Goniometrie in de Almagest van Ptolemaeus

Steven Wepster

Departement Wiskunde
Universiteit Utrecht

23 februari 2022

Claudios Ptolemaios

2e eeuw n.Chr.; actief in astronomie, astrologie, geografie, optica,. . .



Ptolemaeus' wereldbeeld

Antieke astronomie

Aanleiding:

- landbouw
- kalenders
- astrologie
- algemene nieuwsgierigheid

Veel interesse in o.a. Egypte en Mesopotamië

Mesopotamië

Overgebleven uit Mesopotamië:

- 360°
- sexagesimaal tellen:
  hoek $10^\circ 20' 30''$, tijd $5^u 43^m 21^s$
- dierenriem (zodiac) van 12 tekens
- oudst bekende waarnemingen van verduisteringen etc

Babylonische astronomie is procedureel en rekenkundig;

er is geen “wereldbeeld” of meetkundige voorstelling

Van Mesopotamië naar Griekenland

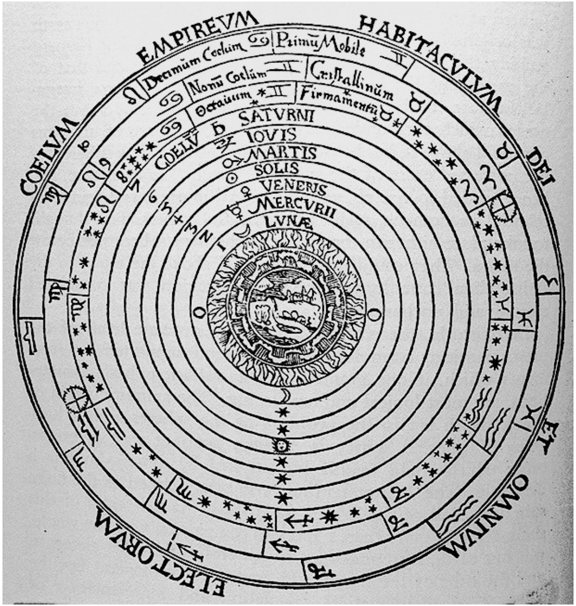
Grieken hebben een sterke traditie in axiomatische meetkunde

Plato (400 v.Chr.): in de perfecte hemel heerst eenparige beweging langs perfecte cirkels

Met name Hipparchos (ca 150 v.Chr) verbindt Mesopotamische technieken met Griekse filosofische opvattingen en meetkundige idealen.

Merk op: in Euclides' Elementen (300 v.Chr.) komt *GEEN* goniometrie voor.

Ptolemaeus' universum



volgens Petrus Apianus, 1524


PLANISPHÆRIVM
Sive
ORBIVM MVNDI
PTOLEMA=
NO DI=
PTOLEMAICVM,
Machina
EX HYPOTHESI
ICA IN PLA=
SPOSITA.
ZO
SAGITTARIVS
DIA
SCORPIVS
CVS.
LIBRA
VIRGO
LEO
CANCER
GEMINI
TAVRVS
ARIES
ECLIP
PISCES
TICA
AQVARIVS
SEV
CAPRICORNVS
VIA SOLIS CIRCVLVS
IOVIS ORBITA
CIRCVLVS MARTIS
SEPTEM
PLANE TARVM
ORBES
MVNDVS SVBLVNARIS QVATVOR ELEMENTA COMPLECTENS.
ORBIS LVNÆ
ITER MERCVRII
VENERIS
CVRRICVLVM
SATVRNI

De Almagest

ca. 125 n.Chr *MATHEMATIKÈS SYNTAXEOS BIBLIA* $\iota\gamma$, Dertien Boeken van Wiskunstige Collecties

De Almagest


PTOLEMAEI
MATHEMATICÆ
constructionis Liber primus
græce & latine
editus.

ADDITÆ EXPLICATIONES ALIquot locorum ab ERASMO RHEINHOLT Salueldensi.

I. L.

VVITTEBERGAE
Ex Officina Iohannis Lufft.
ANNO
1549.

ca. 125 n.Chr *MATHEMATIKÈS SYNTAXEOS BIBLIA* $\iota\gamma$, Dertien Boeken van Wiskunstige Collecties

Systematiseert en perfectioneert de Griekse astronomische kennis

De Almagest


PTOLEMAEI
MATHEMATICÆ
constructionis Liber primus
græce & latine
editus.

ADDITÆ EXPLICATIONES ALIquot locorum ab ERASMO RHEINHOLT Salueldensi.

