Van meetkunde naar analyse

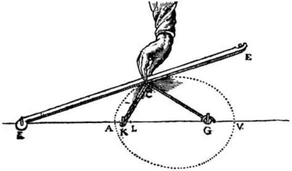
Steven Wepster

Departement Wiskunde
Universiteit Utrecht

18 maart 2024

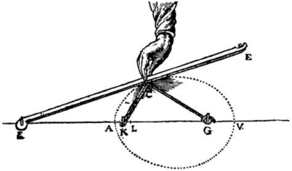
Het begin

- 17e eeuw: *meetkundige* vragen over krommen, zoals:



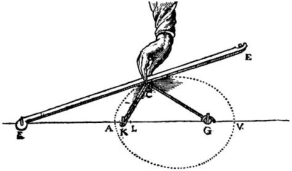
Het begin

- 17e eeuw: *meetkundige* vragen over krommen, zoals:
  - rectificatie: booglengte van de kromme



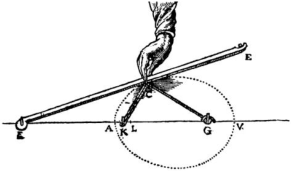
Het begin

- 17e eeuw: *meetkundige* vragen over krommen, zoals:
  - rectificatie: booglengte van de kromme
  - tangenten (raaklijnen)



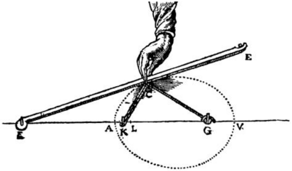
Het begin

- 17e eeuw: *meetkundige* vragen over krommen, zoals:
  - rectificatie: booglengte van de kromme
  - tangenten (raaklijnen)
  - quadratuur (oppervlakte)



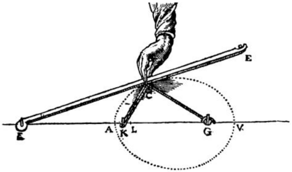
Het begin

- 17e eeuw: *meetkundige* vragen over krommen, zoals:
  - rectificatie: booglengte van de kromme
  - tangenten (raaklijnen)
  - quadratuur (oppervlakte)
  - omgekeerd probleem:
    vind een kromme waarvan de raaklijnen gegeven zijn.



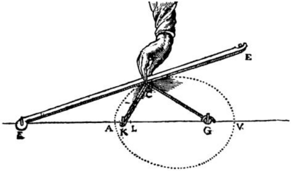
Het begin

- 17e eeuw: *meetkundige* vragen over krommen, zoals:
  - rectificatie: booglengte van de kromme
  - tangenten (raaklijnen)
  - quadratuur (oppervlakte)
  - omgekeerd probleem:
    vind een kromme waarvan de raaklijnen gegeven zijn.
- de meetkunde stond voorop! formules hadden nauwelijks betekenis



Het begin

- 17e eeuw: *meetkundige* vragen over krommen, zoals:
  - rectificatie: booglengte van de kromme
  - tangenten (raaklijnen)
  - quadratuur (oppervlakte)
  - omgekeerd probleem:
    vind een kromme waarvan de raaklijnen gegeven zijn.
- de meetkunde stond voorop! formules hadden nauwelijks betekenis
- “raaklijn” en “oppervlakte” lijken niet op inverse van elkaar (ca 1675)



Newton, Leibniz als grondleggers van infinitesimaalrekening

Waarom zij? Omdat zij:

- al zulke problemen reduceren tot twee: raaklijn en quadratuur;
- inzien dat raaklijn en quadratuur inverse problemen zijn;
- algemene methoden (algoritmen) hebben die voor alle krommen werken.

Newtons wonderjaren 1665-66

In the beginning of the year 1665 I found the Method of approximating series & the Rule for reducing any dignity of any Binomial into such a series. The same year in May I found the method of Tangents . . . , & in November had the direct method of fluxions & the next year in January had the Theory of Colours & in May following I had entrance into y^e inverse method of fluxions. And the same year I began to think of gravity extending to y^e orb of the Moon & (having found out how to estimate the force with w^{ch} globe revolving within a sphere presses the surface of the sphere) from Keplers rule . . . I deduced that the forces w^{ch} keep the Planets in their Orbs must [be] reciprocally as the squares of their distances from the centers about w^{ch} they revolve: & thereby compared the force requisite to keep the Moon in her Orb with the force of gravity at the surface of the earth, & found them answer pretty nearly. All this was in the two plague years of 1665 & 1666. For in those days I was in the prime of my age for invention & minded Mathematicks & Philosophy more then at any time since.

—ISAAC NEWTON[1]

Newton ontdekt:

- de calculus,
- het spectrum van licht,
- de gravitatiewet,

op 23-jarige leeftijd, wanneer de universiteit van Cambridge gesloten is vanwege de pest.

Newtons fluxierekening

stel y is een grootheid

Newtons fluxierekening

stel y is een grootheid

dan $\dot{y}$ "*fluxie*" van y, d.w.z. de snelheid waarmee y verandert

Newtons fluxierekening

stel y is een grootheid

dan $\dot{y}$ "*fluxie*" van y, d.w.z. de snelheid waarmee y verandert

en $\ddot{y}$ de fluxie van $\dot{y}$ etc.

Newtons fluxierekening

stel y is een grootheid

dan $\dot{y}$ "*fluxie*" van y, d.w.z. de snelheid waarmee y verandert

en $\ddot{y}$ de fluxie van $\dot{y}$ etc.

omgekeerd is y de "*fluent*" van $\dot{y}$

zo werkt Newton met fluxies

Hij beschouwt een infinitesimaal kort tijdsinterval o: dit is verwaarloosbaar klein maar niet 0.

zo werkt Newton met fluxies

Hij beschouwt een infinitesimaal kort tijdsinterval o: dit is verwaarloosbaar klein maar niet 0.

