Polynomen = veeltermen zijn dingen die je kunt schrijven als

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

De graad van een veelterm is de hoogste macht die voorkomt

zoals bijvoorbeeld

$$3x^7 + 6x^4 - 8x^3 + x + 7$$

→ Graad 7

maar ook bijv

$$(x+1)^5 \quad \text{want} \quad (x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

NB: $a_1 x$ of $a_n x^n$ heten termen

→ hierin heten a_1 en x factoren

VB: $\boxed{(x+1)^5} = \boxed{(x+1)(x+1) \dots (x+1)}$ ← veelterm van graad 5

↓ factor met daarin twee termen nl. x, 1

Factoriseren = ontbinden in factoren

Factorstelling voor polynomen

Als $p(z)$ een veelterm is met $z \in \mathbb{C}$, en $a \in \mathbb{C}$, dan geldt:

$p(a) = 0$ precies dan als $z-a$ een factor is van p

Voorbeeld:

$p(z) = z^3 - 15z - 4$. Weten: $z=4$ is een nulpunt

heet ook wel:

$z=4$ is een wortel

Dus is $z^3-15z-4$ deelbaar door $z-4$.

Omgekeerd:

als je weet dat je polynoom te schrijven is

als $p(z) = (z+1)(z^3-2z+28)$ dan is $z=-1$

een wortel van p.

Delen van polynomen

$$z-4 \,/\, z^3 \qquad - 15z - 4 \,\backslash\, z^2 + 4z + 1$$

$$\underline{z^3 - 4z^2} \; -$$

$$+4z^2 - 15z - 4$$

$$\underline{4z^2 - 16z}$$

$$z - 4$$

$$\underline{z - 4}$$

$$0$$

Dus

$$z^3 - 15z - 4 = (z-4)(z^2+4z+1)$$

Deze techniek helpt om nulpt te vinden.

Delen komt niet altijd uit

$$
\begin{array}{l}
z-1 \,/\, z^3 - 15z - 4 \,\backslash\, z^2 + z - 14 \\
\qquad\quad \underline{z^3 - z^2} \\
\qquad\qquad +z^2 - 15z - 4 \\
\qquad\qquad \underline{z^2 - z} \\
\qquad\qquad\quad -14z - 4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-14z + 14} \\
\qquad\qquad\qquad -18
\end{array}
$$

-18 komt niet uit

dus:

$$z^3 - 15z - 4$$

$$= (z-1)(z^2+z-14) - 18$$

Neem veelterm $z^5 - 1$
Vind alle nulpunten

$z = 1$ doet het.
Dus $z-1$ is een factor

$$
\begin{array}{l}
z-1 \,/\, z^5 - 1 \,\backslash\, \underline{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1} \\
\quad \underline{z^5 - z^4} \\
\qquad z^4 - 1 \\
\qquad \underline{z^4 - z^3} \\
\qquad\quad z^3 - 1 \\
\qquad\quad \underline{z^3 - z^2} \\
\qquad\qquad z^2 - 1 \\
\qquad\qquad \underline{z^2 - z} \\
\qquad\qquad\quad z - 1
\end{array}
$$

Nulpunten ???