I. L.

VVITTEBERGAE
Ex Officina Iohannis Lufft.
ANNO
1549.

ca. 125 n.Chr *MATHEMATIKÈS SYNTAXEOS BIBLIA* $\iota\gamma$, Dertien Boeken van Wiskunstige Collecties

Systematiseert en perfectioneert de Griekse astronomische kennis

vermoedelijk later bekend onder de naam *MEGALÈ SYNTAXIS*, de Grote Collectie

De Almagest

ca. 125 n.Chr *MATHEMATIKÈS SYNTAXEOS BIBLIA* $\iota\gamma$, Dertien Boeken van Wiskunstige Collecties

Systematiseert en perfectioneert de Griekse astronomische kennis

vermoedelijk later bekend onder de naam *MEGALÈ SYNTAXIS*, de Grote Collectie

Heeft invloed gehad op middeleeuwse Indiase astronomie

De Almagest

ca. 125 n.Chr *MATHEMATIKÈS SYNTAXEOS BIBLIA* $\iota\gamma$, Dertien Boeken van Wiskunstige Collecties

Systematiseert en perfectioneert de Griekse astronomische kennis

vermoedelijk later bekend onder de naam *MEGALÈ SYNTAXIS*, de Grote Collectie

Heeft invloed gehad op middeleeuwse Indiase astronomie

ca. 830 Arabische vertaling: *kitab al-mijisti*: *kitab*=boek, *mijisti*=*magistè*=de grootste

De Almagest

ca. 125 n.Chr *MATHEMATIKÈS SYNTAXEOS BIBLIA* $\iota\gamma$, Dertien Boeken van Wiskunstige Collecties

Systematiseert en perfectioneert de Griekse astronomische kennis

vermoedelijk later bekend onder de naam *MEGALÈ SYNTAXIS*, de Grote Collectie

Heeft invloed gehad op middeleeuwse Indiase astronomie

ca. 830 Arabische vertaling: *kitab al-mijisti*: *kitab*=boek, *mijisti*=*magistè*=de grootste

Vanaf de 12e eeuw verschijnen er Latijnse vertalingen in West-Europa

De Almagest

ca. 125 n.Chr *MATHEMATIKÈS SYNTAXEOS BIBLIA* $\iota\gamma$, Dertien Boeken van Wiskunstige Collecties

Systematiseert en perfectioneert de Griekse astronomische kennis

vermoedelijk later bekend onder de naam *MEGALÈ SYNTAXIS*, de Grote Collectie

Heeft invloed gehad op middeleeuwse Indiase astronomie

ca. 830 Arabische vertaling: *kitab al-mijisti*: *kitab*=boek, *mijisti*=*magistè*=de grootste

Vanaf de 12e eeuw verschijnen er Latijnse vertalingen in West-Europa

Het astronomieboek tot aan Copernicus' heliocentrische revolutie.

Inhoud van de Almagest

Boek I: het universum en wiskundige basis (koorden, boldriehoeken)

Boek II: toepassingen: opkomst en ondergang van sterren, etc

Boek III: beweging van de zon

Boek IV, V: beweging van de maan

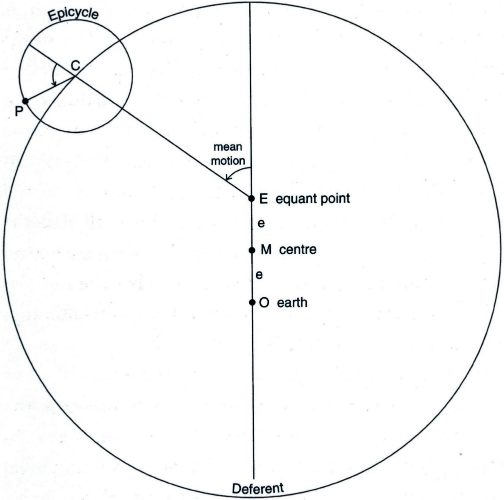
Boek VI: verduisteringen

Boek VI, VIII: sterrencatalogus, precessie van de equinox

Boek IX - XIII: beweging van planeten

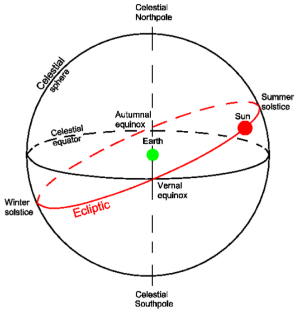
Het is niet duidelijk wat al bestond, en wat Ptolemaeus zelf bijdraagt.

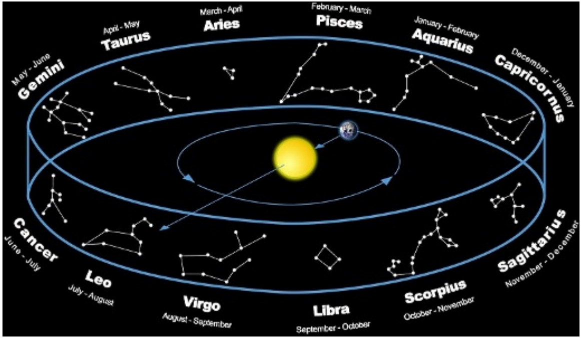
Een glimpje planetentheorie



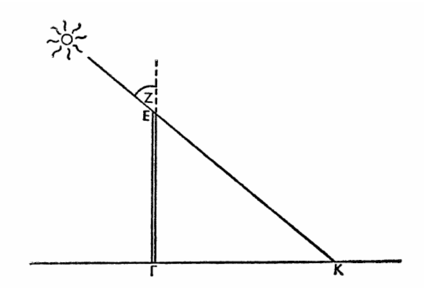
Hemelsfeer

Voor de volgende slide hebben we een beetje astronomische achtergrondkennis nodig: met name de *ecliptica*, *equinox* en *zonnewende* (solstice).



