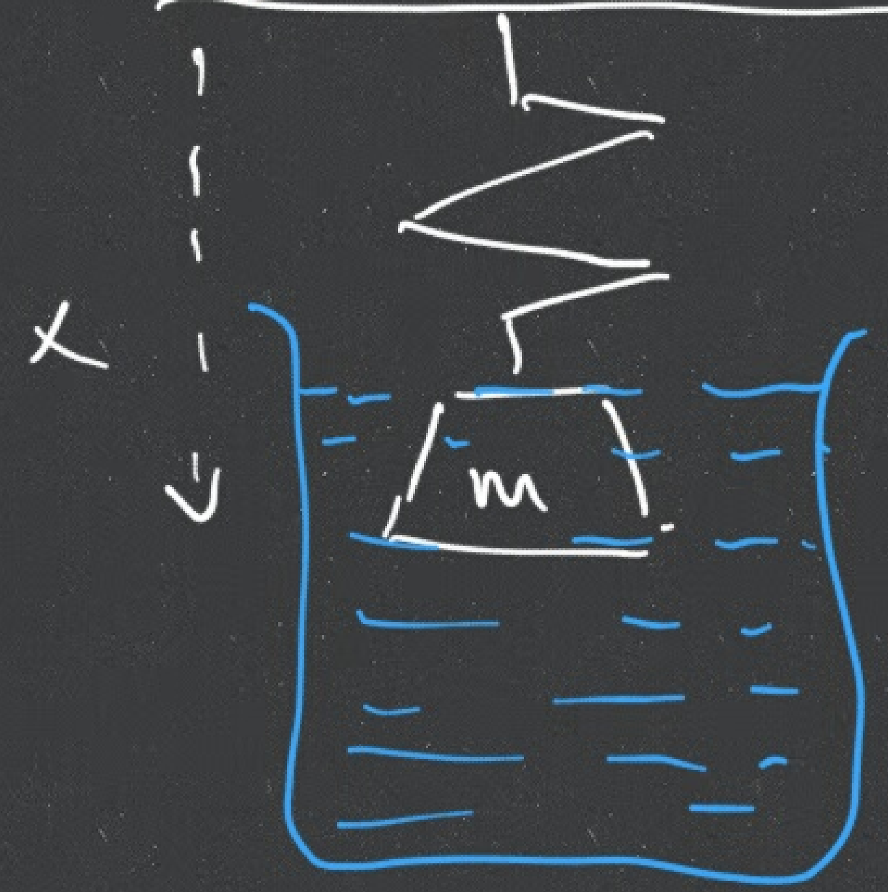
Harmonische Oscillator

Uitwijking vh gewicht $= x = x(t)$



Veer: Hooke kracht $k^2 x$

$k^2, m, \mu > 0$

Newton: kracht $m\ddot{x}$

$\dot{x}$ = snelheid

Wrijving: veronderstel $\mu \dot{x}$

$\ddot{x}$ = versn.

Som der krachten: $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + k^2 x = 0$ d.v. 2^e orde

lineair

const. coeff.

homogeen.

Herschaal mbv andere eenheid:

$$\boxed{\ddot{x} + \mu\dot{x} + k^2 x = 0}$$

! [Oplossen: je verwacht een homogene oplossing met 2 integratieconst.

Gok: probeer oplossing $x = e^{\lambda t}$ voor een of andere λ.

Vul in: $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$\lambda^2 e^{\lambda t} + \mu \lambda e^{\lambda t} + k^2 e^{\lambda t} = 0$ of $\boxed{(\lambda^2 + \mu\lambda + k^2) e^{\lambda t} = 0}$

$$\boxed{(\lambda^2 + \mu\lambda + k^2)e^{\lambda t} = 0}$$

$e^{\lambda t} \neq 0$ voor alle λ, t

dus $\boxed{\lambda^2 + \mu\lambda + k^2 = 0}$ karakteristieke vgl.