Blikwisseling:
de vgl $z^5 - 1 = 0$
is dezelfde vgl als

$$z^5 = 1$$

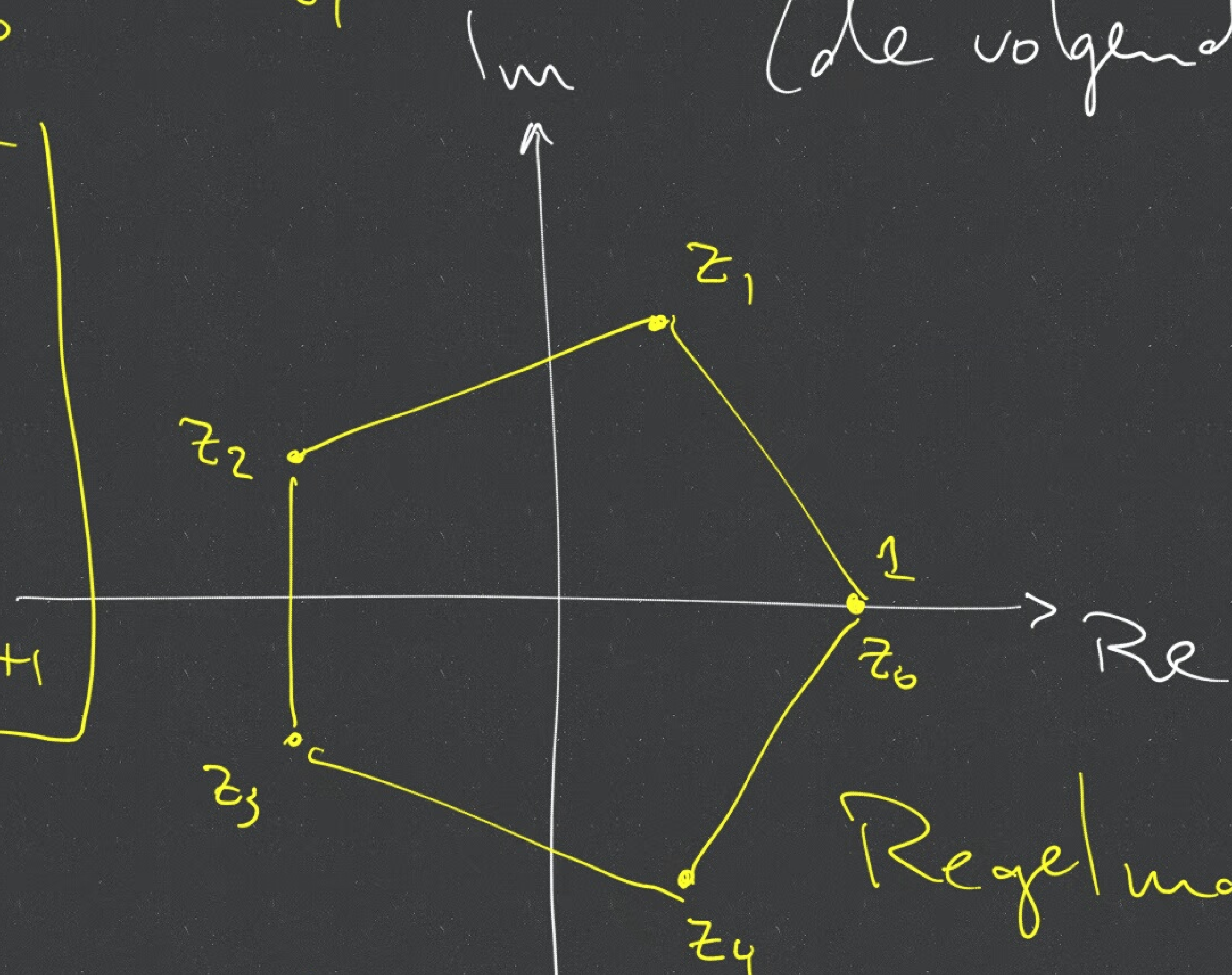
dus wortels zijn alle waarden
van $\sqrt[5]{1}$ Lees: $1 = 1e^{0i}$

$$1 = e^{0} = e^{i2\pi} = e^{i4\pi} = e^{i6\pi} = e^{i8\pi}$$

$$\sqrt[5]{1} = \underbrace{1}_{\text{Noem ze } z_0}, \text{ of } \underbrace{e^{i\pi\frac{2}{5}}}_{z_1} \text{ of } \underbrace{e^{\frac{4}{5}\pi i}}_{z_2} \text{ of } \underbrace{e^{\frac{6}{5}\pi i}}_{z_3} \text{ of } \underbrace{e^{\frac{8}{5}\pi i}}_{z_4}$$

(de volgende, $e^{\frac{10}{5}\pi i} = e^{2\pi i} = 1$)