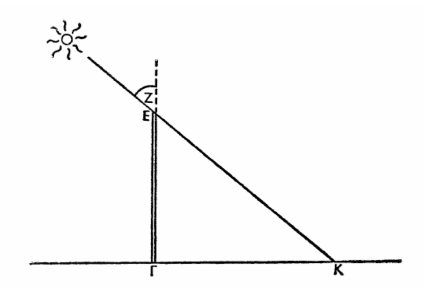


Waarom goniometrie nodig?



$E\Gamma$ is een stok vertikaal in de grond (*gnomon*)

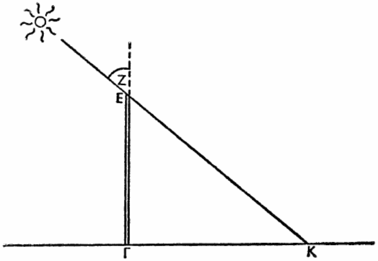
Waarom goniometrie nodig?



$E\Gamma$ is een stok vertikaal in de grond (*gnomon*)

ΓK is de schaduw van de stok

Waarom goniometrie nodig?

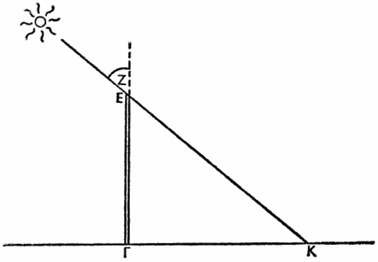


$E\Gamma$ is een stok vertikaal in de grond (*gnomon*)

ΓK is de schaduw van de stok

op de mid-dag van de equinox (21 maart/sept) geldt $\frac{\Gamma K}{EK} = \tan z$, de tangens van de breedtegraad

Waarom goniometrie nodig?



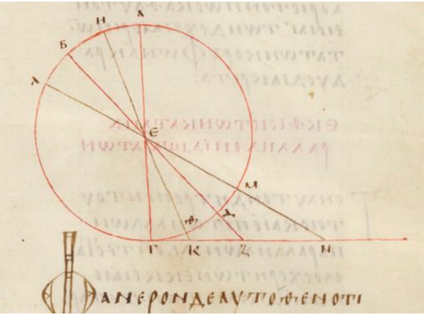
$E\Gamma$ is een stok vertikaal in de grond (*gnomon*)

ΓK is de schaduw van de stok

op de mid-dag van de equinox (21 maart/sept) geldt $\frac{\Gamma K}{EK} = \tan z$, de tangens van de breedtegraad

op de mid-dag van de zonnewende (juni/dec) geldt $\frac{\Gamma K}{EK} = \tan(z \pm \epsilon)$, waarin ϵ de scheefheid van de ecliptica

Waarom goniometrie nodig?



$E\Gamma$ is een stok vertikaal in de grond (*gnomon*)

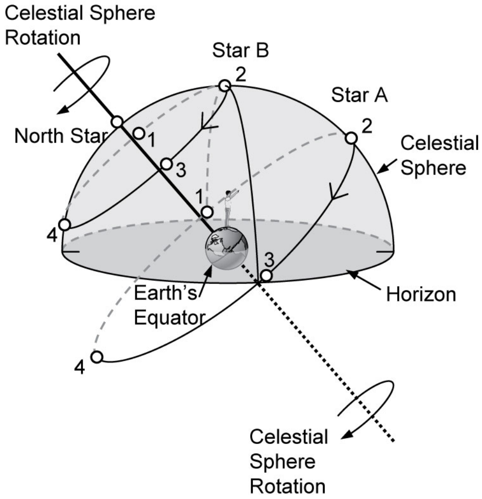
ΓK is de schaduw van de stok

op de mid-dag van de equinox (21 maart/sept) geldt $\frac{\Gamma K}{EK} = \tan z$, de tangens van de breedtegraad

op de mid-dag van de zonnewende (juni/dec) geldt $\frac{\Gamma K}{EK} = \tan(z \pm \epsilon)$, waarin ϵ de scheefheid van de ecliptica

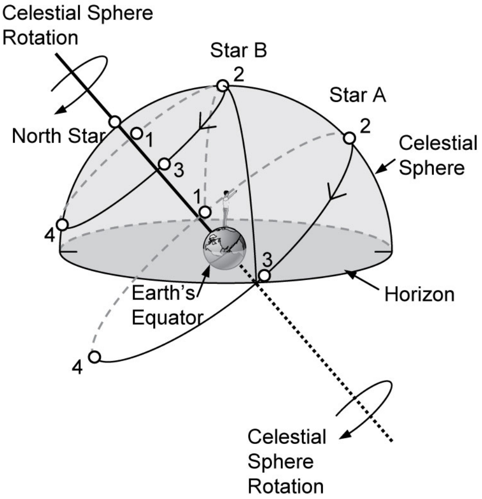
Ander voorbeeld: opkomst en ondergang van sterren

