* toets t/m § 10 leeswijzer
* Plusopg: vaardigheid, techieken

Stel $u = u(x)$ en $v = v(x)$ zijn fies van x. Diff:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Integreer:

$$\int (uv)'\,dx = \int u'v + uv'\,dx$$

$$uv = \underbrace{\int u'v\,dx}_{\text{LINKS}} + \int uv'\,dx$$

Herschrijf:

$$\boxed{\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx}$$

dit is partieel integreren

$$\boxed{\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx}$$

Voorbeeld:

$\int x \sin x \, dx$ mbv partieel: keuze $\begin{cases} u' = x, & v = \sin x \\ u' = \sin x, & v = x \end{cases}$

Kies $u' = x$, $v = \sin x$ dan $u = \frac{1}{2}x^2$ en $v' = \cos x$

Invullen $\int x \sin x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \int \frac{1}{2} x^2 \cos x \, dx$ ↯ ↯

Dit helpt niet

OVERNIEUW: Kies $u' = \sin x$, $V = x$ dan $u = -\cos x$, $v' = 1$ zo

Invullen: $\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$

$= -x \cos x + \sin x + C.$

Met grenzen:

$$\int_a^b x \sin x \, dx = \Big[-x\cos x\Big]_a^b + \int_a^b \cos x \, dx$$

$$= \Big[-x\cos x\Big]_a^b + \Big[\sin x\Big]_a^b \quad \text{etc.}$$

$$\int e^x \sin x \, dx \qquad u' = e^x \quad v = \sin x$$

$$u = e^x \quad v' = \cos x$$

$$\int \underset{u'}{e^x} \underset{v}{\sin x} \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$u' = e^x \quad v = \cos x$$

$$u = e^x \quad v' = -\sin x$$

$$\int \underset{u'}{e^x} \underset{v}{\cos x} \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x)$$

$\boxtimes$

Creatief nietsdoen:

$$\int 1 \log x \, dx \qquad u' = 1, \quad v = \log x \qquad \text{invullen:}$$
$$u = x, \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + c$$
$$= x(\log x - 1) + c$$

Dit werkt met name bij log en arctan

Reductieformules

Voorbeeld: $\int x^{27} e^{-x}\, dx$ Geef het beestje een naam:

$I_n = \int x^n e^{-x}\, dx$, we willen I_{27} weten.

I_n partieel: $u' = e^{-x}$, $v = x^n$; $u = -e^{-x}$, $v' = n x^{n-1}$

$$I_n = \int x^n e^{-x}\, dx = -x^n e^{-x} + \int n x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

$$= -x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

dus

$$\boxed{I_n = -x^n e^{-x} + n I_{n-1}}$$

Reductieformule voor deze integraal

Bovendien:

$$I_0 = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + c$$

$$I_n = -x^n e^{-x} + n I_{n-1} \quad \text{en} \quad I_0 = -e^{-x} + c$$

$$I_{27} = -x^{27} e^{-x} + 27 I_{26}$$

$$= -x^{27} e^{-x} + 27\left(-x^{26} e^{-x} + 26 I_{25}\right)$$

$$= \ldots$$

$$= -x^{27} e^{-x} + 27\left(-x^{26} e^{-x} + 26\left(-x^{25} e^{-x} + 25\left(-x^{24} e^{-x} + 24 \ldots\right.\right.\right.$$

$$\ldots \left(-e^{-x} + c\right)\underbrace{)) \ldots))))}_{27 \text{ haakjes}}$$

By Substitutie:

Houd u en x gescheiden!

OK

$$\int \frac{\sin x}{\log(\cos x)}\, dx \qquad u = \cos x$$

$$du = -\sin x\, dx$$

$$\int \frac{-du}{\log u}$$

$$\int \frac{\sin x}{\log(\cos x)}\, dx \qquad u = \cos x$$

$$du = -\sin x\, dx$$

$$\cancel{\int \frac{\sin x \frac{du}{-\sin x}}{\log u}} \qquad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

Yuk!!!

Oplossen van 1^e orde lin inhom. d.v. met integrerende factor:

$x = x(t)$ $\quad x' = \frac{d}{dt} x$

We hadden $\boxed{x' + \frac{1}{t} x = 1}$

Eerst homogeen: $x' + \frac{1}{t} x = 0$, scheiden, vind je de homogene oplossing $\boxed{x = \frac{c}{t}}$ met c int. const.

Met int. factor de inhom. vgl. oplossen:

Principe: vermenigvuldig dv met $f(t)$ zodanig dat je links een afgeleide herkent

Hier: kies $f(t) = t$: $\boxed{t x' + x = t}$ want:

$(tx)' = tx' + x = t$ LEES: $(tx)' = t$

$tx = \frac{1}{2} t^2 + c$

CHECK

OPL: $\boxed{x = \frac{1}{2} t + \boxed{\frac{c}{t}}}$