$$\boxed{z_1 \text{ t/m } z_4 \text{ zijn de nulpunten van } z^4+z^3+z^2+z+1}$$



$|z_n| = 1$

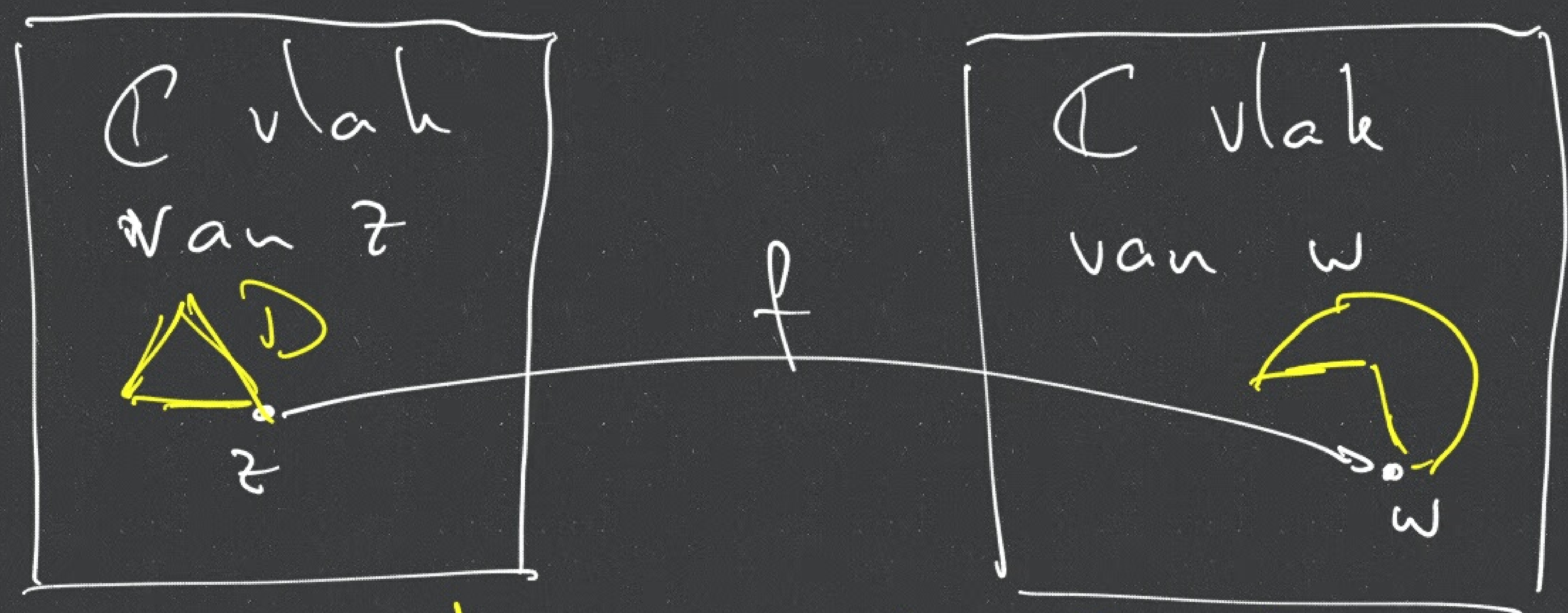
$\arg z_n = \frac{2n\pi}{5}$

Regelmatige vijfhoek.

$$z^5 - 1 = (z-1)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$

Functies op $\mathbb{C}$

$w = f(z)$



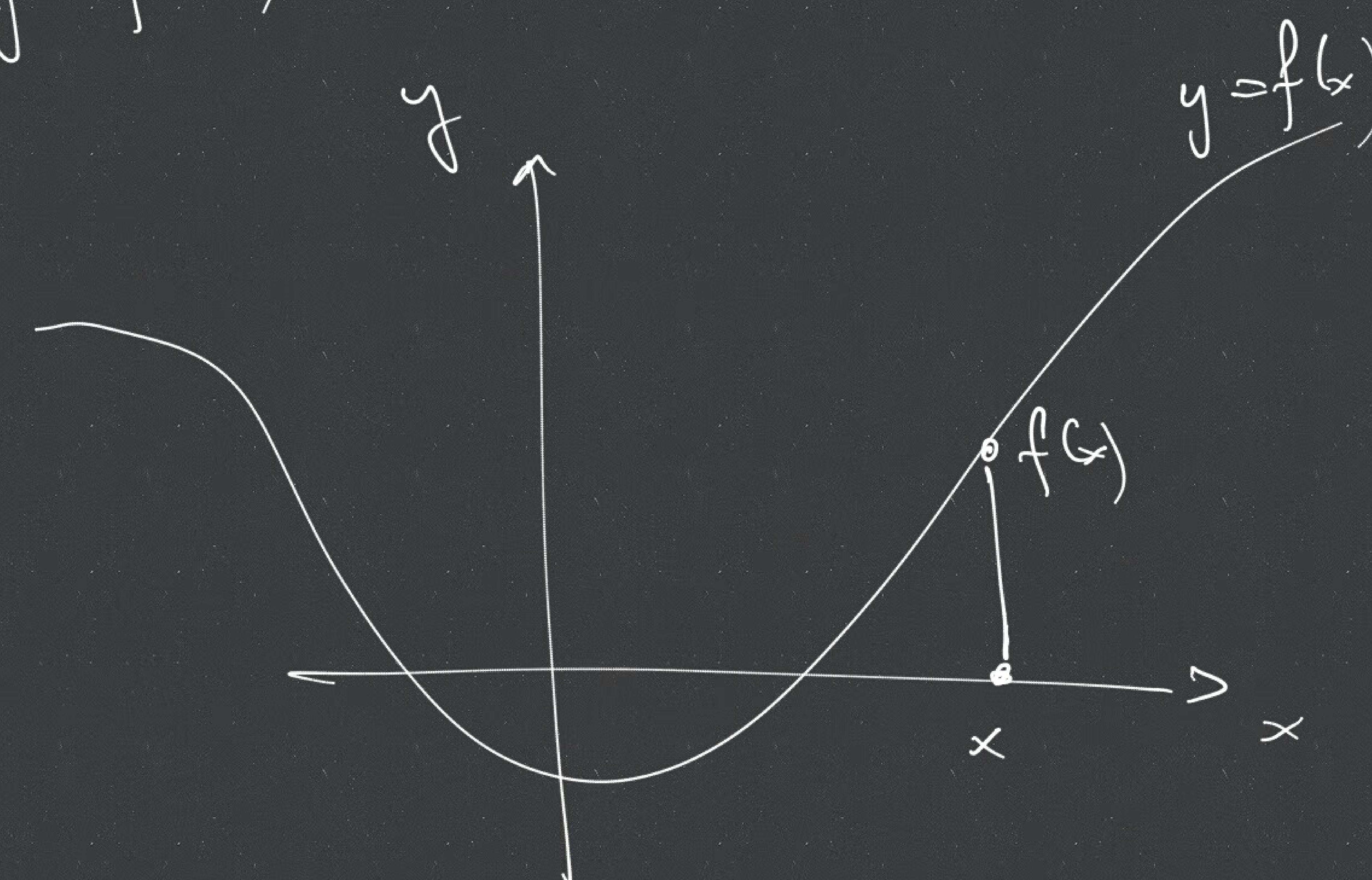
We doen dit steeds
alleen voor een
stukje van $\mathbb{C}$