Los op: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4k^2}}{2}$ Hoop je... (in principe)

Bewering: de homogene oplossing is

$$x_H(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

CHECK DIT ZELF

2 Integratieconstanten te bepalen met beginwaarden $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$

Vraag: wat weet je van het teken van λ_1 en λ_2?

Stel λ_1, λ_2 zijn reeel.

$\mu^2 - 4k^2 \geq 0$

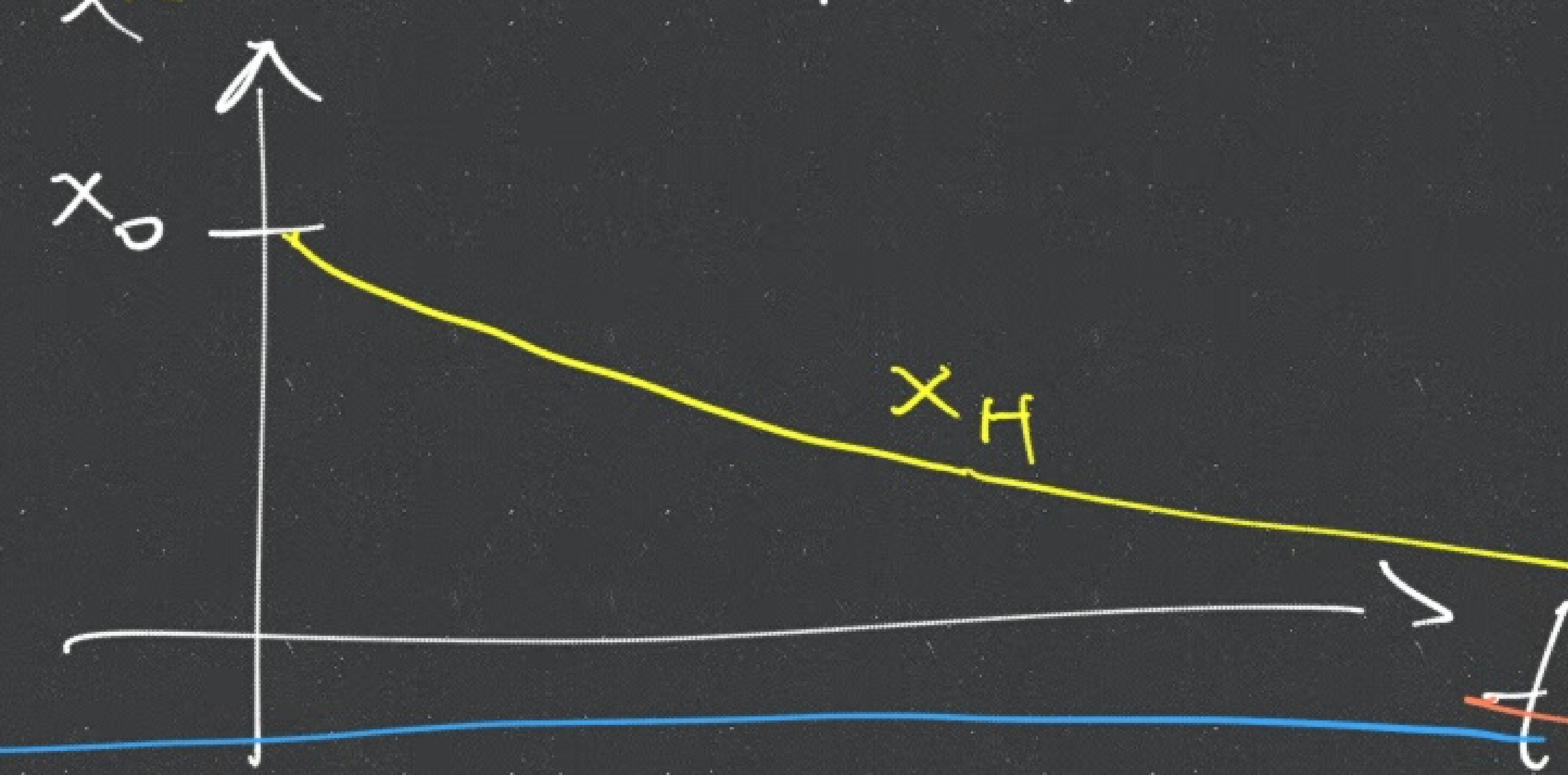
$\mu^2 > \mu^2 - 4k^2 \geq 0$

$\sqrt{\mu^2 - 4k^2} < \mu$ Dus $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

① Als $\boxed{\mu^2 - 4k^2 > 0}$ dan λ_1, λ_2 reëel en negatief.