Dus: na een infinitesimaal kort tijdinterval o is y toegenomen met de grootheid $\dot{y}o$

zo werkt Newton met fluxies

Hij beschouwt een infinitesimaal kort tijdsinterval o: dit is verwaarloosbaar klein maar niet 0.

Dus: na een infinitesimaal kort tijdinterval o is y toegenomen met de grootheid $\dot{y}o$

Op een kromme met vergelijking $y = x^2$ geldt:

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^2$$

zo werkt Newton met fluxies

Hij beschouwt een infinitesimaal kort tijdsinterval o: dit is verwaarloosbaar klein maar niet 0.

Dus: na een infinitesimaal kort tijdinterval o is y toegenomen met de grootheid $\dot{y}o$

Op een kromme met vergelijking $y = x^2$ geldt:

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^2$$
$$y + \dot{y}o = x^2 + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2$$

zo werkt Newton met fluxies

Hij beschouwt een infinitesimaal kort tijdsinterval o: dit is verwaarloosbaar klein maar niet 0.

Dus: na een infinitesimaal kort tijdinterval o is y toegenomen met de grootheid $\dot{y}o$

Op een kromme met vergelijking $y = x^2$ geldt:

$$\begin{aligned} y + \dot{y}o &= (x + \dot{x}o)^2 \\ y + \dot{y}o &= x^2 + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2 \\ \dot{y}o &= 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2 \end{aligned}$$

zo werkt Newton met fluxies

Hij beschouwt een infinitesimaal kort tijdsinterval o: dit is verwaarloosbaar klein maar niet 0.

Dus: na een infinitesimaal kort tijdinterval o is y toegenomen met de grootheid $\dot{y}o$

Op een kromme met vergelijking $y = x^2$ geldt:

$$\begin{aligned} y + \dot{y}o &= (x + \dot{x}o)^2 \\ y + \dot{y}o &= x^2 + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2 \\ \dot{y}o &= 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2 \\ \dot{y} &= 2x\dot{x} + \dot{x}^2o \end{aligned}$$

zo werkt Newton met fluxies

Hij beschouwt een infinitesimaal kort tijdsinterval o: dit is verwaarloosbaar klein maar niet 0.

Dus: na een infinitesimaal kort tijdinterval o is y toegenomen met de grootheid $\dot{y}o$

Op een kromme met vergelijking $y = x^2$ geldt:

$$\begin{aligned}
y + \dot{y}o &= (x + \dot{x}o)^2 \\
y + \dot{y}o &= x^2 + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2 \\
\dot{y}o &= 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2 \\
\dot{y} &= 2x\dot{x} + \dot{x}^2o \\
\dot{y} &= 2x\dot{x}.
\end{aligned}$$

Gottfried Wilhelm Leibniz

Vergelijkbare ideeën als bij Newton:

Gottfried Wilhelm Leibniz

Vergelijkbare ideeën als bij Newton:

$\mathrm{d}y$ is een “infinitesimale” toename van y

Gottfried Wilhelm Leibniz

Vergelijkbare ideeën als bij Newton:

$\mathrm{d}y$ is een “infinitesimale” toename van y

$\int \mathrm{d}y$ is de sommatie van een oneindig aantal infinitesimalen

Gottfried Wilhelm Leibniz

Vergelijkbare ideeën als bij Newton:

$\mathrm{d}y$ is een "infinitesimale" toename van y

$\int \mathrm{d}y$ is de sommatie van een oneindig aantal infinitesimalen

Wel: $y + \mathrm{d}y = y$, maar niet: $\mathrm{d}y = 0$;

Gottfried Wilhelm Leibniz

Vergelijkbare ideeën als bij Newton:

$\mathrm{d}y$ is een "infinitesimale" toename van y

$\int \mathrm{d}y$ is de sommatie van een oneindig aantal infinitesimalen

Wel: $y + \mathrm{d}y = y$, maar niet: $\mathrm{d}y = 0$;

zo kan de breuk $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ bestaan;

Gottfried Wilhelm Leibniz

Vergelijkbare ideeën als bij Newton:

$\mathrm{d}y$ is een "infinitesimale" toename van y

$\int \mathrm{d}y$ is de sommatie van een oneindig aantal infinitesimalen

Wel: $y + \mathrm{d}y = y$, maar niet: $\mathrm{d}y = 0$;

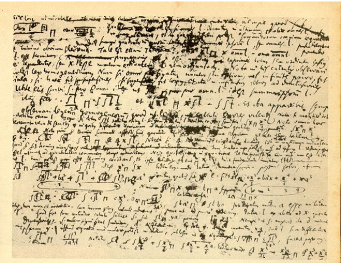
zo kan de breuk $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ bestaan;

Leibniz' notatie "denkt" voor je.

Grondslag van de calculus bij Leibniz

Uit een manuscript van Leibniz:

Grondslag van de calculus: verschillen en sommen zijn aan elkaar reciprook, dwz: de som van de differenties van een rij is de term van de rij, en het verschil van de sommen van de rij is ook de term van de rij. De eerste schrijf ik zo: $\int dx$ aequ. x, de laatste zo: $d \int x$ aeq. x.

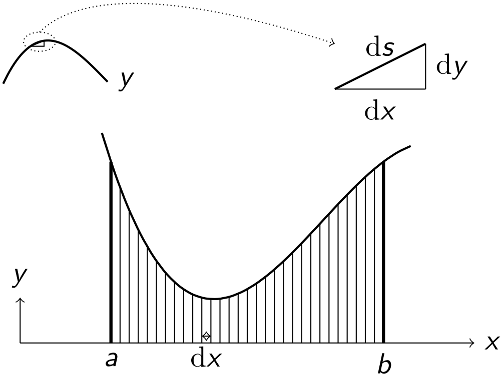


Ausschnitt aus einem Manuskript von Leibniz vom 29. Oktober 1675, in dem zum ersten Male das Integralzeichen auftritt

Toepassen op krommen

Deel kromme op in eindig veel rechte stukjes, elk met abscis x_n en ordinaat y_n.

