekomen.

Huygens deed dus in een zeer letterlijke, maar niet de nu gebruikelijke, betekenis van de term, grensverleggend onderzoek. Het ging er om grenzen, die eerdere wiskundigen aan de meetkunde hadden gesteld, te verleggen, zekere objecten die eerder buiten de meetkunde werden gehouden als meetkundig aanvaardbaar te legitimeren. Daarbij greep Huygens terug op de mechanische verbeelding, aansluitend bij de klassieke constructie instrumenten van de meetkunde, passer en liniaal.

Die legitimatie had een specifieke functie: een gelegitimeerd object kon als oplossing gelden. Huygens meende dat zodra de tractrix gelegitimeerd was als aanvaardbaar meetkundig object, het probleem van de hyperboolquadratuur opgelost was en daarmee ook alle andere problemen die op de hyperboolquadratuur teruggevoerd konden worden.

De legitimatie betreft de structuur van de wiskundige onderneming: door zekere objecten te legitimeren maakt men zekere problemen oplosbaar die dat voordien niet waren. Het gaat dus om een cruciale vraag in de wiskundige activiteit: wanneer mag ik een probleem als opgelost beschouwen? Wanneer mag ik een object als voldoende bekend beschouwen? Wat zijn de criteria voor oplossing en kennis binnen de wiskunde, in dit geval de meetkunde? Het debat over legitimatie is eigenlijk het debat waarin deze criteria worden gezocht. Dat debat beperkte zich zeker niet tot het thema van de sleepbeweging dat ik als illustratief voorbeeld heb gebruikt. We vinden vergelijkbare discussies in allerlei onderdelen van de wiskunde; in de vroeg moderne meetkunde, bij Descartes, bij de invoering van de algebra in de meetkunde, bij de infinitesimaalrekening, bij de invoering van transcendente krommen. Al die vernieuwingen werden als het ware begeleid door discussies over de vraag: wanneer is een probleem opgelost, wanneer kennen we een object werkelijk? Op dit punt moeten we natuurlijk wel een voor de hand liggende tegenwerping verwachten: hebben wiskundige problemen niet gewoon een oplossing? Een antwoord, een getal of een bewijs dat goed of fout is? Voor goed of fout is toch geen ingewikkelde legitimatie nodig? Het antwoord is nee, zo eenvoudig ligt de zaak niet. Wiskunde is een exacte wetenschap, dat zeker, maar over de vraag wat exact betekent moet wel eerst onder de beoefenaren van de wiskunde een consensus bereikt worden. Dat kan niet op een willekeurige manier; het wiskundig object legt sterke beperkingen op, maar het blijft een consensus. Die consensus groeit en verandert in de loop der tijd. De episode van de sleepbeweging is dus interessant omdat we hier dat proces kunnen bestuderen. We zien hoe wiskundigen inhoud proberen te geven aan het begrip exactheid. Door de tractrix te legitimeren wordt het begrip exacte meetkundige oplossing verbreed zodat het probleem van de hyperboolquadratuur oplosbaar wordt. Het proces is niet voltooid; later zijn de ideeën over exactheid binnen de wiskunde weer verschoven. Maar dat maakt het proces dat we hier kunnen bezien niet minder belangrijk.

Het ging dus om de vraag: wanneer is een probleem opgelost? Wanneer is een object voldoende bekend? Die vraag speelde niet alleen bij de hyperboolquadratuur en de tractrix, hij werd telkens weer gesteld en besproken in de periode van de vroeg moderne wiskunde. Het is verhelderend te bestuderen wat wiskundigen over die vraag schreven. Zo'n studie helpt in het begrijpen van de beelden en de terminologie in de wiskundige teksten, zoals het feit dat krommen niet worden omschreven door hun vergelijkingen maar door vaak



Plaat 10. Poleni's sleepinstrument (zie noot 16).

