Kwadraat afsplitsen

$$25 + \boxed{x^2 + 10x - 39 = 0} + 25$$

$$(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

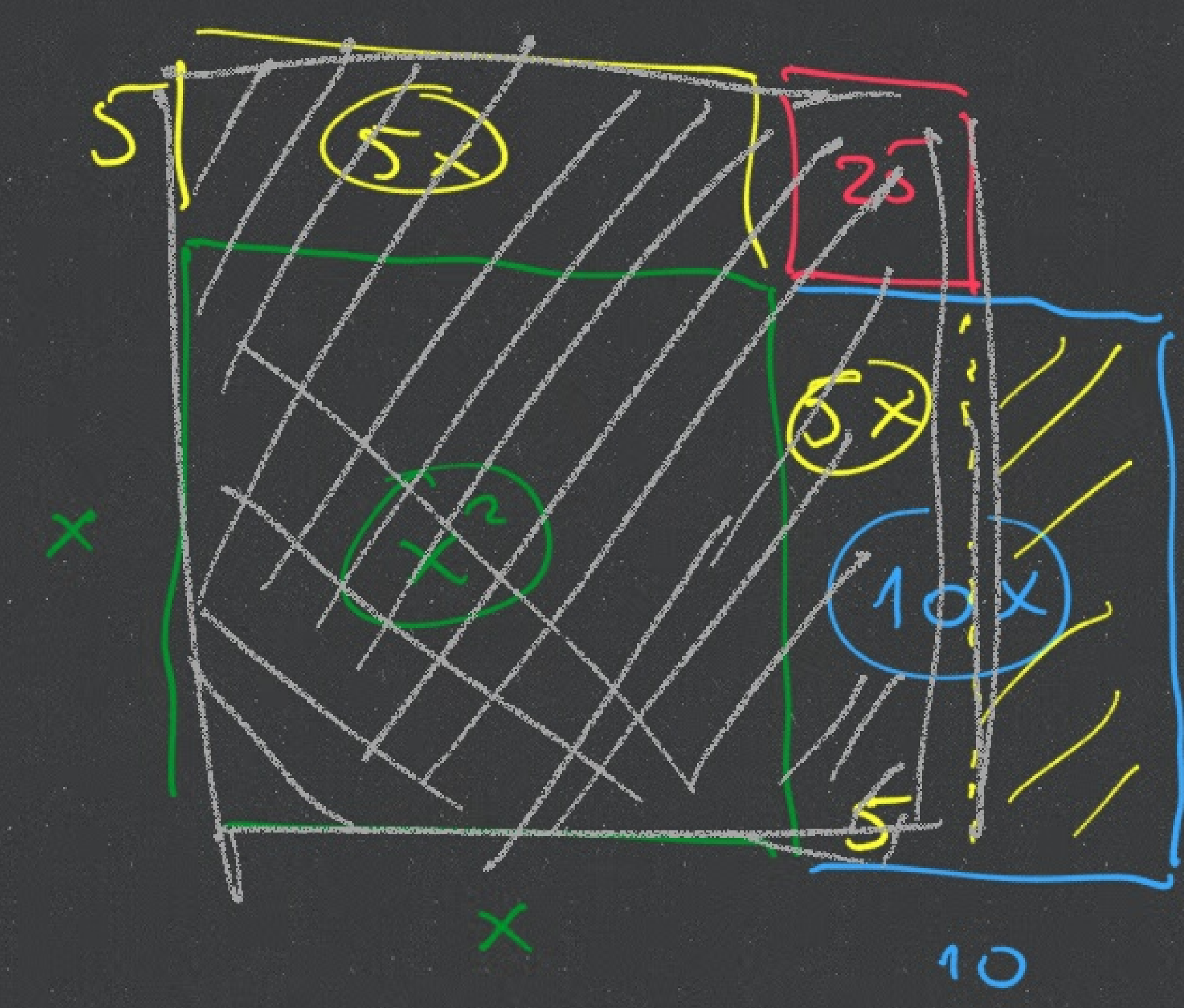
$$\boxed{(x+5)^2 = 39 + 25}$$ kwadraat afgesplitst

$$(x+5)^2 = 64$$

$$x + 5 = \pm 8$$

$$x = -13 \text{ of } x = 3$$

Opp $39 + 25 = 64$



Samen 39

al Khwarizmi: ca. 825 n chr

ca. 200 AH.

Zelf:

$$4x^2 - 12x + 8 = 0$$

Rationale functie = breuk van twee polynomen

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ met P en Q polynomen

graad$(Q) \geq 1$, graad$(P) \geq 0$.