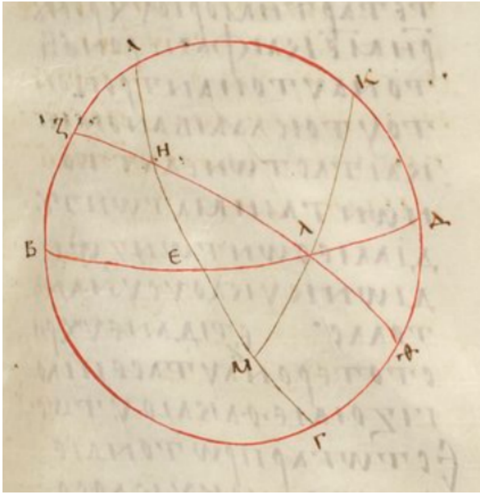
Hier is de wiskunde van boldriehoeken voor nodig



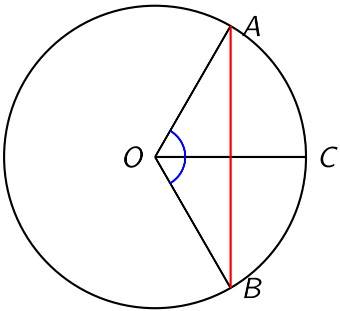
Ander voorbeeld: opkomst en ondergang van sterren

Hier is de wiskunde van boldriehoeken voor nodig





Geen(?) goniometrie, wel koorden



Koorde is de enige goniometrische grootheid die Ptolemaeus heeft.

Wij noteren de koorde van hoek α als $\operatorname{krd}\alpha$

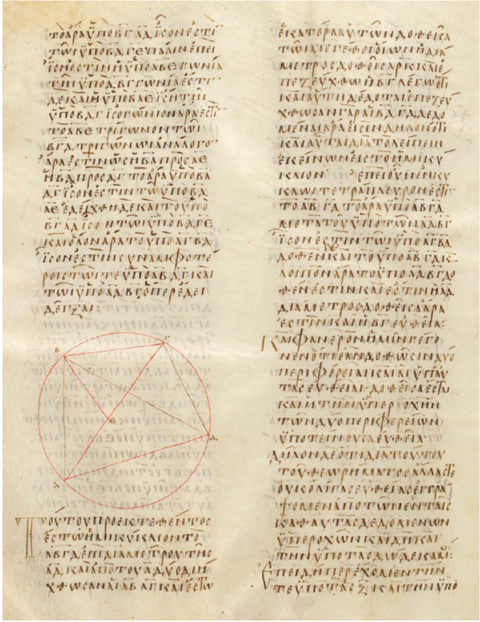
Er geldt: $\frac{1}{2}\operatorname{krd}\angle AOB = \sin\angle AOC$

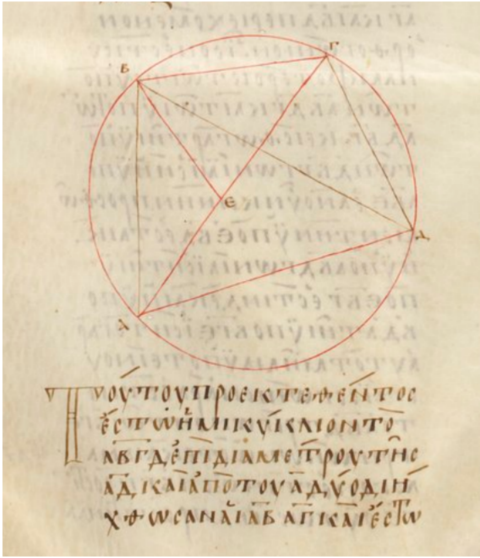
Het opstellen van een koordentabel

Ptolemaeus legt uit hoe men een koordentabel kan opstellen.

Hij geeft een tabel van 0° tot 90° in stappen van $\frac{1}{2}^\circ$.

In de volgende slides volgen we zijn uitleg.





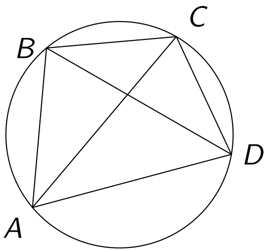
Τούτου προεκτεθέντος
ἔστω ἡμικύκλιον τὸ
ΑΒΓΔ ἐπὶ διαμέτρου τῆς
ΑΔ καὶ ἀπὸ τοῦ Α δύο διή-
χθωσαν αἱ ΑΒ ΑΓ καὶ ἔστω

Stelling van Ptolemaeus

In koordenvierhoek $ABCD$ geldt:

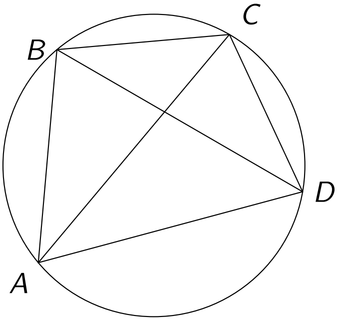
$$AD \cdot BC + CD \cdot AB = AC \cdot BD$$

De producten van de overstaande zijden zijn samen even groot als het product van de diagonalen.

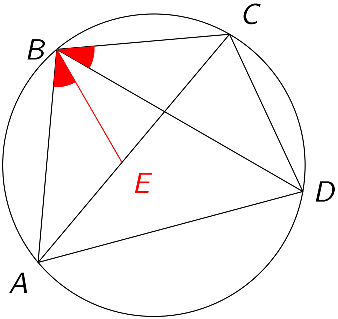


De stelling was misschien al ouder, maar we komen hem voor het eerst tegen in de Almagest.