zeer gecompliceerde geometrische constructieprocedures. Of het feit dat men tot ver in de achttiende eeuw sprak van het construeren van differentiaalvergelijkingen waar wij zouden zeggen het oplossen van differentiaalvergelijkingen. Ook een aantal op het eerste gezicht curieuze aspecten en ontwikkelingen in de wiskunde vallen door deze studie in een begrijpelijk patroon. Dat kan kleinere zaken betreffen, zoals de fascinatie met de sleepbeweging, en bijvoorbeeld de merkwaardige voorkeur van een aantal wiskundigen rond 1700 om integralen niet als oppervlakten maar als booglengten te interpreteren. Het kan ook bredere ontwikkelingen betreffen, zoals het geval van de theorie van de 'constructie van vergelijkingen' die gedurende meer dan een eeuw een vrij belangrijke plaats in de wiskunde innam en daarna binnen korte tijd volledig verdween.

Toch blijven de argumenten over de vraag wanneer een probleem is opgelost in zekere zin ongrijpbaar en onwezenlijk. Ongrijpbaar omdat de vraag principieel onbeslisbaar is; men kan dus desgewenst eeuwig van mening blijven verschillen. En onwezenlijk omdat men een gemis ervaart in diepgang en kwaliteit van de argumenten. Eigenlijk zit dat toch achter de verbazing over Huygens' geknutsel met schuifgewichten, karretjes en stroop, het lijkt zo mager. Er zijn andere voorbeelden te noemen, zoals Leibniz' serieus bedoelde voorstel om geen logaritmentafels op zeereizen mee te nemen, maar een ketting die men vrij hangt voor grafiekenpapier zodat men, met wat wiskundige verdere kennis, de logaritmen kan aflezen.[19] Men komt veel quasipraktische argumenten tegen van een soort dat men denkt: zou dat nou echt serieus bedoeld zijn? Dit brengt ons op een iets ander spoor. Het gaat namelijk ook eigenlijk helemaal niet om de argumenten, maar om het proces dat daar achter zit. De vraag was wanneer een wiskundig object voldoende bekend is om, zonder nadere bepaling, als oplossing van een probleem te gelden. Welnu, bekendheid is niet een objectieve zaak, maar een subjectieve. Wat nu bekend wordt geacht kan een generatie geleden nog als zeer problematisch zijn beschouwd. De logaritmische functie was voor Huygens bijvoorbeeld nog problematisch; latere onderzoekers laten hem zonder bezwaar in formule (3) staan. Intussen hebben zij niet essentieel meer over die functie geleerd dan Huygens. Ze hebben iets anders gedaan: ze zijn aan de functie gewend. Dat verklaart waarom de discussies na zeker tijd verstommen, waarom ze een legitimerende ondertoon hebben, waarom ze onbeslisbaar zijn en waarom de redeneringen soms zo mager lijken: hoe serieus bedoeld de argumenten ook zijn, waar het eigenlijk om gaat is het proces van gewenning dat er achter speelt. Zulke processen van gewenning speelden natuurlijk niet alleen in de wiskunde van de vroeg moderne periode, ze zijn algemeen. Ze zijn vrij weinig bestudeerd. Ik denk dat ze meer aandacht verdienen omdat ze interessant en belangrijk zijn. Zo mag dus het verhaal over de sleepbeweging ook gelden als illustratie van een soort processen in de wetenschapsontwikkeling waarover de studie van de Geschiedenis van de Wiskunde meer inzicht kan brengen.

