$|x|$ abs. waarde van $x \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ zorg dat je ze begrijpt.

$|z|$ modulus van $z \in \mathbb{C}$

$|\bar{x}|$ lengte van vector $\bar{x}$

OPSPLITSEN:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Voorbeeld:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |\sin x| \, dx = \int_{-\pi}^{0} -\sin x \, dx + \int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$$

$$|a+b| = \begin{cases} a+b & \text{als } a+b \geq 0 \\ -(a+b) & \text{als } a+b < 0 \end{cases}$$

NB: $|a+b| \neq |a| + |b|$ althans niet altijd.

Tegenvoorbeeld:

$$|3+(-1)| = 2, \quad |3| + |-1| = 4, \quad 2 \neq 4.$$

Vandaag: leeswijzer §8 D.V.

Al gezien: $\boxed{y' = y}$ is een d.v. Stel $y = y(x)$

De alg. opl. van deze d.v. is: $y(x) = ce^x$

Dit stelt ongeremde groei voor.

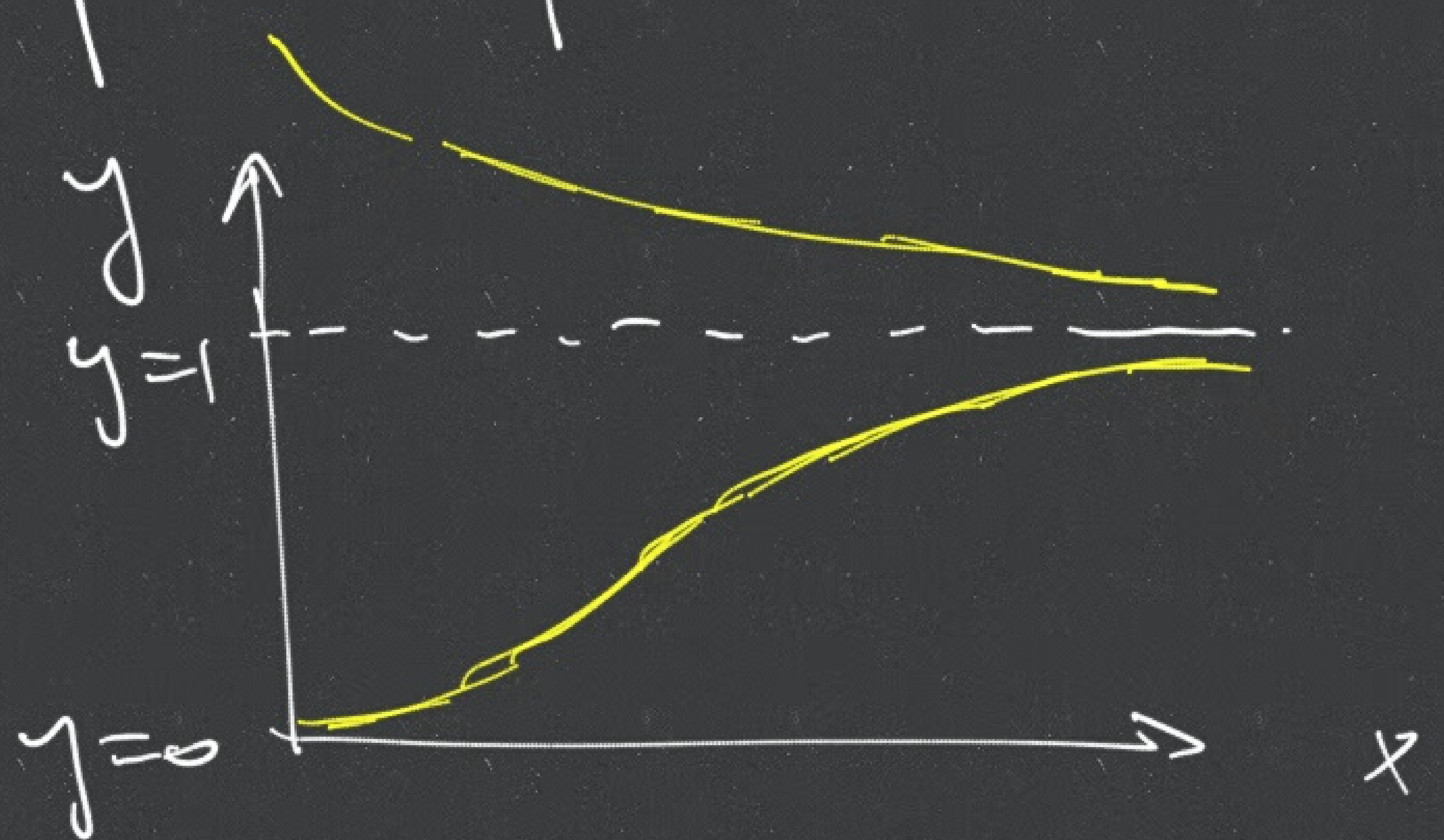
Realistischer! rekening houden met beperkingen v.d. omgeving. Nodig: een rem op de groei