D = domein

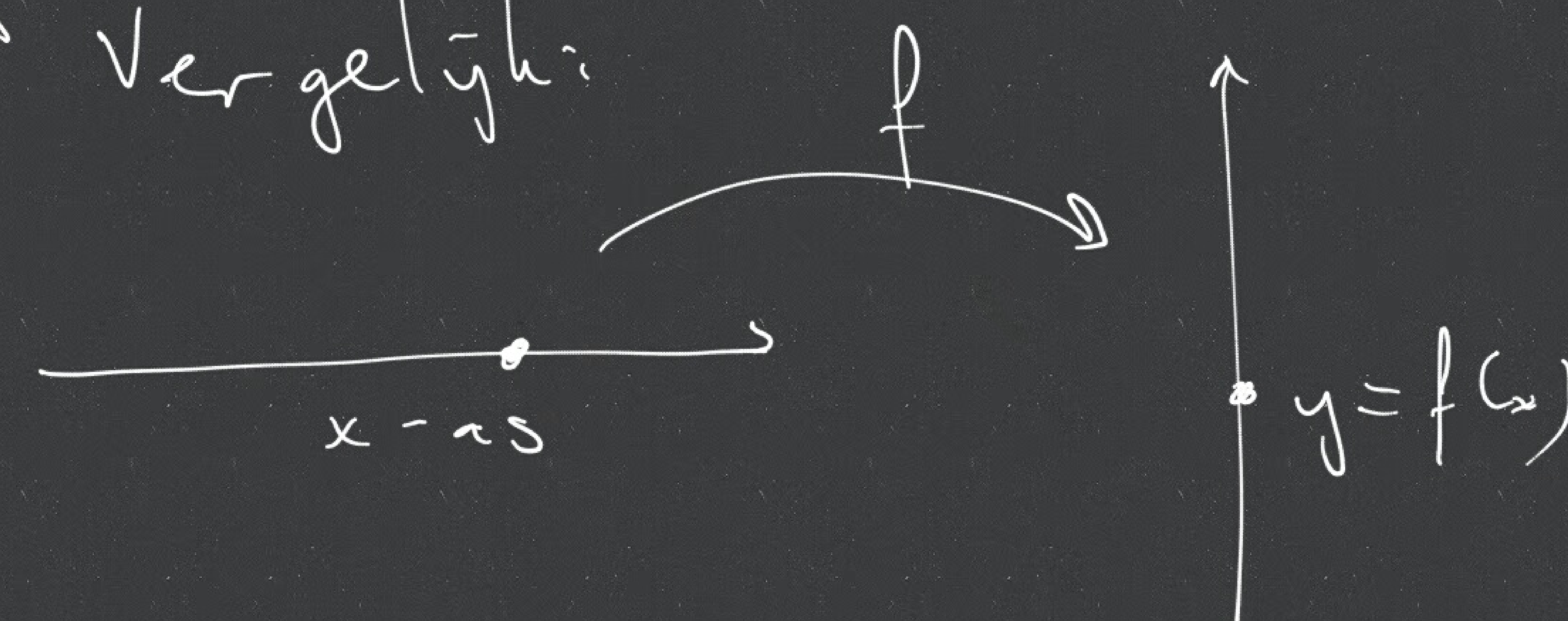
R = range (bereik)
waar je heen gaat

Functies op $\mathbb{R}$: grafiek

$y = f(x)$



Vergelijk:



<u>Voorbeeld.</u>

$D: \quad z = ai \quad \text{met} \quad -\pi \leq a \leq +\pi$

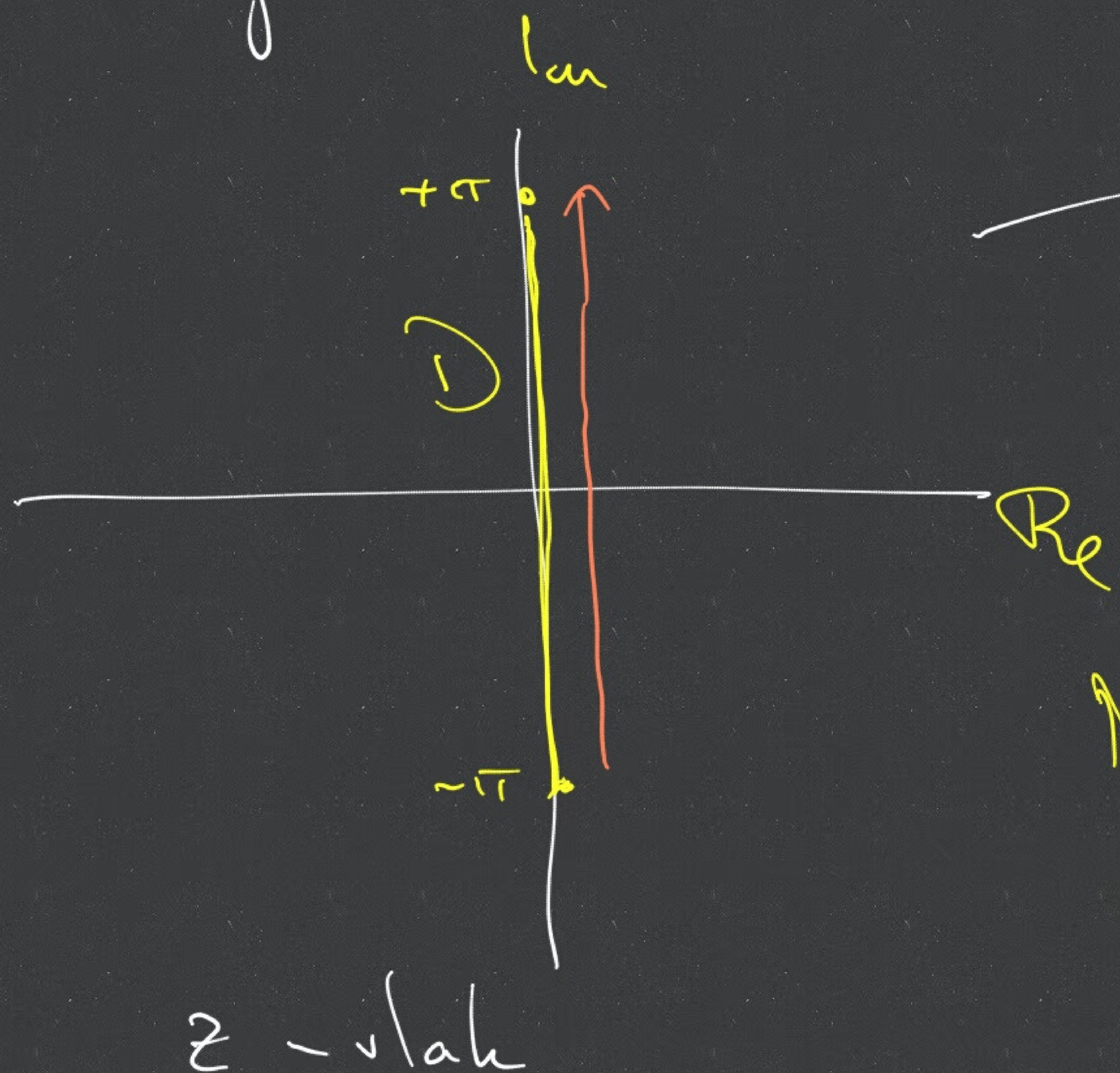
$f: \quad f(z) = e^{z}$

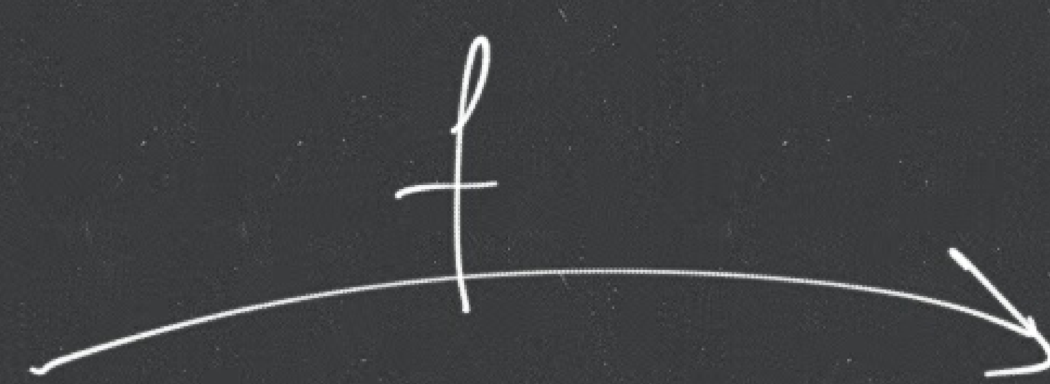
Vraag: hoe ziet R eruit?