Helling van "raaklijn"	$\leftrightarrow$	differenties dy, dx delen
Quadratuur	$\leftrightarrow$	$y\,dx$ of $x\,dy$ sommeren
Booglengte	$\leftrightarrow$	$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ sommeren



Dit is exact als je een oneindig aantal stukjes neemt.

Leibniz' infinitesimaalrekening

Merk op:

- evident dat $\int$ en d inverse operaties zijn;
- de Hoofdstelling is triviaal
- notatie geschikt voor algoritmische, algebraische manipulaties
- concepten zijn verankerd in meetkunde

Leibniz' infinitesimaalrekening

Merk op:

- evident dat $\int$ en d inverse operaties zijn;
- de Hoofdstelling is triviaal
- notatie geschikt voor algoritmische, algebraische manipulaties
- concepten zijn verankerd in meetkunde


Leibniz' infinitesimaalrekening

Merk op:

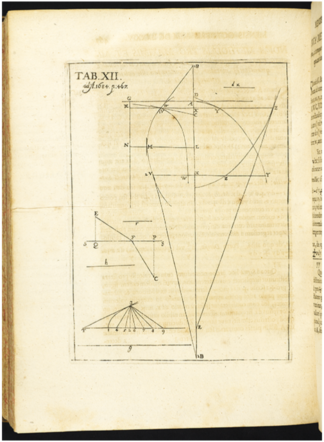
- evident dat $\int$ en d inverse operaties zijn;
- de Hoofdstelling is triviaal
- notatie geschikt voor algoritmische, algebraische manipulaties
- concepten zijn verankerd in meetkunde

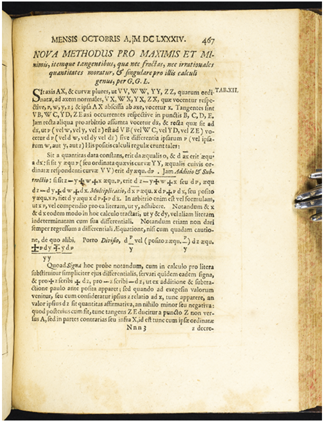
Leibniz' infinitesimaalrekening

Merk op:

- evident dat $\int$ en d inverse operaties zijn;
- de Hoofdstelling is triviaal
- notatie geschikt voor algoritmische, algebraische manipulaties
- concepten zijn verankerd in meetkunde

Eerste publicatie: Acta Eruditorum, oct 1684




MENSIS OCTOBRIS A. M DC LXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MI-nimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.

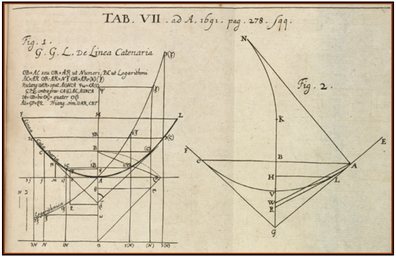
Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, w, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel dw, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales: TAB.XII.

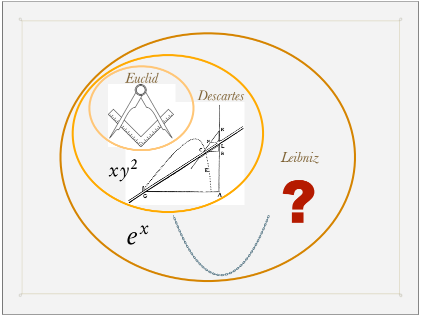
Sit a quantitas data constans, erit da æqualis 0, & d $\overline{ax}$ erit æqu. a dx: si sit y æqu v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: si sit z − y + w + x æqu. v, erit d $\overline{z - y + w + x}$ seu dv, æqu dz − dy + dw + dx. *Multiplicatio*, d $\overline{xv}$ æqu. x dv + v dx, seu posito y æqu. xv, fiet dy æqu x dv + v dx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, d $\frac{v}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{v}{y}$) dz æqu. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, & pro + z scribi + dz, pro − z scribi − dz, ut ex additione & subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ

Nnn 3 z decre-

Mechanische krommen

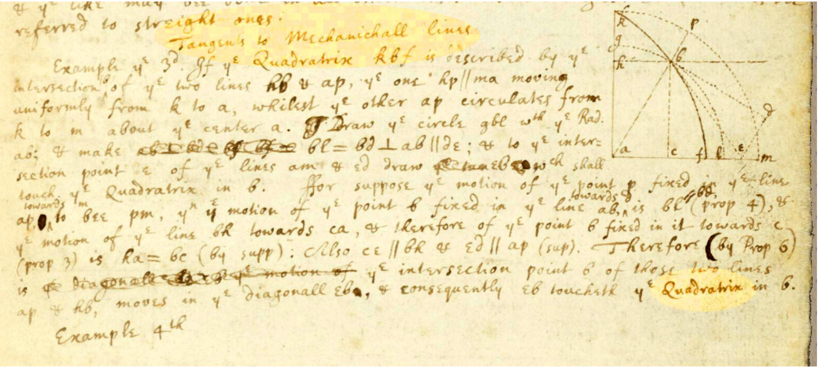




- meetkunde primair
- door de natuur gegeven krommen zijn legitiem
- formules secundair
- dus kettinglijn superieur aan logaritme

Meetkundige vraagstukken nog steeds centraal

Newton, *Oct 1666 Tract*:
raaklijnen aan mechanische krommen



referred to streight ones.