$\boxed{x_H = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}}$ is exp. fie met neg. exponenten

dus die dooft uit



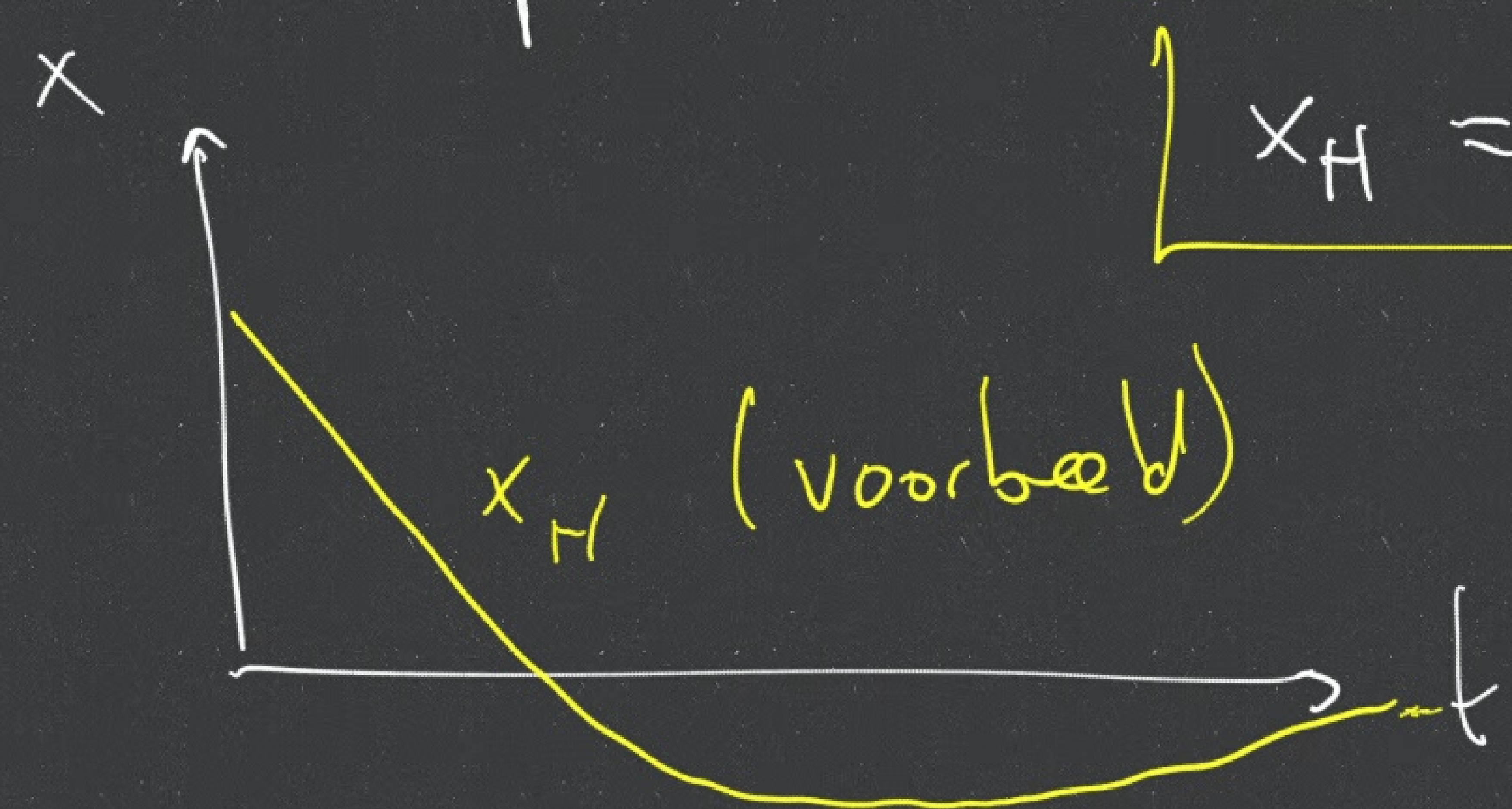
② Als $\boxed{\mu^2 - 4k^2 = 0}$ dan $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}\mu$