Ik heb u een episode uit de geschiedenis van de wiskunde voorgelegd, die van de sleepbeweging en de tractrix. Ik heb de vragen genoemd die men, geprikkeld door verbazing, er aan verbinden kan, en de sporen waarop men gevoerd wordt als men die vragen gaat vervolgen. Het is maar een kleine episode, gelicht uit veel grotere ontwikkelingen. Ik hoop dat het verhaal toch verhelderend is geweest als illustratie van een benadering die men zou kunnen omschrijven als „Ideeëngeschiedenis van de Wiskunde". Die benadering richt zich vooral op de grondbegrippen van de wiskunde, en de ideeën, voorstellingen en vragen die daarover bij vroegere wiskundigen leefden. Dit is een onderdeel van de geschiedenis van de wiskunde waar ik me het meest thuis voel, ik meen ook dat het een zeer belangrijk onderdeel is van het vak; maar het is zeker niet het enige.
Het vak dat met deze buitengewone leerstoel een nadere universitaire bevestiging heeft gekregen, is veel breder. Het omvat een tijdsspanne van meer dan 5000 jaar. Culturen over de gehele aardbol hebben herkenbare wiskunde bedreven en aan de ontwikkeling van die kennis bijgedragen. Men kan zich in het historisch onderzoek van die ontwikkeling op ideeën en begrippen concentreren, maar er zijn ook heel andere benaderingswijzen mogelijk. Er is de sociale geschiedenis van de wiskunde – een aanpak die ik nu als vanzelfsprekend noem, me met enige verbazing herinnerend hoe ontstemd en ver-

ontrust er vijftien jaar geleden nog gereageerd werd op de verbinding van de woorden sociaal of maatschappelijk, en wiskunde. Er is de institutionele geschiedenis, en de meer biografisch gerichte aanpak. Er is de geschiedenis van de wiskunde in afzonderlijke culturen en landen, niet in de laatste plaats de wiskunde in Nederland. Men kan ook zeer vruchtbaar de geschiedenis van de wiskunde bestuderen binnen het bredere kader van de wetenschapsgeschiedenis. Men vervolgt dan het functioneren van de wiskunde binnen het streven van mensen om de natuur te begrijpen en te beheersen, de successen en tegenslagen daarbij en de opeenvolging van stijlen, stromingen, -ismen, revoluties en normale periodes die men in de lange geschiedenis van dat streven onderkent. Ik meen dat al deze benaderingen zeer zinvol zijn, en dat ze in het onderwijs een plaats kunnen krijgen voorzover tijd, vaardigheid en belangstelling van de studenten dat toelaat.
Voor onderzoek moet men natuurlijk sterker rekening houden met beperkingen van tijd en vaardigheid. Mijn persoonlijke keuze van onderzoeksthema's ligt op het terrein boven omschreven als ideeëngeschiedenis van de wiskunde. Dat is omdat me dat ligt, niet omdat dat de beste benadering van het wiskundig verleden zou zijn.

Er blijft nog een zeer belangrijke vraag te noemen: waar gaat het eigenlijk om bij de geschiedenis van de wiskunde? Wat is het object dat onderzocht wordt en waarover wordt onderwezen? Is het de wiskunde zoals die in het verleden voorkwam (en die nu dus dood is)? Nee, die formulering miskent het belang van verbazing en herkenning. Verbazing en herkenning verwijzen ernaar dat geschiedenis wordt bedreven door en geschreven voor mensen die nu leven. Het object beschouwen zonder die relatie met het heden te overwegen is misleidend, men kan bij het denken over het verleden het heden niet uitschakelen.
En hier duikt de bekende metafoor op van geschiedenis als collectieve herinnering; die metafoor bevredigt mij het meest bij de beantwoording van de vraag waar het om gaat. Geschiedenis van de wiskunde is geschiedenis en dus onderdeel van de collectieve herinnering van onze cultuur. Zo past het vak, samen met de wetenschapsgeschiedenis, in de algemene geschiedenis. Daar neemt het echter een bescheiden hoekje in, dat ook nog weinig toegankelijk is omdat het oproepen van die herinnering toch wel enigszins intensieve ervaring met wiskunde vooronderstelt.

Geschiedenis van de wiskunde is echter ook, en meer in het bijzonder, de collectieve herinnering van de gemeenschap van wiskundigen. Ik geloof dat hier het primaire belang van het vak ligt en daarmee ook het antwoord op de vraag waar het eigenlijk om gaat. Net als voor mensen en voor naties, is het voor een wetenschapsgebied, een gemeenschap van vakgenoten, belangrijk om herinneringen serieus te nemen, het eigen verleden niet te verdringen, zo nodig half vergeten zaken op te diepen uit de herinnering, en in elk geval niet het eigen verleden af te doen als onbelangrijk, onvolwassen of onrijp. Geschiedenis van de wiskunde helpt dus bij de zelfreflectie van een vakgebied. Ik geloof oprecht dat dat zeer belangrijk is. Ik hoop door mijn werk aan die zelfreflectie bij te dragen.