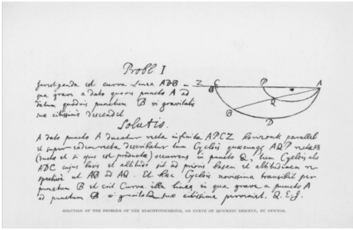
Tangents to Mechanichall lines

Example ye 3d. If ye Quadratrix kbf is described by ye intersection of ye two lines kb & ap, ye one kp || ma moving uniformly from k to a, whilst ye other ap circulates from k to m about ye center a. Draw ye circle gbe wth ye Rad: ab; & make be = bd ⊥ ab || dε; & to ye intersection point ε of ye lines am & εd draw εb wch shall touch ye Quadratrix in b. For suppose ye motion of ye point p fixed in ye line ap, towards m to bee pm, yn ye motion of ye point b fixed in ye line ab, towards d, is bd (prop 4), & ye motion of ye line bk towards ca, & therefore of ye point b fixed in it towards c (prop 3) is ka = bc (by supp): Also cε || bk & εd || ap (sup). Therefore (by Prop 6) ye intersection point b of those two lines ap & kb, moves in ye diagonall εb, & consequently εb toucheth ye Quadratrix in b.

Example 4th

Meetkundige vraagstukken nog steeds centraal

Het brachistochroonprobleem



Probl I

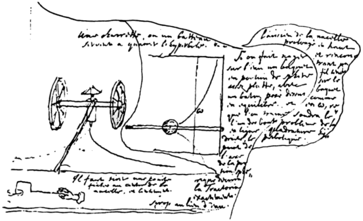
Investiganda est curva linea ADB in qua grave a dato quovis puncto A ad datum quodvis punctum B vi gravitatis suæ citissime descendet

Solutio.

A dato puncto A ducatur recta infinita APCZ horizonti parallela et super eadem recta describatur tum Cyclois quæcunque AQP rectæ AB (ductæ et si opus est productæ) occurrens in puncto Q, tum Cyclois alia ADC cujus basis et altitudo sit ad prioris basem et altitudinem respective ut AB ad AQ. Et hæc Cyclois novissima transibit per punctum B et erit Curva illa linea in qua grave a puncto A ad punctum B vi gravitatis suæ citissime perveniet. Q. E. I.

SOLUTION OF THE PROBLEM OF THE BRACHYSTOCHRONE, OR CURVE OF QUICKEST DESCENT, BY NEWTON.

De tractrix van Huygens



Reeksen: een resultaat van Leibniz

Reeksen opgevat als polynomen maar dan oneindig...

Staartdelen:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots$$

Reeksen: een resultaat van Leibniz

Reeksen opgevat als polynomen maar dan oneindig...

Staartdelen:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots$$

Integreer term voor term:

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \dots$$

Reeksen: een resultaat van Leibniz

Reeksen opgevat als polynomen maar dan oneindig...

Staartdelen:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots$$

Integreer term voor term:

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \dots$$

Neem $x = 1$:

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$

Reeksen: een resultaat van Leibniz

Reeksen opgevat als polynomen maar dan oneindig. . .

Staartdelen:

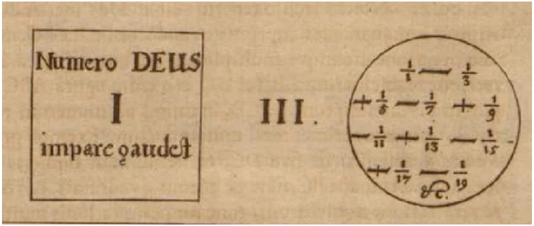
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots$$

Integreer term voor term:

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \dots$$

Neem $x = 1$:

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$



"God vermaakt zich met de oneven getallen"

Reeksen: Euler, het Bazelprobleem

Sinus tayloren en delen door x:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 \dots$$

Reeksen: Euler, het Bazelprobleem

Sinus tayloren en delen door x:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 \dots$$

De linkerkant heeft nulpunten $x = \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi, \dots,$ de rechterkant dus ook!

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\dots$$

Reeksen: Euler, het Bazelprobleem

Sinus tayloren en delen door x:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 \dots$$

De linkerkant heeft nulpunten $x = \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi, \dots,$
de rechterkant dus ook!

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots\right) + \frac{x^4}{\pi^4}(\dots) + \dots$$

Reeksen: Euler, het Bazelprobleem

Sinus tayloren en delen door x:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 \dots$$

De linkerkant heeft nulpunten $x = \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi, \dots,$
de rechterkant dus ook!

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots\right) + \frac{x^4}{\pi^4}(\dots) + \dots$$

Concludeer:

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots\right).$$

Van meetkunde naar infinitesimaalrekening

18e eeuw: belangrijke resultaten! o.a.:

- reeksen, stelling van Taylor,
- (hemel)mechanica, variatierekening
- introductie van functies
- (partiële) differentiaalvergelijkingen

Van meetkunde naar infinitesimaalrekening

18e eeuw: belangrijke resultaten! o.a.:

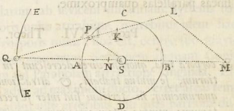
- reeksen, stelling van Taylor,
- (hemel)mechanica, variatierekening
- introductie van functies
- (partiële) differentiaalvergelijkingen

gewenning en gemak: steeds meer vertrouwen in formules i.p.v. meetkunde.