$\cancel{x_H = c_1 e^{-\frac{1}{2}\mu t} + c_2 e^{-\frac{1}{2}\mu t}}$

$x_H = c_1 e^{-\frac{1}{2}\mu t}$

Opkrikken met variatie van parameter; je vindt dan

$\boxed{x_H = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{1}{2}\mu t}}$ (Dit mag je rechtstreeks gebruiken)



Dit geval heet $\boxed{\text{kritische demping}}$

(3) $\boxed{\mu^2 - 4k^2 < 0}$ Twee complexe λ's!

$$\lambda_{1,2} = -\tfrac{1}{2}\mu \pm i\frac{\sqrt{4k^2-\mu^2}}{2}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\mu \pm i\omega$$

met $\boxed{4\omega^2 = 4k^2 - \mu^2}$

NB: $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ (complex geconjug.)

Alg. hom. opl. is $x_{H} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

$$= c_1 e^{(-\frac{1}{2}\mu + \omega i)t} + c_2 e^{(-\frac{\mu}{2} - \omega i)t}$$

(*) zie film "gedoetjes"

(*) zie film

$$\overset{(*)}{=} e^{-\frac{1}{2}\mu t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

$$\overset{(*)}{=} \boxed{r e^{-\frac{1}{2}\mu t}\cos(\omega t + \varphi)}$$

$\rightarrow t=0$: $r\cos\varphi$

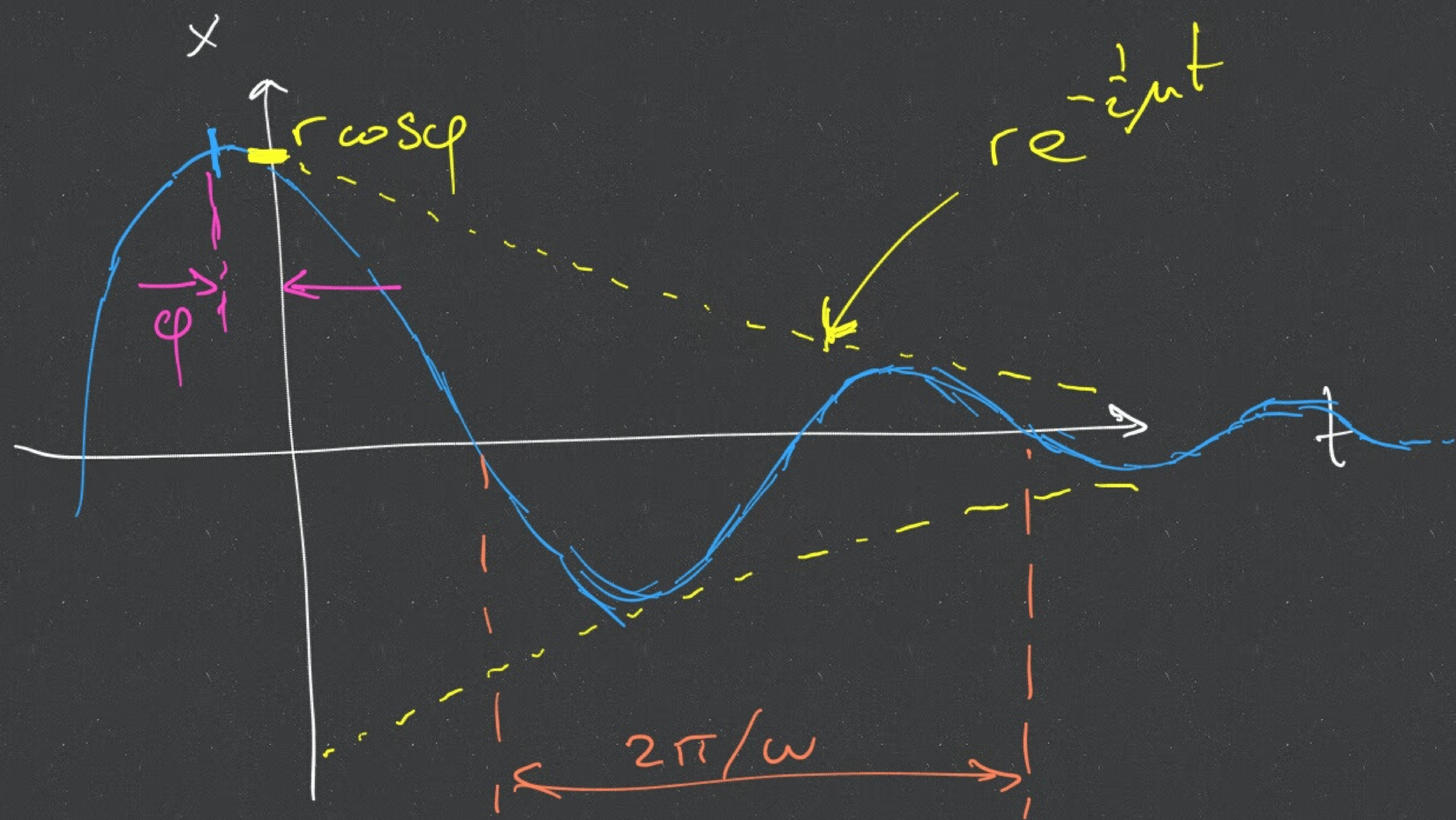
int. const. r, φ

Meetbare grootheden

amplitude op $t=0$

hoeksnelheid

fase


x
r cos φ
$re^{-i\mu t}$
φ
t
2π/ω

Aandrijving. f