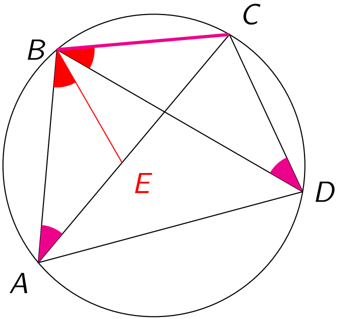
Bewijs van de Stelling van Ptolemaeus



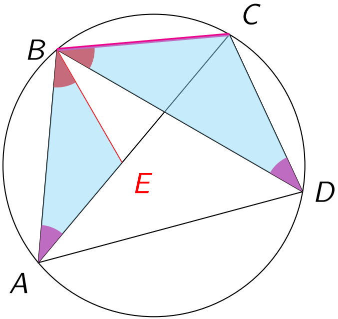
Bewijs van de Stelling van Ptolemaeus



Bewijs van de Stelling van Ptolemaeus

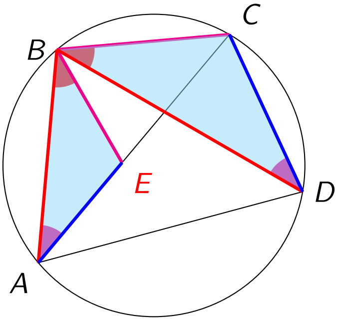


Bewijs van de Stelling van Ptolemaeus



gelijkvormige driehoeken:

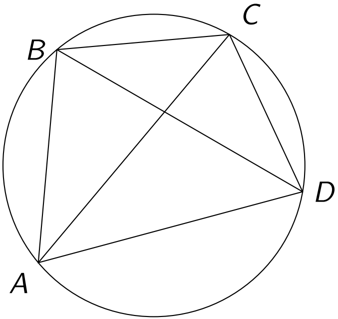
Bewijs van de Stelling van Ptolemaeus



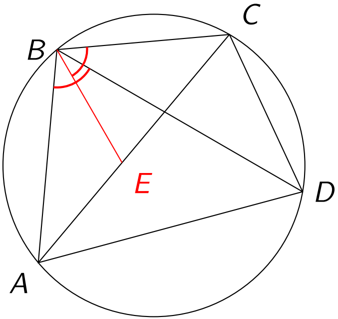
gelijkvormige driehoeken:

$CD \cdot AB = AE \cdot BD$

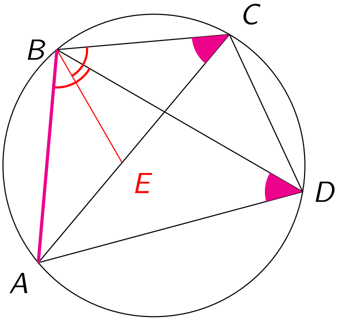
Bewijs van de Stelling van Ptolemaeus



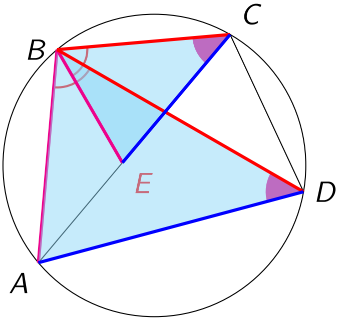
Bewijs van de Stelling van Ptolemaeus



Bewijs van de Stelling van Ptolemaeus

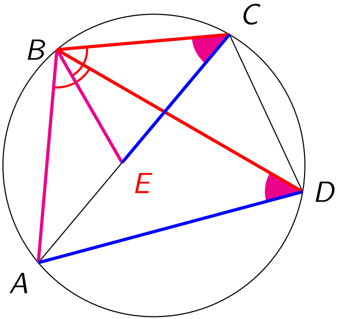


Bewijs van de Stelling van Ptolemaeus



gelijkvormige driehoeken:

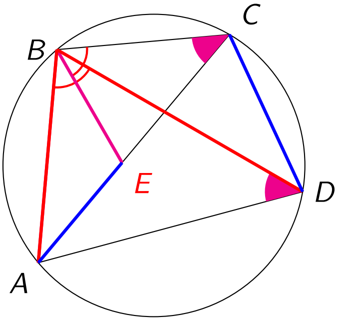
Bewijs van de Stelling van Ptolemaeus



gelijkvormige driehoeken:

$AD \cdot BC = EC \cdot BD$

Bewijs van de Stelling van Ptolemaeus



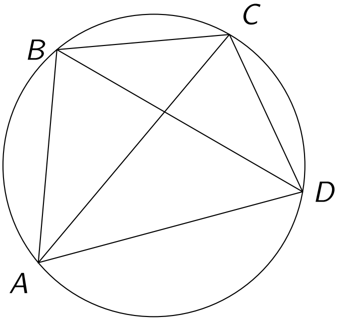
gelijkvormige driehoeken:

$AD \cdot BC = EC \cdot BD$

We hadden al:

$CD \cdot AB = AE \cdot BD$

Bewijs van de Stelling van Ptolemaeus



$AD \cdot BC = EC \cdot BD$

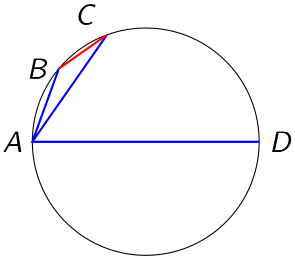
$CD \cdot AB = AE \cdot BD$

Conclusie:

$AD \cdot BC + CD \cdot AB = AC \cdot BD$

Toepassing: verschilkoorde

Om de koorde bij het verschil van twee hoeken te vinden.