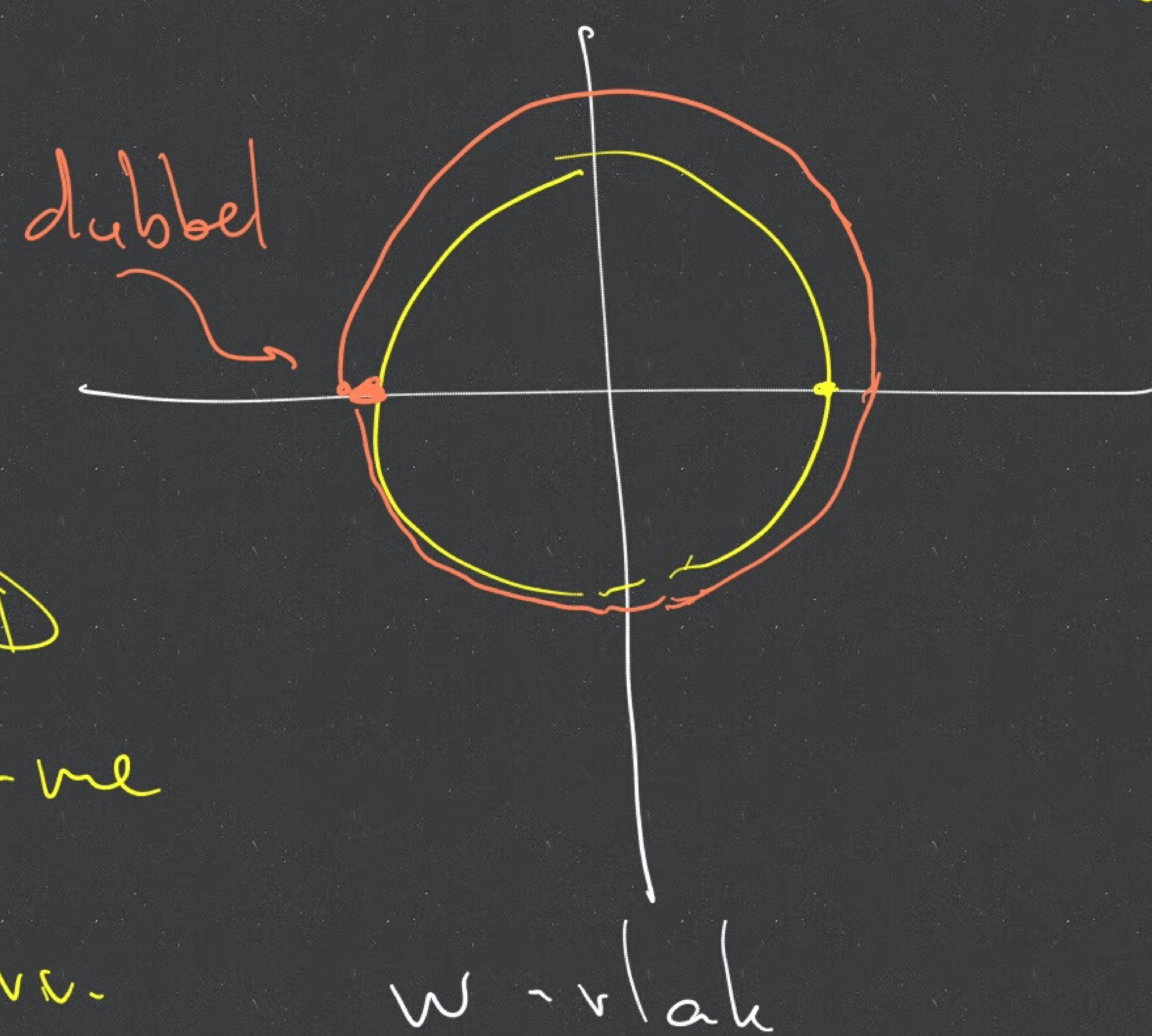
$w = f(z)$

$w = e^{ai} \quad \text{met} \quad -\pi \leq a \leq +\pi$

NB: $|w| = 1, \quad \arg w = a$







NB: rechte D
kan op kromme
R worden
afgebeeld v.v.


D

Inverse functies   Boek Hst 3 dus op $\mathbb{R}$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

We zeggen dat een fie 1-op-1 is indien:

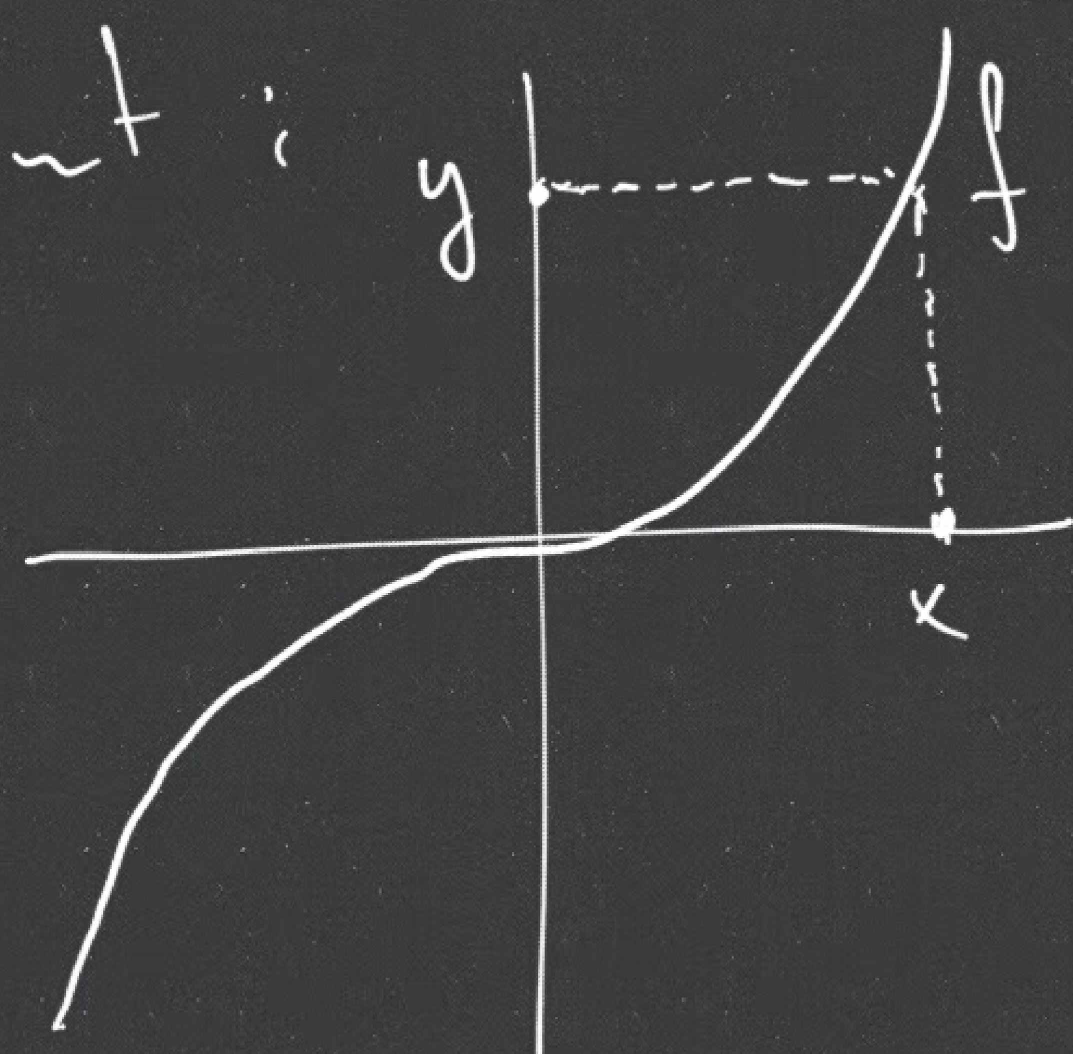
uit $f(x_1) = f(x_2)$ volgt $x_1 = x_2$

maw: alle beelden $f(x)$ zijn uniek

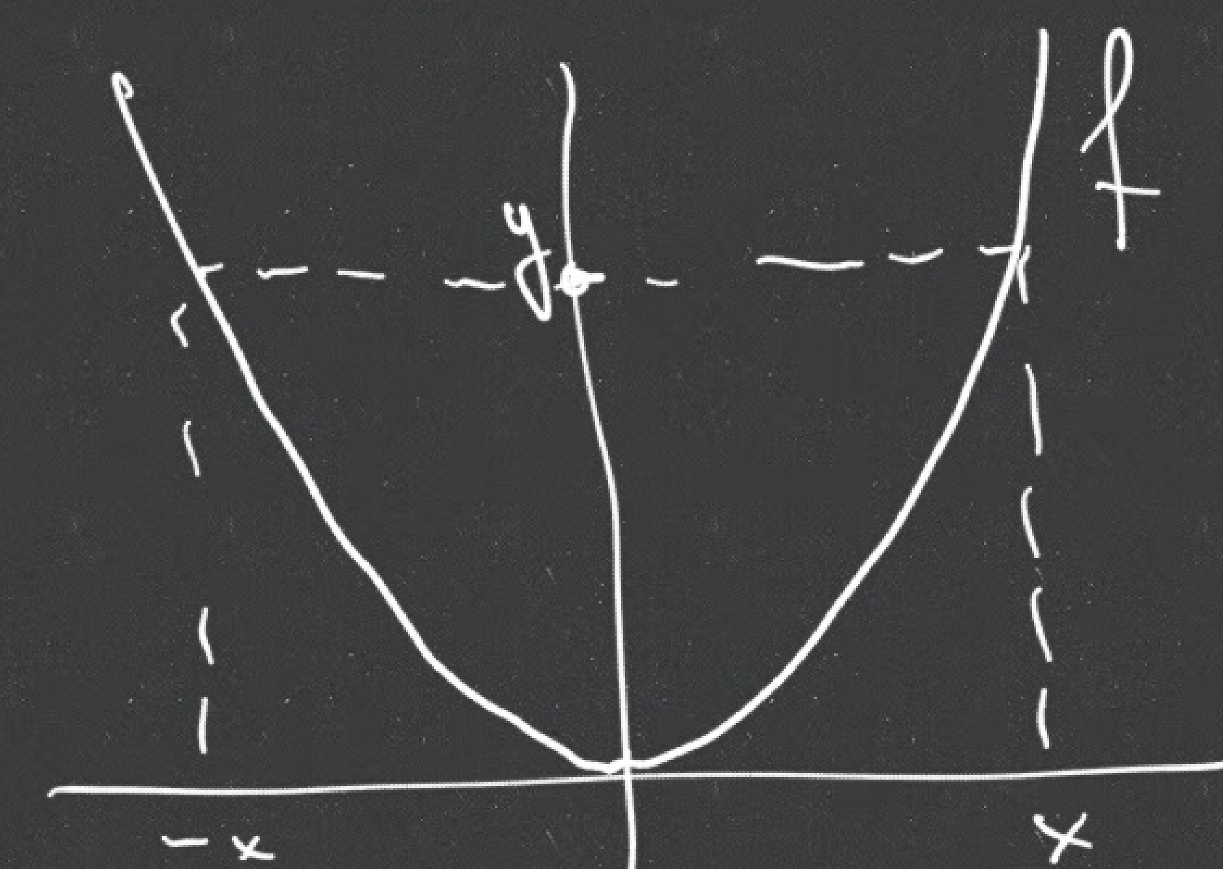
Voorbeeld:

$f(x) = x^3$ is 1-op-1

want:



Non voorbeeld $f(x) = x^2$



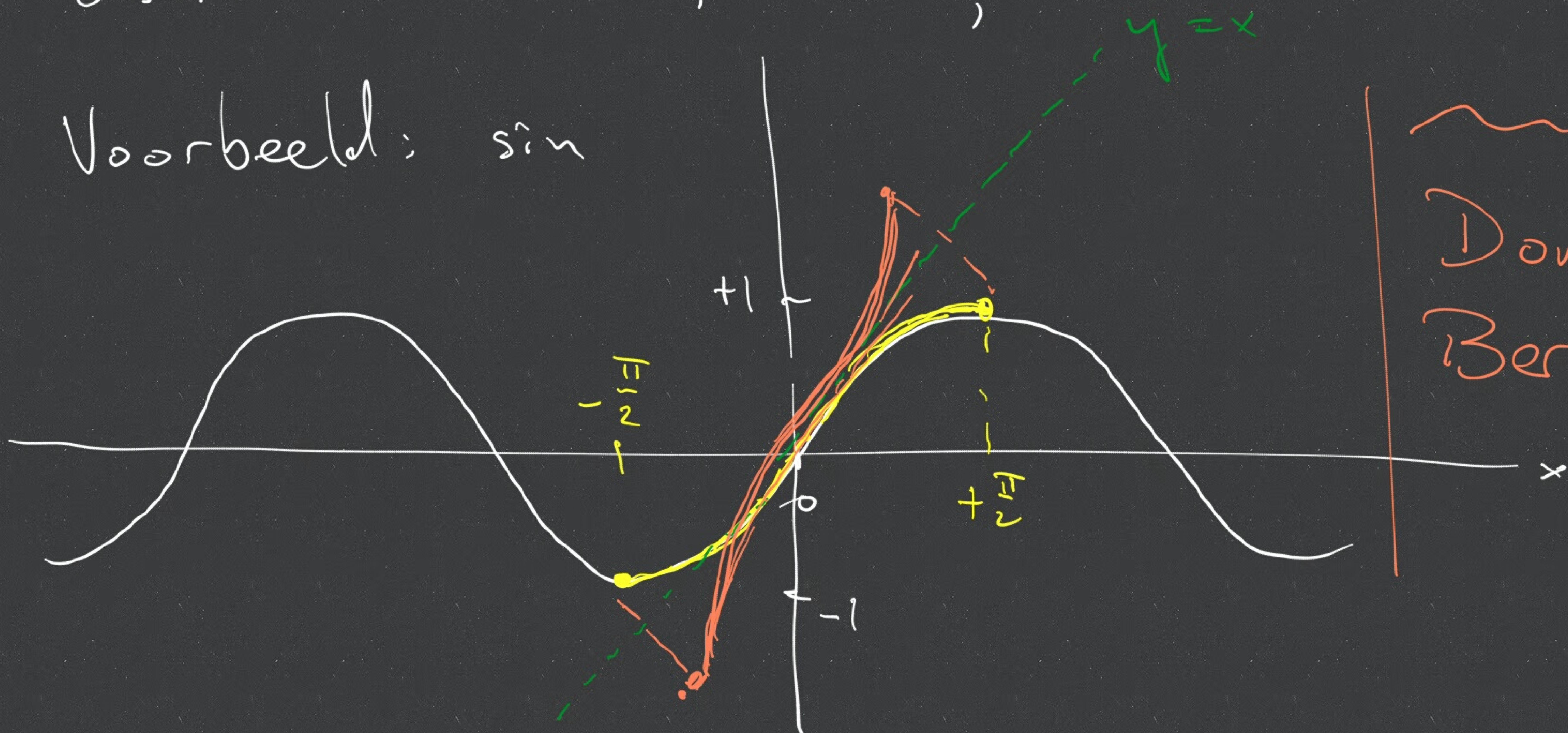
Uitsluitend 1-op-1 functies hebben een inverse.

Inverse van sin, cos, tan $\longrightarrow$ zijn niet 1-op-1

heten arcsin, arccos, arctan

USA: $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$

Voorbeeld: sin



$\sim$ arcsin

Domein: $-1 \leq x \leq +1$

Bereik: $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$