Newton versus Laplace: veranderingen

Newton, *Principia*, 1687

ad QP capiatur QL ad QK, & erit QL attractio acceleratrix corporis P verſus Q in diſtantia quavis QP. Junge PS, eiq; parallelam age LM occurrentem QS in M, & attractio QL reſolvetur (per Legum Corol. 2.) in attractiones QM, LM. Et ſic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici: una tendente ad S & oriunda a mutua attractione corporum S & P. Hac vi ſola corpus P, circum corpus S ſive immotum, ſive hac attractione agitatum, deſcribere deberet & areas, radio PS temporibus proportionales, & Ellipſin cui umbilicus eſt in centro corporis S. Patet hoc per Prob. VI. & Corollaria Theor. XXI. Vis altera eſt attractionis LM, quæ quoniam tendit a P ad S, ſuperaddita vi priori coincidet cum ipſa, & ſic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales deſcribantur per Corol. 3. Theor. XXI. At quoniam non eſt quadrato diſtantiæ PS reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idq; eo magis quo major eſt proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per Corol. 1. Prob. VIII. & Corol. 2. Theor XXI.) vis qua Ellipſis circa umbilicum S deſcribitur tendere debeat ad umbilicum illum, & eſſe quadrato diſtantiæ PS reciproce proportionalis; vis illa compoſita aberrando ab hac proportione, faciet ut Orbis PAB aberret a forma Ellipſeos umbilicum habentis in S; idq; eo magis quo major eſt aberratio ab hac proportione; atq; adeo etiam quo major eſt proportio vis ſecundæ LM ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia QM, trahendo corpus P ſecundum lineam ipſi QS parallelam, componet cum viribus prioribus vim quæ non amplius dirigitur a P in S, quæq; ab hac determinatione tanto ma-



Laplace, *Mécanique Celeste I*, 1799

z' est, à un infiniment petit près, égal à z; de plus, dx'' formant avec dx, l'angle $\frac{\pi}{2}-\theta$, on a

$$dx''=dx.\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{y\,dx}{z};$$

partant

$$d\theta=\frac{-y\,dx}{k.z^2}.$$

Si l'on fait varier la force y, de dy, en supposant x constant; on aura la variation correspondante de l'angle θ, en changeant dans l'équation précédente, x en y, y en x, et θ dans $\frac{\pi}{2}-\theta$; ce qui donne

$$d\theta=\frac{x\,dy}{k.z^2};$$

en faisant donc varier à-la-fois x et y, la variation totale de l'angle θ sera $\frac{x\,dy-y\,dx}{k.z^2}$; et l'on aura

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{z^2}=k\,d\theta.$$

Substituant pour z^2 sa valeur x^2+y^2, et intégrant, on aura

$$\frac{y}{x}=\text{tang.}\,(k\theta+\rho),$$

ρ étant une constante arbitraire. Cette équation combinée avec celle-ci $x^2+y^2=z^2$, donne

$$x=z.\cos.(k\theta+\rho).$$

Il ne s'agit plus que de connoître les deux constantes k et ρ; or si l'on suppose y nul, on a évidemment $z=x$, et $\theta=0$; donc $\cos.\rho=1$, et $x=z.\cos.k\theta$. Si l'on suppose x nul, on a $z=y$ et $\theta=\frac{1}{2}\pi$; $\cos.k\theta$ étant alors égal à zéro, k doit être égal à $2n+1$, n étant un nombre entier, et dans ce cas, x sera nul toutes les fois que θ sera égal à $\frac{\frac{1}{2}\pi}{2n+1}$; mais x étant nul, on a évidemment $\theta=\frac{1}{2}\pi$; donc $2n+1=1$, ou $n=0$, et par conséquent

$$x=z.\cos.\theta.$$

De-là il suit que la diagonale du rectangle construit sur les droites qui représentent les deux forces x et y, représente non-seulement la quantité, mais encore la direction de leur résultante. Ainsi l'on peut, à une force quelconque, substituer deux autres forces qui

MAAR. . . kan dat allemaal zomaar?!

George Berkeley, bisschop en filosoof, publiceert in 1734:
The Analyst; or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician, Wherein It Is Examined Whether the Object, Principles, and Inferences of the Modern Analysis are More Distinctly Conceived, or More Evidently Deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith
– Een stevige kritiek op de gebrekkige grondslagen van de infinitesimaalrekening (met name Newton).

Citaat van Berkeley

Hoe verder het brein deze vluchtende ideeën analyseert en najaagt, hoe verder het zich verliest in verwildering: de objecten, die eerst nog vluchtig en minuscuul zijn, verdwijnen snel uit het zicht...

Citaat van Berkeley

> *Hoe verder het brein deze vluchtende ideeën analyseert en najaagt, hoe verder het zich verliest in verwildering: de objecten, die eerst nog vluchtig en minuscuul zijn, verdwijnen snel uit het zicht...*
>
> *En wat zijn fluxies? De snelheden van verdwijnende incrementen? En wat zijn dát dan weer? Ze zijn noch eindige grootheden, noch oneindig kleine grootheden, ze zijn zelfs niet niets. Moeten we ze de "Geesten van Verdwenen Grootheden" noemen?*

De resultaten mochten dan verbluffend zijn, methodologisch werkte het volgens hem alleen door elkaar opheffende fouten...

Euler over infinitesimalen

Een oneindig kleine grootheid is niets anders dan een verdwijnende grootheid, en dus is het werkelijk gelijk aan 0.

...

Iedereen weet [...] dat $n \cdot 0 = 0$, *en dus ook* $n : 1 = 0 : 0$. *Hiermee is duidelijk dat elk tweetal nullen meetkundig een verhouding kunnen hebben, terwijl rekenkundig bekeken de verhouding er een van gelijken is. Tussen nullen is dus elke verhouding mogelijk, daarom gebruiken we in deze wirwar opzettelijk een andere notatie...*[1]

... namelijk $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ etc.

[1] institutiones calculi differentialis §83, 85

Euler concludeert:

[H]et bezwaar tegen de analyse, dat het niet meetkundig rigoureus zou zijn, stort in onder z'n eigen gewicht; er wordt namelijk niets verwaarloosd behalve dat wat al niets is. [We houden dus volledig vast aan] dezelfde volmaakte meetkundige strengheid als in de boeken van de klassieken.