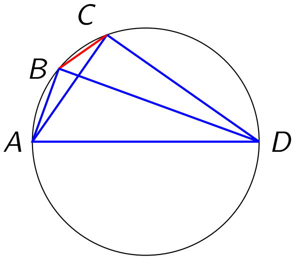


Gegeven: diameter AD en koorden AB, AC.

Gevraagd: koorde BC.

Toepassing: verschilkoorde

Om de koorde bij het verschil van twee hoeken te vinden.



Gegeven: diameter AD en koorden AB, AC.

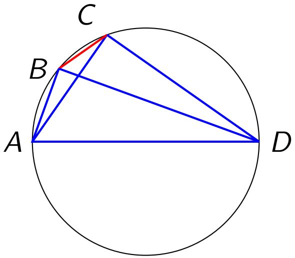
Gevraagd: koorde BC.

Completeer de koordenvierhoek en gebruik Thales:

$BD^2 = AD^2 - AB^2$, $CD^2 = AD^2 - AC^2$.

Toepassing: verschilkoorde

Om de koorde bij het verschil van twee hoeken te vinden.



Gegeven: diameter AD en koorden AB, AC.

Gevraagd: koorde BC.

Completeer de koordenvierhoek en gebruik Thales:

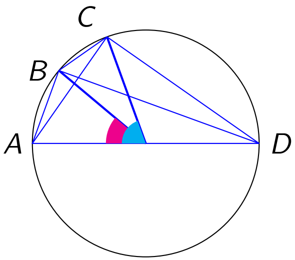
$BD^2 = AD^2 - AB^2$, $CD^2 = AD^2 - AC^2$.

Ptolemaeus toepassen:

$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$

Verband met goniometrie

Om de koorde bij het verschil van twee hoeken te vinden.

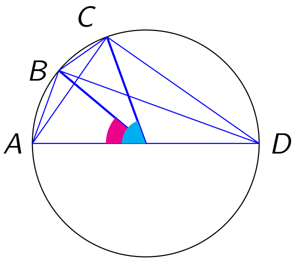


We hebben gevonden:

$$AB \cdot CD + AD \cdot {\color{red}BC} = AC \cdot BD$$

Verband met goniometrie

Om de koorde bij het verschil van twee hoeken te vinden.



We hebben gevonden:

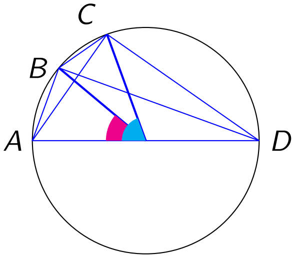
$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

Dit is equivalent met

$$\frac{BC}{AD} = \frac{AC}{AD}\frac{BD}{AD} - \frac{AB}{AD}\frac{CD}{AD},$$

Verband met goniometrie

Om de koorde bij het verschil van twee hoeken te vinden.



We hebben gevonden:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

Dit is equivalent met

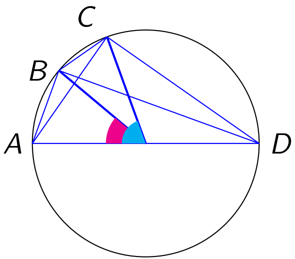
$$\frac{BC}{AD} = \frac{AC}{AD}\frac{BD}{AD} - \frac{AB}{AD}\frac{CD}{AD},$$

oftewel:

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{krd}(\alpha - \beta) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{krd}(\alpha)\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{krd}(180 - \beta) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{krd}\,\beta\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{krd}(180 - \alpha);$$

Verband met goniometrie

Om de koorde bij het verschil van twee hoeken te vinden.



We hebben gevonden:

$$AB \cdot CD + AD \cdot {\color{red}BC} = AC \cdot BD$$

Dit is equivalent met

$$\frac{BC}{AD} = \frac{AC}{AD}\frac{BD}{AD} - \frac{AB}{AD}\frac{CD}{AD},$$

oftewel:

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{krd}(\alpha - \beta) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{krd}(\alpha)\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{krd}(180 - \beta) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{krd}\,\beta\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{krd}(180 - \alpha);$$

maar halve koorde van hoek is sinus van halve hoek, dus:

$$\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Gebruik voor het vinden van koorden

Op dezelfde manier als de verschilformule, vinden we ook een formule voor de koorde van een halve hoek en voor de koorde van de som van twee hoeken.

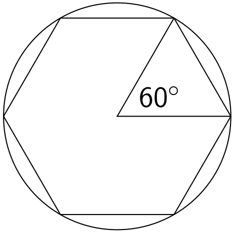
We zullen hier geen tijd aan besteden.

