

## Note to self

- ▶ voor de workshop is ca 70 minuten nodig
- ▶ vooraf staartdelen ophalen
- ▶ misschien combi met worteltrekken?

# Het gemak van logaritmen

Steven Wepster

Mathematisch Instituut  
Universiteit Utrecht

4 maart 2024

# Astronomische berekeningen

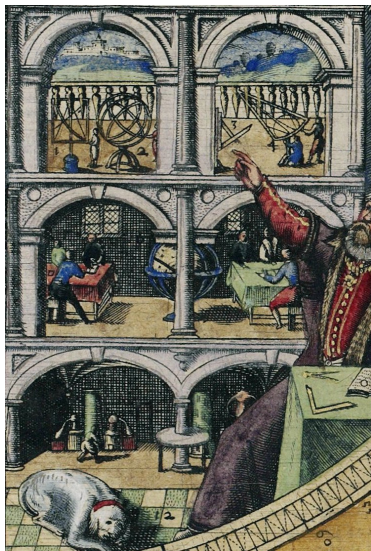


Tycho Brahes grote kwadrant

- ▶ Eind 16e eeuw: Veel rekenwerk voor astronomen
- ▶ Grote getallen vermenigvuldigen en delen
- ▶ Tijdrovend en foutgevoelig
- ▶ Een typisch voorbeeld van een berekening is

$$\cos \alpha = \frac{\cos 38^\circ - \cos 51^\circ \cos 67^\circ}{\sin 51^\circ \sin 67^\circ}$$

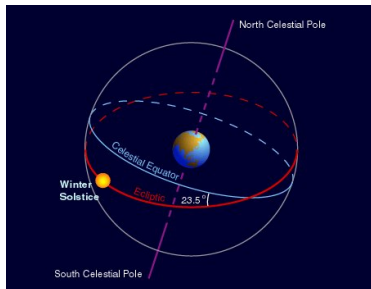
## Concreet voorbeeld



Tycho Brahe, detail

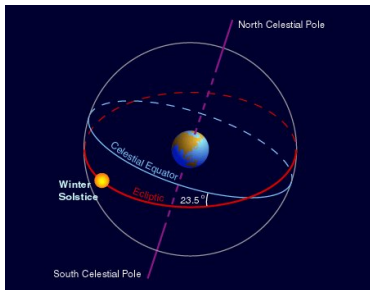
- ▶ Tycho meet elke dag zeer nauwkeurig de hoogte van de zon wanneer die in de meridiaan staat.
- ▶ Hij wil met deze informatie uitrekenen waar de zon elke dag staat in zijn jaarlijkse baan om de aarde
- ▶ Voor deze routineklus gaan we hem helpen door een tabel te maken

# Een paar astronomische begrippen



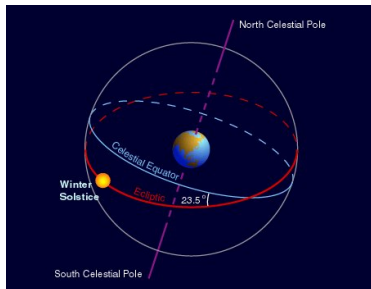
## ► Hemelsfeer

# Een paar astronomische begrippen



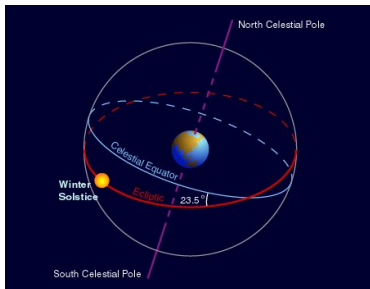
- ▶ Hemelsfeer
- ▶ Equator

# Een paar astronomische begrippen



- ▶ Hemelsfeer
- ▶ Equator
- ▶ Ecliptica, hoek  $\epsilon \approx 23\frac{1}{2}^{\circ}$

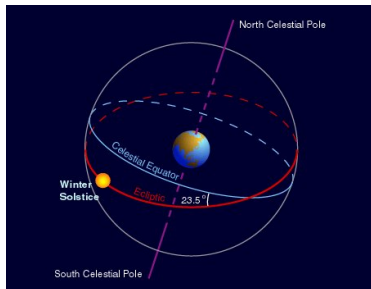
# Een paar astronomische begrippen



- ▶ Hemelsfeer
- ▶ Equator
- ▶ Ecliptica, hoek  $\epsilon \approx 23\frac{1}{2}^{\circ}$
- ▶ Declinatie  $\delta$ :  
boog  $\perp$  Equator naar de zon

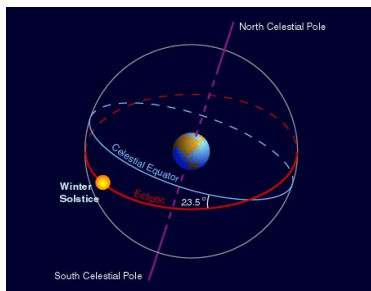


# Een paar astronomische begrippen



- ▶ Hemelsfeer
- ▶ Equator
- ▶ Ecliptica, hoek  $\epsilon \approx 23\frac{1}{2}^{\circ}$
- ▶ Declinatie  $\delta$ :  
boog  $\perp$  Equator naar de zon
- ▶ Lengte  $\lambda$ :  
boog langs Ecliptica tot zon