Noten

1 De tekst is beschreven in THUREAU-DANGIN, F., 'Le prisme mathématique AO 8862', *Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale, 29* (1932), pp. 10, en in NEUGEBAUER, O., *Mathematische Keilschrifttekste*, Berlin, 1935-1937, dl 1, p. 113, dl 2, pl. 35. Zie Platen 1 en 2.

2 Getallen worden in de Babylonische wiskunde genoteerd met een zestigtallig positioneel stelsel, opgebouwd uit twee tekens: *V* en <. *V* staat voor 1, maar kan, afhankelijk van de positie, ook 60, 60 × 60, 60 × 60 × 60, of 1/60, (1/60) × (1/60), etc. betekenen. < staat voor 10 keer *V*, en betekent dus 10, of 600, of 1/6 etc. De interpretatie van de tekens hangt af van de context (in dit geval de oplossing van de vergelijkingen). De meeste regels op het tablet beginnen (links) met een getal. Die getallen zijn: r. 6: 183; r. 8 (onder elkaar): 27, 15, 12; r. 9: 27; r. 11: 210; r. 12: 29; r. 13: $14\frac{1}{2}$; r. 15: 210; r. 16: $\frac{1}{4}$; r. 17: $\frac{1}{2}$; r. 19: $\frac{1}{2}$; r. 21: 2; r. 23: 12; r. 24: 15; r. 25: 15; r. 26: 15; r. 28: 3; r. 29 183. Als men deze getallen geïdentificeerd heeft is het niet meer moeilijk de overige getallen in de tekst op te sporen. Het zijn: r. 8: 183, 180; r. 11: 2, 27 (niet geheel leesbaar); r. 12: 29; r. 13: $14\frac{1}{2}$, $210\frac{1}{4}$; r. 14: $210\frac{1}{4}$; r. 16: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$; r. 17: $14\frac{1}{2}$; r. 18: 15; r. 19: $14\frac{1}{2}$; r. 20: 14 (niet geheel leesbaar); r. 21: 27; r. 22: 14; r. 24: 12; r. 25: 12, 180; r. 26: 12; r. 28: 3, 180.

3 FREUDENTHAL, H., *5000 Jaren internationale wetenschap* (rede Utrecht 9-12-1946), Groningen, 1946.

4 Die theorie betrof eigenschappen van paren kegelsneden, in het bijzonder de eigenschap die beschreven is in de 'Sluitingsstelling van Poncelet'. Verdere details over het hier vermelde in BOS, H. J. M., KERS, C., OORT, F. & RAVEN, D. W., 'Poncelet's closure theorem', de verschijnen in *Expos. Math.*