We zullen direct beginnen met het opstellen van de koordentabel.

Doel: koorden van alle hoeken, in stappen van $\frac{1}{2}^\circ$.

We berekenen de eerste koorden

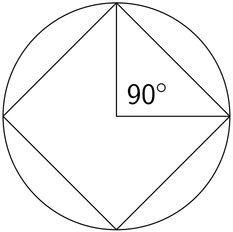
Uit de elementaire (!) meetkunde zijn de volgende koorden bekend in een cirkel met straal 1:



Zeshoek: $\operatorname{krd} 60^\circ = 1$

We berekenen de eerste koorden

Uit de elementaire (!) meetkunde zijn de volgende koorden bekend in een cirkel met straal 1:

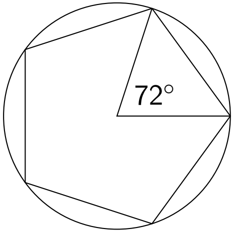


Zeshoek: $\operatorname{krd} 60^\circ = 1$

Vierhoek: $\operatorname{krd} 90^\circ = \sqrt{2} \approx 1{,}41421$

We berekenen de eerste koorden

Uit de elementaire (!) meetkunde zijn de volgende koorden bekend in een cirkel met straal 1:



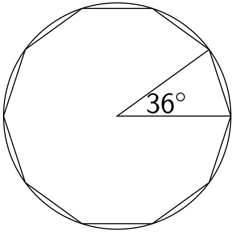
Zeshoek: $\operatorname{krd} 60^\circ = 1$

Vierhoek: $\operatorname{krd} 90^\circ = \sqrt{2} \approx 1{,}41421$

Vijfhoek: $\operatorname{krd} 72^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \approx 1{,}61803$

We berekenen de eerste koorden

Uit de elementaire (!) meetkunde zijn de volgende koorden bekend in een cirkel met straal 1:



Zeshoek: $\operatorname{krd} 60^\circ = 1$

Vierhoek: $\operatorname{krd} 90^\circ = \sqrt{2} \approx 1{,}41421$

Vijfhoek: $\operatorname{krd} 72^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \approx 1{,}61803$

Tienhoek: ...

De tabel verder invullen

We hebben nu de koorden van: 36°, 60°, 72°, 90°

De tabel verder invullen

We hebben nu de koorden van: 36°, 60°, 72°, 90°

Verschilformule toegepast op 72° en 60° geeft 12°

De tabel verder invullen

We hebben nu de koorden van: 36°, 60°, 72°, 90°

Verschilformule toegepast op 72° en 60° geeft 12°

Vervolgens halveren: 6°, 3°, $\frac{3}{2}^\circ$

De tabel verder invullen

We hebben nu de koorden van: 36°, 60°, 72°, 90°

Verschilformule toegepast op 72° en 60° geeft 12°

Vervolgens halveren: 6°, 3°, $\frac{3}{2}^\circ$

Hiermee kunnen we alle veelvouden van $\frac{3}{2}^\circ$ vinden.

De tabel verder invullen

We hebben nu de koorden van: 36°, 60°, 72°, 90°

Verschilformule toegepast op 72° en 60° geeft 12°

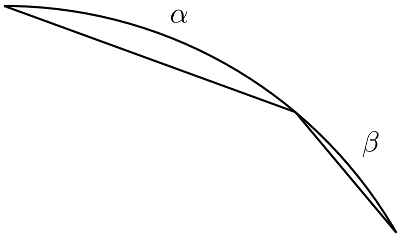
Vervolgens halveren: 6°, 3°, $\frac{3}{2}^\circ$

Hiermee kunnen we alle veelvouden van $\frac{3}{2}^\circ$ vinden.

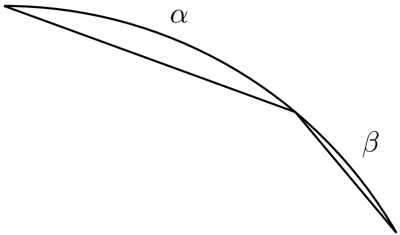
Helaas zijn alle hoeken veelvouden van $\frac{3}{2}^\circ$...

Koorde van 1°

Als $\text{krd}\,\alpha > \text{krd}\,\beta$ dan $\dfrac{\text{krd}\,\alpha}{\alpha} < \dfrac{\text{krd}\,\beta}{\beta}$



Koorde van 1°

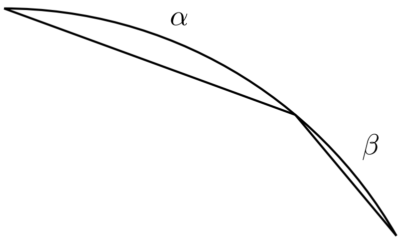


Als $\operatorname{krd}\alpha > \operatorname{krd}\beta$ dan $\dfrac{\operatorname{krd}\alpha}{\alpha} < \dfrac{\operatorname{krd}\beta}{\beta}$

Toepassen met $\alpha = \frac{3}{2}^\circ$ en $\beta = 1^\circ$:

$$1{,}01745 < \operatorname{krd} 1^\circ$$

Koorde van 1°



Als $\operatorname{krd}\alpha > \operatorname{krd}\beta$ dan $\dfrac{\operatorname{krd}\alpha}{\alpha} < \dfrac{\operatorname{krd}\beta}{\beta}$