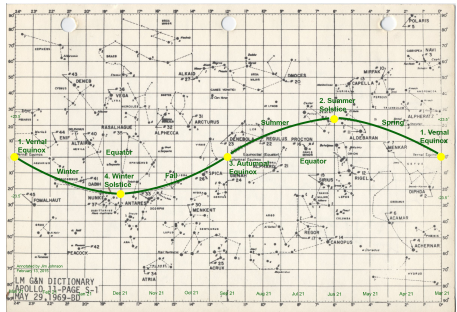
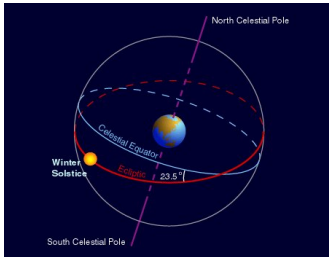
# Een paar astronomische begrippen



- ▶ Hemelsfeer
- ▶ Equator
- ▶ Ecliptica, hoek  $\epsilon \approx 23\frac{1}{2}^\circ$
- ▶ Declinatie  $\delta$ :  
boog  $\perp$  Equator naar de zon
- ▶ Lengte  $\lambda$ :  
boog langs Ecliptica tot zon

Tycho kan  $\delta$  makkelijk uitrekenen:  $\delta = \text{breedte} + \text{hoogte} - 90^\circ$ ,  
maar hij wil  $\lambda$  weten.

# Verband met sterrenbeelden



	$\lambda$		$\lambda$		$\lambda$	$\delta$
lente	0	Ram	30	Stier	60	0... $\epsilon$
zomer	90	Kreeft	120	Leeuw	150	$\epsilon$ ...0
herfst	180	Weegschaal	210	Schorpioen	240	0...- $\epsilon$
winter	270	Steenbok	300	Waterman	330	- $\epsilon$ ...0

# Tabel maken

- ▶ Wij gaan een hulptabel maken voor  $\lambda$  als functie van  $\delta$ .

# Tabel maken

- ▶ Wij gaan een hulptabel maken voor  $\lambda$  als functie van  $\delta$ .
- ▶ Uit boldriehoeken is bekend:

$$\sin \lambda = \frac{\sin \delta}{\sin \epsilon}, \text{ waarin } \epsilon = 23\frac{1}{2}^\circ.$$

# Tabel maken

- ▶ Wij gaan een hulptabel maken voor  $\lambda$  als functie van  $\delta$ .
- ▶ Uit boldriehoeken is bekend:

$$\sin \lambda = \frac{\sin \delta}{\sin \epsilon}, \text{ waarin } \epsilon = 23\frac{1}{2}^\circ.$$

- ▶ We doen het op drie manieren:
  1. met sinustabel en handmatig delen
  2. met prostaphaerese (een voorloper van log)
  3. met logaritmen

Uiteraard zonder rekenmachine!

# Tabel maken

- ▶ Wij gaan een hulptabel maken voor  $\lambda$  als functie van  $\delta$ .
- ▶ Uit boldriehoeken is bekend:

$$\sin \lambda = \frac{\sin \delta}{\sin \epsilon}, \text{ waarin } \epsilon = 23\frac{1}{2}^\circ.$$

- ▶ We doen het op drie manieren:
  1. met sinustabel en handmatig delen
  2. met prostaphaerese (een voorloper van log)
  3. met logaritmen

Uiteraard zonder rekenmachine!

- ▶ We verdelen het werk: iedereen zijn eigen  $\delta$  en we verzamelen de resultaten.
- ▶ Houd bij hoeveel tijd je voor elke manier nodig hebt!

# Methode 1: handmatig

1. Zoek in de sinustabel:

$\sin \delta$  voor je eigen  $\delta$ , en

$\sin \epsilon$  voor  $\epsilon = 23\frac{1}{2}^\circ$ .

2. Bereken  $\sin \lambda = \frac{\sin \delta}{\sin \epsilon}$  met een staartdeling
3. Zoek in de sinustabel welke waarde van  $\lambda$  hierbij hoort.
4. Geef het resultaat door aan de centrale tabellenmaker.



## Methode 2: prostaphaerese

werd korte tijd gebruikt vóór de logaritmes

▶ **Principe:** gonioformule

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2} \left( \sin(90^\circ - p + q) - \sin(90^\circ - p - q) \right).$$

## Methode 2: prostaphaerese

werd korte tijd gebruikt vóór de logaritmes

- ▶ **Principe:** gonioformule

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2} \left( \sin(90^\circ - p + q) - \sin(90^\circ - p - q) \right).$$

- ▶ **Maar!** wij moeten vermenigvuldigen met  $\frac{1}{\sin \epsilon} \approx 2.5$ .