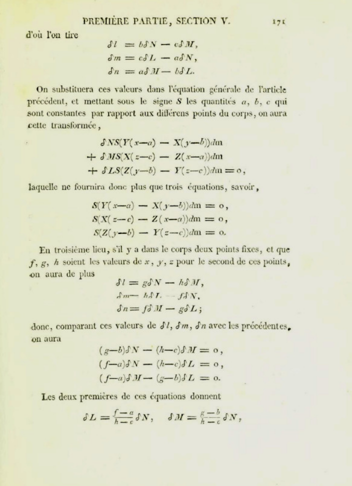
50 jaar na Berkeley

Nog in 1784 schrijft de Academie van Berlijn (o.l.v. Lagrange) een prijsvraag uit:

> *Het is algemeen bekend dat in [de wiskunde] regelmatig "oneindig groot" en "oneindig klein" gebruikt worden... De Academie verlangt een verklaring voor hoe het kan dat zoveel correcte stellingen zijn afgeleid uit een tegenstrijdige aanname.*

Er komt inderdaad wel respons maar nog niet erg bevredigend.

Lagrange, *Mecanique Analytique*, 1788


PREMIÈRE PARTIE, SECTION V. 171

d'où l'on tire

$$\delta l = b\delta N - c\delta M,$$
$$\delta m = c\delta L - a\delta N,$$
$$\delta n = a\delta M - b\delta L.$$

On substituera ces valeurs dans l'équation générale de l'article précédent, et mettant sous le signe S les quantités a, b, c qui sont constantes par rapport aux différens points du corps, on aura cette transformée,

$$\begin{aligned} &\delta N S(Y(x-a) - X(y-b))dm \\ &+ \delta M S(X(z-c) - Z(x-a))dm \\ &+ \delta L S(Z(y-b) - Y(z-c))dm = 0, \end{aligned}$$

laquelle ne fournira donc plus que trois équations, savoir,

$$S(Y(x-a) - X(y-b))dm = 0,$$
$$S(X(z-c) - Z(x-a))dm = 0,$$
$$S(Z(y-b) - Y(z-c))dm = 0.$$

En troisième lieu, s'il y a dans le corps deux points fixes, et que f, g, h soient les valeurs de x, y, z pour le second de ces points, on aura de plus

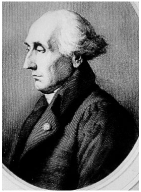
$$\delta l = g\delta N - h\delta M,$$
$$\delta m = h\delta L - f\delta N,$$
$$\delta n = f\delta M - g\delta L;$$

donc, comparant ces valeurs de δl, δm, δn avec les précédentes, on aura

$$(g-b)\delta N - (h-c)\delta M = 0,$$
$$(f-a)\delta N - (h-c)\delta L = 0,$$
$$(f-a)\delta M - (g-b)\delta L = 0.$$

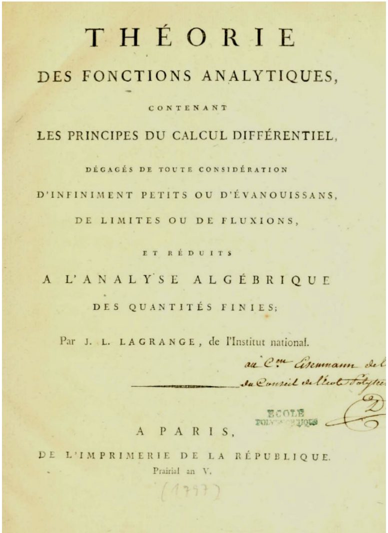
Les deux premières de ces équations donnent

$$\delta L = \frac{f-a}{h-c}\delta N, \quad \delta M = \frac{g-b}{h-c}\delta N,$$



"Afbeeldingen komen in dit boek niet voor. De methoden die ik hier uiteenzet, vereisen noch constructies, noch meetkundige of mechanische redeneringen, maar uitsluitend algebraïsche operaties volgens een uniforme en reguliere procedure"

Lagrange, 1797



THÉORIE

DES FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

LES PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL,

DÉGAGÉS DE TOUTE CONSIDÉRATION

D'INFINIMENT PETITS OU D'ÉVANOUISSANS,

DE LIMITES OU DE FLUXIONS,

ET RÉDUITS

A L'ANALYSE ALGÉBRIQUE

DES QUANTITÉS FINIES;

Par J. L. LAGRANGE, de l'Institut national.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE LA RÉPUBLIQUE.

Prairial an V.

(1797)

Theorie
van de analytische functies
bevattende
de principes van de
differentiaalrekening
ontdaan van elke beschouwing
van het oneindig kleine of het
verdwijnende,
van limieten of van fluxies,
en teruggebracht
tot de algebraïsche analyse
van eindige grootheden.

Lagrange, 1797

3. Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x. Si à la place de x on met $x + i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$; et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme $fx + pi + qi^2 + ri^3 +$ &c., dans laquelle les quantités p, q, r, &c., coëfficiens des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive fx, et indépendantes de la quantité i.

Il est clair que la forme des fonctions p, q, r, &c. dépendra uniquement de celle de la fonction fx; et on déterminera aisément ces fonctions dans les cas particuliers par les règles ordinaires de l'algèbre, en développant la fonction dans une série ordonnée suivant les puissances de i.