Voorbeeld: $\dfrac{2x+4}{(3-x)(x-2)} = \dfrac{2x+4}{-x^2+5x-6}$

Breuken samenvoegen

$$\frac{x}{3x+7} - \frac{1}{x-2} = \frac{x(x-2)}{(3x+7)(x-2)} - \frac{3x+7}{(3x+7)(x-2)}$$

$$= \frac{x^2-5x-7}{(3x+7)(x-2)}$$

Breuksplitsen is het omgekeerde daarvan

Vb. $\dfrac{2x+4}{(3-x)(x-2)}$

NB: de graad van teller $=1$
de graad van noemer $=2$
Vooraf zorgen dat graad van teller kleiner dan graad v. noemer.
(zie later)

We zoeken a en b zodanig dat $\dfrac{a}{3-x} + \dfrac{b}{x-2} = \dfrac{2x+4}{(3-x)(x-2)}$

Samenvoegen: $\dfrac{a}{3-x} + \dfrac{b}{x-2} = \dfrac{a(x-2)+b(3-x)}{(3-x)(x-2)} = \dfrac{2x+4}{(3-x)(x-2)}$

tellers ook gelijk betekent:

$$a(x-2)+b(3-x) = 2x+4$$

$$(a-b)x - 2a+3b = 2x+4 \longrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ -2a+3b=4 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=10 \\ b=8 \end{matrix}$$

Check: $\frac{10}{3-x}+\frac{8}{x-2}=\frac{10(x-2)+8(3-x)}{(3-x)(x-2)}=\frac{2x+4}{(3-x)(x-2)}$ ∮

$\underline{\text{Zelf}}$: $\frac{1}{x^2-1}$ splitsen $=\frac{1/2}{x-1}-\frac{1/2}{x+1}$

Terzijde: plusopg. (co)sin hyperbolicus Warm aanbevolen

Primitiveren van rat. fies $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

$\underline{\text{Strategie}}$

① als graad(P) $\geq$ graad(Q) dan eerst delen.

Vb: $\frac{x^3-3x^2}{x^2+1}$

$$
\begin{array}{l}
x^2+1 \,/\, x^3-3x^2 \,\backslash\, x-3 \\
\quad\underline{x^3+x} \\
\quad\quad -3x^2-x \\
\quad\quad \underline{-3x^2-3} \\
\quad\quad\quad -x+3
\end{array}
$$

$\frac{x^3-3x^2}{x^2+1}=x-3+\frac{3-x}{x^2+1}$

$$\int \frac{x^3-3x^2}{x^2+1}\,dx = \int x-3+\frac{3-x}{x^2+1}\,dx = \int x-3\,dx + \int \frac{3-x}{x^2+1}\,dx$$

eitje — zie vervolg.

(2) Vanaf nu alleen kijken naar graad P < graad Q

(2) Stel graad(Q) = 1

Vb. $\int \frac{3}{2x+7}\,dx$ Subs $2x+7=u$, $2dx=du$ $\int \frac{\frac{3}{2}\,du}{u} = \frac{3}{2}\log u + c$

en terug subs.

(3) Stel graad(Q) = 2 kijk naar aantal nulpunten

(3A) Q heeft 2 nulpunten.

Vb: $\int \frac{x}{(3-x)(x-2)}\,dx$ breuksplits

$$\int \frac{x}{(3-x)(x-2)}\,dx \qquad \text{Zoeken } a,b \text{ zdd } \frac{a}{3-x}+\frac{b}{x-2}=\frac{x}{(3-x)(x-2)}$$

$$a(x-2)+b(3-x)=x \qquad \begin{cases} a-b=1 \\ -2a+3b=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a=3 \\ b=2 \end{matrix}$$

$$(a-b)x-2a+3b=x$$

$$\int \frac{x}{(3-x)(x-2)}\,dx = \int \frac{3}{3-x}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx \quad \text{etc.}$$

NB: als Q 2 nulpunten heeft, kun je factoriseren.

(3B) Q heeft 1 (dubbel) nulpunt

$$\int \frac{x}{(x+2)^2}\,dx \qquad \text{Subs } \begin{matrix} u=x+2 \\ du=dx \end{matrix} \qquad \int \frac{u-2}{u^2}\,du$$

$$= \underbrace{\int \frac{1}{u}\,du}_{\text{?}} - \underbrace{\int \frac{2}{u^2}\,du}_{\text{?}}$$

Vervolg 3B: $\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$ subs $u = x+2$, $du = dx$ $\int \frac{1}{u^2}\,du$ etc.

3C Q heeft geen nulpunten.

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$

$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$ subs $u = 1+x^2$, $du = 2x\,dx$ $\int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\log u$

$= \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$

Do not try this at home

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1-ix)(1+ix)} = \frac{1/2}{1-ix} + \frac{1/2}{1+ix}$$

$$\arctan x = \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-ix}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+ix}\,dx$$

$$= \frac{i}{2}\log(1-ix) - \frac{i}{2}\log(1+ix)$$

$$= \frac{i}{2}\log\frac{1-ix}{1+ix} + c$$