Bijvoorbeeld:

$$\boxed{y' = y(1-y)}$$

- evenwicht als $y' = 0$
  dwz $y = 0$ of als $y = 1$
- als $0 < y < 1$ dan is $y' > 0$

plaatje



$$y' = y\underbrace{(1-y)}_{\uparrow\ \text{"rem"}}$$

(NB als $y>1$ dan is $y'<0$)

Dit model heet "logistische groei"

Oplossen mbv <u>scheiden</u>:

$\frac{dy}{dx} = y(1-y)$ scheiden geeft $\underbrace{\int \frac{dy}{y(1-y)}}_{\text{moeilijker}} = \underbrace{\int dx}_{\text{makkelijk}}$

$$\boxed{\text{Zelf checken dat } y = \frac{ce^x}{1+ce^x} \text{ voldoet aan de d.v.}}$$

St 4: als $x > 0$ dan $\log(x) \leq x - 1$

Bewijs: kijk naar

$$
\left.
\begin{aligned}
g(x) &= \log x - (x-1) \\
&= \log x - x + 1
\end{aligned}
\right|
$$

alleen voor $x > 0$.

Er geldt:

1). $g(1) = 0 - 1 + 1 = 0$

2). $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$

$g'(x) = 0$ als $\dfrac{1}{x} = 1$ dwz $x = 1$

NB de fie g heeft geen knikken of randpunten dus het enige extreem zit in $x=1$. Min of max?

x	0		1	
$g(x)$		STYGEN	0	DALEN
$g'(x)$		$++$	0	$--$

ZOZ.

Hieruit volgt: 1) g heeft een maximum in $x=1$

2). $g(1) = 0$

Concludeer: als $x>0$ dan $g(x) \leq 0$

dus $\log x \leq x-1$

St. 5 als $a>0$ dan $\boxed{\frac{x^a}{e^x} \to 0 \text{ als } x \to \infty}$

en $\boxed{\frac{\log x}{x^a} \to 0 \text{ als } x \to \infty}$

ZEER BELANGRYK.

Lineaire DV.

voorbeelden: $\qquad x = x(t)$

1e orde

$$x' + 3x = 0$$

$$t^4 x' - \big(t(t+1)\sin t\big)\, x = \tan t$$

$$p(t)\, x' + q(t)\, x = r(t)$$

nonvoorbeeld: $\quad t^4 x x' - t x = \tan t$

2e orde:

$$t x'' - t^2 x' + t^3 x = \sin t$$

$$x'' + t^7 \sin t \; x = 0$$

nonvoorbeeld: $\quad (x'')^2 + 7x' - 3x = 27$

$$x'(1-x) + x'' = \sin t$$

Waar lineair?

(terzijde)

Als je een lin. d.v. hebt bijv $p(t)x'' + q(t)x' + r(t)x = 0$

standaardvorm

en stel $x_1(t)$ is een opl.

$x_2(t)$ is een andere opl.

dan is $\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$ ook een oplossing.

Onderscheid tussen

Homogene d.v. Er komen alleen termen voor waarin x of z'n afgeleides voorkomen

homogeen

Inhomogene d.v. anders

Voorbeeld:

$x'' + x' - x = \sin t$ niet homogeen

$x'' + x' - x - \sin t = 0$ niet homogeen

$x'' + x' - x = 0$ wel homogeen

Het oplossen van de inhom. 1e orde lin. d.v.

Voorbeeld. $\boxed{\text{Los op} \quad x' + \frac{1}{t}x = 1}$

Stadium 1: doe de eerst de hom. vgl.
Stadium 2: krik je oplossing op tot een opl vd inhom.

Stadium 1 los op: $x' + \frac{1}{t}x = 0$ door scheiden

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dt}{t}$$

$$\log|x| = c - \log|t|$$

$$x = \frac{c}{t} \quad \text{(check)}$$

Stadium 2 $\boxed{x' + \frac{x}{t} = 1}$ oplossen met techniek a of techniek b.

techniek a: "integrerende factor"

techniek b: "variatie van parameter"

We hebben hom opl $x(t) = \frac{c}{t}$

Vervang hierin constante c door een functie $c(t)$

dus $x(t) = \frac{c(t)}{t}$

diff: $x'(t) = \frac{tc'(t) - c(t)}{t^2}$

$$x' + \frac{x}{t} = \frac{tc' - c}{t^2} + \frac{c}{t^2} = \frac{tc'}{t^2} = \frac{c'}{t} = 1$$

dit moet voldoen aan de inhom. dv.

DUS EIS DAT $\frac{c'}{t} = 1$

z.o.z.

Als $\frac{c'(t)}{t} = 1$ dan $c'(t) = t$

$c(t) = \frac{1}{2}t^2 + k$ ← integratie-const.

Deze $c(t)$ inpluggen geeft:

$$x(t) = \frac{c(t)}{t} = \frac{\frac{1}{2}t^2 + k}{t} = \boxed{\frac{1}{2}t + \frac{k}{t}}$$

Bewering: dit is de algemene opl van de inhom. lin. 1e orde d.v.

Zelf checken!