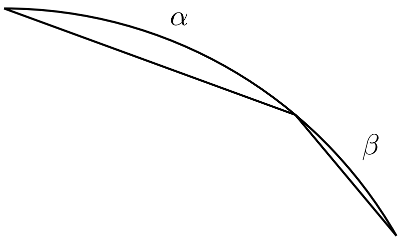
Toepassen met $\alpha = \frac{3}{2}^\circ$ en $\beta = 1^\circ$:

$$1{,}01745 < \operatorname{krd} 1^\circ$$

Toepassen met $\alpha = 1^\circ$ en $\beta = \frac{3}{4}^\circ$:

$$\operatorname{krd} 1^\circ < 1{,}01745$$

Koorde van 1°



Als $\operatorname{krd}\alpha > \operatorname{krd}\beta$ dan $\dfrac{\operatorname{krd}\alpha}{\alpha} < \dfrac{\operatorname{krd}\beta}{\beta}$

Toepassen met $\alpha = \frac{3}{2}^\circ$ en $\beta = 1^\circ$:

$$1{,}01745 < \operatorname{krd} 1^\circ$$

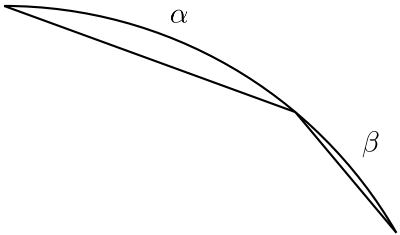
Toepassen met $\alpha = 1^\circ$ en $\beta = \frac{3}{4}^\circ$:

$$\operatorname{krd} 1^\circ < 1{,}01745$$

Conclusie:

$$\operatorname{krd} 1^\circ = 1{,}01745$$

Koorde van 1°



Als $\text{krd}\,\alpha > \text{krd}\,\beta$ dan $\dfrac{\text{krd}\,\alpha}{\alpha} < \dfrac{\text{krd}\,\beta}{\beta}$

Toepassen met $\alpha = \frac{3}{2}^\circ$ en $\beta = 1^\circ$:

$$1{,}01745 < \text{krd}\,1^\circ$$

Toepassen met $\alpha = 1^\circ$ en $\beta = \frac{3}{4}^\circ$:

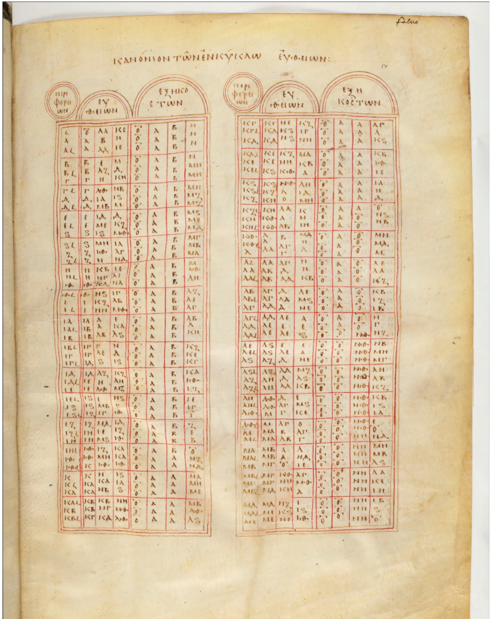
$$\text{krd}\,1^\circ < 1{,}01745$$

Conclusie:

$$\text{krd}\,1^\circ = 1{,}01745$$

en vervolgens $\text{krd}\,\frac{1}{2}^\circ = 0{,}8727$

Het resultaat: de koordentabel



Toelichting

sexagesimaal

straal $R = 60$ ipv $R = 1$ (later ook andere, zoals $R = 3438$)

getalsysteem

interpolatiekolommen

Conclusie

necessity is the mother of invention

goniometrie ten behoeve van astronomie

verankerd in Euclidische meetkunde

Grieks-Babylonische symphonie

vorm: koorden (lijnstuk) i.p.v. sinus (verhouding)

Dank

Dank aan mijn collega Rob van Gent voor inspiratie en afbeeldingen
`https://www.staff.science.uu.nl/~gent0113/homepage.htm`

Bibliografie

[1] Glen van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth*, Princeton 2009.

[2] Glen van Brummelen, *Mathematical Tables in Ptolemy's Almagest*, Ph.D. dissertation, Simon Fraser University, 1993.

[3] Claudius Ptolemy, *The Almagest*, selections translated by Bruce Perry, Green Lion Press 2014.

[4] C.M. Linton, *From Eudoxus to Einstein*, Cambridge 2004.

[5] G.J. Toomer, *Ptolemy's Almagest*, Duckworth 1984.

[6] O. Pedersen, *A Survey of the Almagest*, Odense 1974 (heruitgave: Springer 2011).

[7] *C. Ptolemaei magnae constructionis libri XIII*, ms. Grec 2389, Bibliothèque nationale de France, ca. 9e eeuw (online: gallica.bnf.fr).

[8] Chr. Walker (editor), *Astronomy before the Telescope*, British Museum Press 1996.