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + k^2 x = f(t)$$ Inhomogene vgl.

Oplossen ① los het homogene probleem op. (dus met $f=0$)

Zeg, x_H is hom. opl.

→ ② Vind precies "één" functie $x = x(t)$ van het inhomogene probleem. Noem deze x_p

[x_p heet particuliere oplossing]

Dus: x_H voldoet aan $\ddot{x} + \mu \dot{x} + k^2 x = 0$

en x_p " " $\ddot{x} + \mu \dot{x} + k^2 x = f(t)$

De algemene oplossing bestaat uit $x_H + x_p$ → Hier niet!

Hier zitten 2 int. const

③ Bepaal int. const mbv beginwaarden

Hoe vind je een x_p? Algemene methode:

Voorbeeld: "Gokken met voorkennis"

$\ddot{x} + \mu \dot{x} + k^2 x = \sin(\alpha t)$

$$\begin{array}{l|l} \text{Gok: } k^2 & x_p = \boxed{A \sin(\alpha t) + B\cos(\alpha t)} \quad * \\ \text{Dan } \mu & \dot{x}_p = -B\alpha \sin(\alpha t) + A\alpha \cos(\alpha t) \\ 1 & \ddot{x}_p = -A\alpha^2 \sin(\alpha t) - B\alpha^2 \cos(\alpha t) \end{array}$$

$$(k^2 A - \mu\alpha B - \alpha^2 A)\sin\alpha t + (k^2 B + \mu\alpha A - \alpha^2 B)\cos\alpha t = \sin\alpha t$$

Dus ik moet zorgen dat

$$\boxed{k^2 A - \mu\alpha B - \alpha^2 A = 1 \quad \text{en} \quad k^2 B + \mu\alpha A - \alpha^2 B = 0}$$

Stelsel, 2 vgl, A en B onbekend

Los op voor A, B. geeft Part opl. x_p als bovenaan *