5 Vergelijk DASTON, L. J., 'The physicalist tradition in early nineteenth century French geometry', *Stud. Hist. Phil. Sci., 17* (1986), pp. 269-295.
6 Univ. Bibl. Leiden, Ms. Hug. 6, ff. 59r-68r. Samenvatting en enkele citaten in HUYGENS, C., *Œuvres Complètes, 10*, pp. 409-413.
7 Fol. 62 r, ook geciteerd in HUYGENS, C. *Œuvres Complètes 10*, p. 412, noot. Huygens schreef in het Latijn en het Frans. Hier en in de volgende citaten zijn de vertalingen van mij.
8 Fol. 64 r, ook geciteerd in *Œuvres, 10*, p. 411, noot.
9 Fol. 64 r.
10 Fol. 60 v.
11 'Lettre de Mr Huygens à l'Auteur', *Hist. Ouvr. des Sav.*, Febr. 1693, pp. 244 e.v., *Œuvres, 10*, pp. 407-417, citaat p. 411.
12 Huygens aan Leibniz, 17-9-1693, *Œuvres, 10*, pp. 509-512, citaat p. 510.
13 Zie noot 11.
14 LEIBNIZ, G. W., 'Supplementum geometriae dimensoriae' *Acta Eruditorum* 1693 (September); in *Mathematische Schriften* (ed. C. I. Gerhardt, Berlin, 1849-63) dl 5, pp. 294-301.
15 PERKS, J., 'The construction and properties of a new quadratrix to the hyperbola', *Phil. Tr.* (1706, # 306).
16 POLENI, Joh. *Epistolarum mathematicarum fasciculus*, Padua, 1729, brief nr. 7.
17 EULER, L., 'De constructione aequationum ope motus tractorii aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentibus', *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 8* (1736/1741) pp. 66-85; in EULER, L. *Opera Omnia* Ser 1, vol. 22, pp. 83-107.
18 RICCATI, Vincenzo, *De usu motus tractorii in constructione aequationum differentialium*, Bologna 1752.

Ik ben de Universiteitsbibliotheek te Leiden erkentelijk voor de toestemming om gedeelten uit Huygens' manuscripten te reproduceren.

Mededelingen

Wintersymposium

Het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap heeft deze keer als thema: '*Wiskunde en Informatica*'. Het symposium wordt gehouden op zaterdag 9 januari 1988 in het gymnasium Johan Van Oldenbarnevelt, Groen van Prinstererlaan 33, 3818 JN Amersfoort.

Het programma is als volgt:
10.00-11.00 dr. P. van Emde Boas (Universiteit van Amsterdam) Van Wiskunde naar Informatica: *Verzamelingenmanipulatie op de computer*.
11.15-12.15 prof. dr. J. van Leeuwen (Rijksuniversiteit Utrecht) *Van Informatica naar Wiskunde: Asynchroniteit en netwerk protocollen*.
13.30-14.30 G. A. Vonk (Rijksuniversiteit Utrecht) *Wiskunde en Informatica: Beïnvloeding over en weer*.
U kunt zich voor dit symposium uitsluitend schriftelijk opgeven bij J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ 's-Gravenhage. Op verzoek kunt u een prospectus met samenvattingen van de voordrachten thuisgestuurd krijgen. Deze prospectussen zullen begin december naar de scholen worden gestuurd. Indien u wilt deelnemen aan de gezamenlijke lunch, stort u *f* 10,– op girorekening 608077, t.n.v. J. W. Maassen, 's-Gravenhage, onder vermelding 'lunch wintersymposium'.

Landelijke contactgroep ibo-rekenen/wiskunde

Een aantal instanties en personen houden zich bezig met rekenen en wiskunde in het voortgezet onderwijs. Sommige doelgroepen krijgen daarbij min of meer speciale aandacht.
In de onderbouw krijgen leerlingen in het ibo minder aandacht dan, gezien de door docenten gesignaleerde problemen, nodig is. Onder andere op het gebied van leermiddelen schijnt er nog heel wat te verbeteren te zijn. De grote diversiteit in deze doelgroep t.a.v. leermiddelen maakt de problemen alleen maar groter. Daarom heeft een aantal personen besloten een contactgroep te formeren, op 22 september 1987, om te bekijken of er gezamenlijk aan het gebied ibo-rekenen/wiskunde effectiever aandacht besteed kan worden. Op dit moment hebben in deze landelijke contactgroep zitting: Dolly van Drooge (SiO-leermiddelenkader wiskunde), Willem van Gaans (SiO-leermiddelenkader), Bart van der Krogt (SiO-schoolondersteuningskader, KPC), Sjoerd Schaafsma (SiO-nascholingskader) en Henk Sissing (Pedagogische Technische Hogeschool, SLO).
Mocht u als lezer interesse hebben om in deze werkgroep te participeren of anderszins een bijdrage te leveren dan kunt u dat kenbaar maken aan Willem van Gaans (KPC, Postbus 482, 5201 AL 's-Hertogenbosch).