Hij gaat ervan uit dat elke functie $f(x)$ een reeksontwikkeling heeft:

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + p\varepsilon + q\varepsilon^2 + r\varepsilon^3 + \dots$$

en daarna definieert hij de afgeleiden als:

$$f'(x) = p, \qquad f''(x) = 2q, \qquad \dots .$$

Lagrange, 1797

> 3. Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x. Si à la place de x on met $x + i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$; et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme $fx + pi + qi^2 + ri^3 +$ &c., dans laquelle les quantités p, q, r, &c., coëfficiens des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive fx, et indépendantes de la quantité i.
>
> Il est clair que la forme des fonctions p, q, r, &c. dépendra uniquement de celle de la fonction fx; et on déterminera aisément ces fonctions dans les cas particuliers par les règles ordinaires de l'algèbre, en développant la fonction dans une série ordonnée suivant les puissances de i.

Hij gaat ervan uit dat elke functie $f(x)$ een reeksontwikkeling heeft:

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + p\varepsilon + q\varepsilon^2 + r\varepsilon^3 + \dots$$

en daarna definieert hij de afgeleiden als:

$$f'(x) = p, \qquad f''(x) = 2q, \qquad \dots .$$

Dit is een schijn-oplossing, want het bestaan van de reeksontwikkeling kun je alleen aantonen met limieten...

Wat verstaat men eigenlijk onder "functie"?

Euler (1748): *een functie van een variabele grootheid is een analytische uitdrukking die op een of andere manier is samengesteld uit de variabele en constanten.*

Wat verstaat men eigenlijk onder "functie"?

Euler (1748): *een functie van een variabele grootheid is een analytische uitdrukking die op een of andere manier is samengesteld uit de variabele en constanten.*

Oneindige sommaties geen probleem.

Wat verstaat men eigenlijk onder "functie"?

Euler (1748): *een functie van een variabele grootheid is een analytische uitdrukking die op een of andere manier is samengesteld uit de variabele en constanten.*

Oneindige sommaties geen probleem.

Volgens Euler moet je dus het functievoorschrift hebben om van een functie te kunnen spreken!

Wat verstaat men eigenlijk onder “functie”?

Euler (1748): *een functie van een variabele grootheid is een analytische uitdrukking die op een of andere manier is samengesteld uit de variabele en constanten.*

Oneindige sommaties geen probleem.

Volgens Euler moet je dus het functievoorschrift hebben om van een functie te kunnen spreken!

Deze opvatting kwam snel onder druk te staan.

Het probleem van de trillende snaar

Golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Het probleem van de trillende snaar

Golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Hierin is $y(x, t)$ de uitwijking van de snaar op plaats x en tijd t.

Het probleem van de trillende snaar

Golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Hierin is $y(x,t)$ de uitwijking van de snaar op plaats x en tijd t.

Oplossing van de golfvergelijking afhankelijk van de "randvoorwaarde", d.w.z. de vorm van de snaar op $t = 0$.

Het probleem van de trillende snaar

Golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Hierin is $y(x,t)$ de uitwijking van de snaar op plaats x en tijd t.

Oplossing van de golfvergelijking afhankelijk van de "randvoorwaarde", d.w.z. de vorm van de snaar op $t = 0$.

d'Alembert: oplossing $y(x,t) = f(t+x) + g(t-x)$ voor willekeurige functies f en g

Het probleem van de trillende snaar

Golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Hierin is $y(x,t)$ de uitwijking van de snaar op plaats x en tijd t.

Oplossing van de golfvergelijking afhankelijk van de "randvoorwaarde", d.w.z. de vorm van de snaar op $t = 0$.

d'Alembert: oplossing $y(x,t) = f(t+x) + g(t-x)$ voor willekeurige functies f en g

Daniel Bernoulli: bijvoorbeeld $f(x) = \sum a_k \sin(kx)$? Nee, dat wordt verworpen...

Het probleem van de trillende snaar

Golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Hierin is $y(x,t)$ de uitwijking van de snaar op plaats x en tijd t.

Oplossing van de golfvergelijking afhankelijk van de "randvoorwaarde", d.w.z. de vorm van de snaar op $t = 0$.

d'Alembert: oplossing $y(x,t) = f(t+x) + g(t-x)$ voor willekeurige functies f en g

Daniel Bernoulli: bijvoorbeeld $f(x) = \sum a_k \sin(kx)$? Nee, dat wordt verworpen...

$\mapsto$ discussie over functies, toegelaten oplossingen, continuïteit, ...

Fourier en de warmtevergelijking

Warmtevergelijking (diffusie):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c\frac{\partial y}{\partial t}$$

Beschrijft de temperatuur $y(x,t)$ op positie x en tijd t, van een (1-dim) staaf.

Fourier en de warmtevergelijking

Warmtevergelijking (diffusie):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c\frac{\partial y}{\partial t}$$

Beschrijft de temperatuur $y(x, t)$ op positie x en tijd t, van een (1-dim) staaf.

Randvoorwaarde: de begintemperatuur van de staaf is gegeven, $y(x, 0) = f(x)$.

Fourier en de warmtevergelijking

Warmtevergelijking (diffusie):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c\frac{\partial y}{\partial t}$$

Beschrijft de temperatuur $y(x,t)$ op positie x en tijd t, van een (1-dim) staaf.

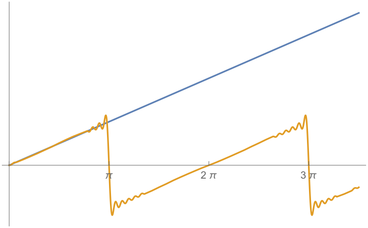
Randvoorwaarde: de begintemperatuur van de staaf is gegeven, $y(x,0) = f(x)$.