## Methode 2: prostaphaerese

werd korte tijd gebruikt vóór de logaritmes

- ▶ **Principe:** gonioformule

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2} \left( \sin(90^\circ - p + q) - \sin(90^\circ - p - q) \right).$$

- ▶ **Maar!** wij moeten vermenigvuldigen met  $\frac{1}{\sin \epsilon} \approx 2.5$ .
- ▶ **Truc:** we kiezen  $p$  zo dat  $\sin p = \frac{1}{10 \sin \epsilon}$ , en  $q = \delta$ ,  
en we berekenen

$$\sin \lambda = 5 \left( \sin(90^\circ - p + \delta) - \sin(90^\circ - p - \delta) \right)$$

## Methode 2: prostaphaerese

werd korte tijd gebruikt vóór de logaritmes

- ▶ **Principe:** gonioformule

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2} \left( \sin(90^\circ - p + q) - \sin(90^\circ - p - q) \right).$$

- ▶ **Maar!** wij moeten vermenigvuldigen met  $\frac{1}{\sin \epsilon} \approx 2.5$ .
- ▶ **Truc:** we kiezen  $p$  zo dat  $\sin p = \frac{1}{10 \sin \epsilon}$ , en  $q = \delta$ , en we berekenen

$$\sin \lambda = 5 \left( \sin(90^\circ - p + \delta) - \sin(90^\circ - p - \delta) \right)$$

- ▶ Dus procedure is:
  1. Eerst gezamenlijk  $90^\circ - p$  vinden,
  2. daarna ieder eigen  $\lambda$  uitrekenen met eigen  $\delta$ .

## $p$ vinden

- ▶ Met  $\epsilon = 23^\circ 30'$  in sinustabel zoeken:  $\sin \epsilon = 0,3987$ .

## $p$ vinden

- ▶ Met  $\epsilon = 23^\circ 30'$  in sinustabel zoeken:  $\sin \epsilon = 0,3987$ .

- ▶ Staartdeling uitvoeren:

$$\begin{array}{r} 2508 \\ 3987 \overline{) 10000000} \\ \underline{7974} \\ 20260 \\ \underline{19935} \\ 32500 \\ \underline{31896} \\ 604 \end{array}$$

## $p$ vinden

- ▶ Met  $\epsilon = 23^\circ 30'$  in sinustabel zoeken:  $\sin \epsilon = 0,3987$ .

- ▶ Staartdeling uitvoeren:

$$\begin{array}{r} 2508 \\ 3987 \overline{) 10000000} \\ \underline{7974} \\ 20260 \\ \underline{19935} \\ 32500 \\ \underline{31896} \\ 604 \end{array}$$

- ▶ Zoek 0,2508 in tabel, dit staat tussen  $14^\circ 30'$  en  $14^\circ 36'$
- ▶ Interpolatie:  $p \approx 14^\circ 31,4'$
- ▶ Dus:  $90^\circ - p \approx 75^\circ 28.5'$ .

## $p$ vinden

- ▶ Met  $\epsilon = 23^\circ 30'$  in sinustabel zoeken:  $\sin \epsilon = 0,3987$ .

- ▶ Staartdeling uitvoeren:
- $$\begin{array}{r} 2508 \\ 3987 \overline{) 10000000} \\ \underline{7974} \\ 20260 \\ \underline{19935} \\ 32500 \\ \underline{31896} \\ 604 \end{array}$$

- ▶ Zoek 0,2508 in tabel, dit staat tussen  $14^\circ 30'$  en  $14^\circ 36'$
- ▶ Interpolatie:  $p \approx 14^\circ 31,4'$
- ▶ Dus:  $90^\circ - p \approx 75^\circ 28.5'$ .
- ▶ Dit toepassen in:

$$\sin \lambda = 5 \left( \sin(90^\circ - p + \delta) - \sin(90^\circ - p - \delta) \right)$$



## Methode 3: logaritmen

- ▶ We gebruiken een log-sinustabel, maar om negatieve getallen te voorkomen is bij elke tabelwaarde 10 opgeteld. In de tabel staat dus  $f(x) = 10 + \log \sin x$ .

## Methode 3: logaritmen

- ▶ We gebruiken een log-sinustabel, maar om negatieve getallen te voorkomen is bij elke tabelwaarde 10 opgeteld. In de tabel staat dus  $f(x) = 10 + \log \sin x$ .
- ▶ We willen eigenlijk uitrekenen:

$$\log \sin \lambda = \log \sin \delta - \log \sin \epsilon.$$

## Methode 3: logaritmen

- ▶ We gebruiken een log-sinustabel, maar om negatieve getallen te voorkomen is bij elke tabelwaarde 10 opgeteld. In de tabel staat dus  $f(x) = 10 + \log \sin x$ .
- ▶ We willen eigenlijk uitrekenen:

$$\log \sin \lambda = \log \sin \delta - \log \sin \epsilon.$$

- ▶ Met de tabel wordt dat:

$$f(\lambda) = 10 + f(\delta) - f(\epsilon)$$

Gebruik dit om je  $\lambda$  te vinden.

# Conclusie

- ▶ Logarithmen zijn uitgevonden om vermenigvuldigen/delen te kunnen vervangen door optellen/afrekken.
- ▶ Je hebt aan den lijve ondervonden hoeveel sneller en makkelijker het rekenwerk daardoor wordt.