Fourier (ca 1807) ontdekte dat de oplossing relatief eenvoudig te vinden is als je mag aannemen dat voor zekere a_k en b_k:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

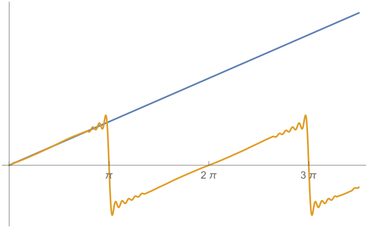
Fourierreeksen

Voorbeeld: $\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \ldots$



Fourierreeksen

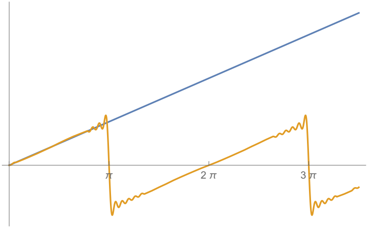
Voorbeeld: $\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \ldots$



Het werkt dus alleen op een beperkt domein

Fourierreeksen

Voorbeeld: $\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \dots$

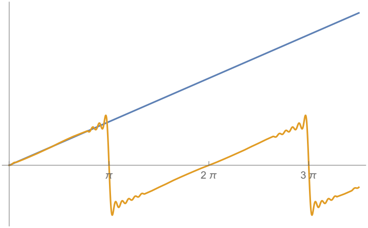


Het werkt dus alleen op een beperkt domein

Vraag: welke functies kun je zo met periodieke functies voorstellen?

Fourierreeksen

Voorbeeld: $\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \ldots$



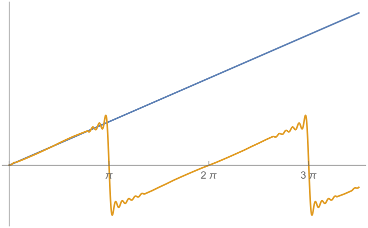
Het werkt dus alleen op een beperkt domein

Vraag: welke functies kun je zo met periodieke functies voorstellen?

???? hoe gek kun je het maken: convergentie, discontinuiteiten,. . .

Fourierreeksen

Voorbeeld: $\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \ldots$



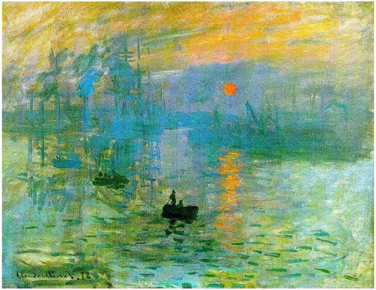
Het werkt dus alleen op een beperkt domein

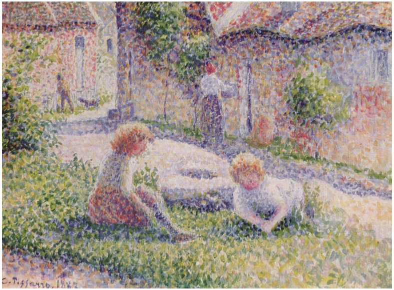
Vraag: welke functies kun je zo met periodieke functies voorstellen?

???? hoe gek kun je het maken: convergentie, discontinuiteiten,...

dit zijn lastige vragen waar je een heel precieze analyse voor nodig hebt.

18e versus 19e eeuw





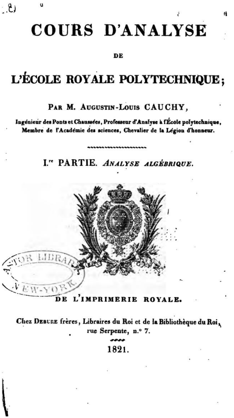
Cauchy en de analyse

Sinds 1815 aangesteld aan de *Ecole Polytechnique* zet Cauchy zich in voor de herstructurering van het analyse-onderwijs.

Goed onderwijs was voor Cauchy een motivatie om de grondslagen van de analyse te herzien.

Voor Weierstrass en Dedekind geldt dat later min of meer ook.

Cours d'Analyse



COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

Schrijft tekstboek *Cours d'Analyse* (1821).

Hoewel nooit als tekstboek gebruikt, heeft het wel veel navolging (en kritiek) gekregen.

Cauchy en de analyse: inhoud

Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoi-

"Wat betreft methoden heb ik geprobeerd om ze alle strengheid te geven die men van de meetkunde verlangt, zodat men nooit hoeft te vertrouwen op argumenten ontleend aan de algemeenheid van de algebra."

Cauchy en de analyse: limietbegrip centraal

fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres.

"Indien de waarden die achtereenvolgens aan een bepaalde variabele worden toegekend seeds dichter bij een vaste waarde komen, zo dat ze er uiteindelijk zo weinig van verschillen als men wil, dan noemt men die laatste de *limiet* van alle andere."

Cauchy en de analyse: limietbegrip centraal

fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres.

"Indien de waarden die achtereenvolgens aan een bepaalde variabele worden toegekend seeds dichter bij een vaste waarde komen, zo dat ze er uiteindelijk zo weinig van verschillen als men wil, dan noemt men die laatste de *limiet* van alle andere."

Later kan hij dan *oneindig kleine grootheden* opvatten als variabelen met limiet 0.

Cauchy en de analyse: limietbegrip centraal

fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres.

"Indien de waarden die achtereenvolgens aan een bepaalde variabele worden toegekend seeds dichter bij een vaste waarde komen, zo dat ze er uiteindelijk zo weinig van verschillen als men wil, dan noemt men die laatste de *limiet* van alle andere."

Later kan hij dan *oneindig kleine grootheden* opvatten als variabelen met limiet 0.

Continuiteit, afgeleide en integraal gedefinieerd met limieten.

Moraal

1. Het heeft geen zin om niets te doen totdat je de grondslagen begrijpt. Begin met problemen oplossen! Dan kom je er gaandeweg achter hoe het in elkaar zit.
2. Of zoals Andrew Wiles zei: wiskunde doen is als rondstommelen in een donkere kamer totdat je – na maanden – het lichtknopje vindt.
3. Wiskunde komt verder dankzij lastige problemen en hersenkrakers waar niemand nog een antwoord op heeft.